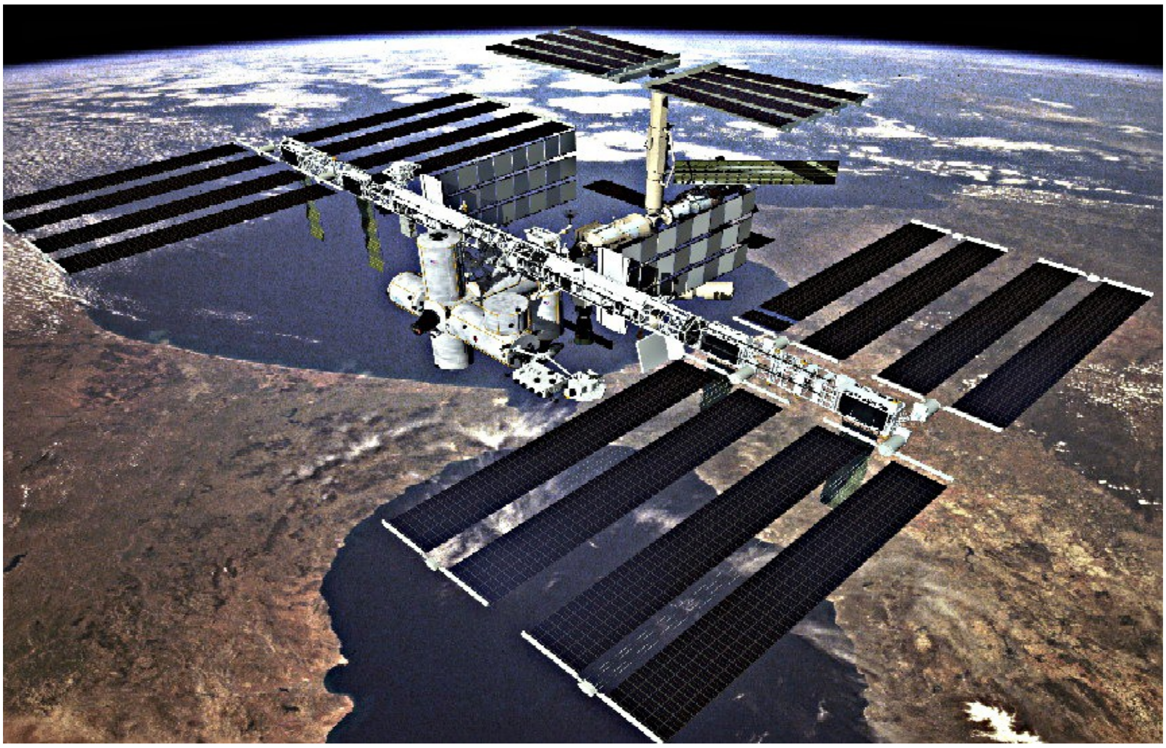
TEMA 2.- Campo gravitatorio

ÍNDICE GENERAL



Vista del estrecho de Gibraltar desde la Estación Espacial Internacional (ISS)

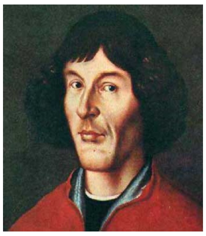
1.- INTRODUCCIÓN HISTÓRICA. LEYES DE KEPLER.

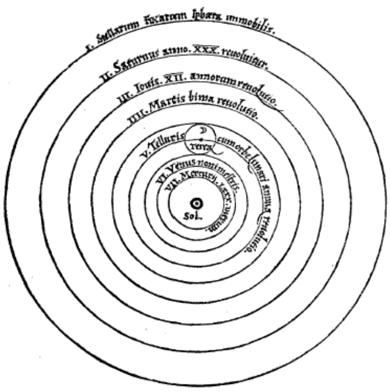
El ser humano lleva observando el movimiento de los cuerpos celestes desde que se encuentra sobre la Tierra. Así, a lo largo de la Historia ha intentado en numerosas ocasiones dar una explicación de dicho fenómeno; hasta llegar a Newton, han sido varios los científicos y astrónomos que han propuesto teorías para justificar el comportamiento del Universo. Mencionamos a continuación los más importantes:

1. **Ptolomeo de Alejandría (100-170 d.C.)**

Este científico griego defendió en su obra *Almagesto* la teoría geocéntrica de Aristóteles, según la cual la Tierra se encontraba en el centro del Universo y todos los demás planetas, el Sol y las estrellas giraban alrededor de ella. Sin embargo, para explicar los movimientos irregulares de algunos planetas, como Venus o Marte, recurrió a los epiciclos y deferentes, complejas combinaciones de movimientos circulares de dichos planetas. Con todo ello, las ideas de Ptolomeo permanecieron casi 2000 años inalteradas en el mundo occidental hasta la irrupción de Copérnico.

2. **Nicolás Copérnico (1473-1543)**



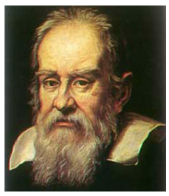


Fue un monje polaco que en 1530 publica un libro llamado *Revoluciones*, en el que rompe abiertamente con el modelo aristotélico al postular que es la Tierra y los restantes planetas los que se mueven en órbitas circulares alrededor del Sol (teoría heliocéntrica, ver dibujo a la derecha). Esta idea causó un gran revuelo en la época, y de inmediato ganó adeptos y detractores; de hecho, se le objetó que era incapaz de explicar la paralaje estelar (desplazamiento aparente de las estrellas que aparece debido a un cambio de posición de la Tierra). Tuvieron que transcurrir casi 100 años hasta que la teoría heliocéntrica fuera comúnmente aceptada, y casi 300 hasta que Bessel, en 1843, logró calcular la primera paralaje estelar, lo cual demostró de manera definitiva la traslación de la Tierra alrededor del Sol. Asimismo, Foucault, en 1843, demostró la rotación de la Tierra sobre sí misma colgando un péndulo de la cúpula del Panteón de París.

3. **Tycho Brahe (1546-1601)**

Este científico danés puede considerarse como el primer astrónomo propiamente dicho, pues dedicó muchos años de su vida a realizar mediciones exactas (distancias, ángulos,...) sobre el movimiento de los planetas con la única ayuda de cálculos geométricos, proporcionando de esta manera los datos que permitirían afianzar el modelo heliocéntrico.

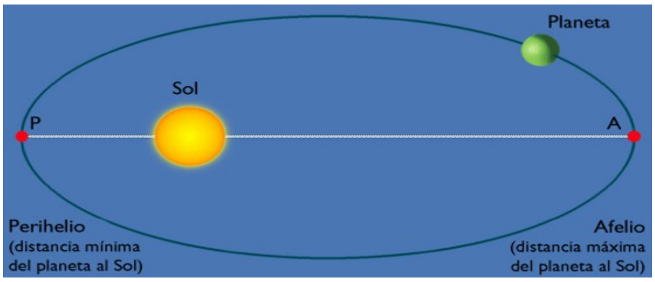
4. **Galileo Galilei (1564-1642)**



A este físico italiano se le conoce por muchos descubrimientos; uno de ellos fue el telescopio, mediante el cual descubrió montañas en la Luna y los satélites de Júpiter, hechos que chocaban frontalmente con las ideas de la época, según las cuales los cuerpos celestes debían ser perfectos. Galileo era un copernicano convencido, y aunque no consiguió demostrar las ideas heliocéntricas, las defendió durante toda su vida.

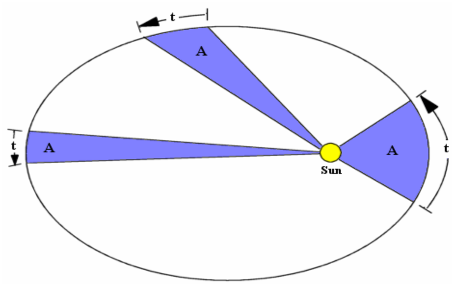
5. **Johannes Kepler (1571-1630)**

Fue un astrónomo y matemático alemán, discípulo de Tycho Brahe. Recogió todas las medidas que su maestro había tomado y a partir de ellas elaboró, en 1609 en la obra *Nueva Astronomía*, una teoría cuantitativa empírica (basada, pues, en datos experimentales) acerca del movimiento de los planetas alrededor del Sol. Dicha teoría se resume en tres leyes, las **leyes de Kepler**, que se explican por la existencia de una fuerza única que existe entre dos masas cualesquiera; son las siguientes:



- ***1ª ley, o ley de las órbitas***: Todos los planetas describen órbitas elípticas alrededor del Sol, el cual está situado en uno de los focos de la elipse. Esta ley acaba con la idea aristotélica y comúnmente aceptada hasta entonces según la cual la trayectoria perfecta para los cuerpos celestes era la circular (ver figura a la derecha).

- ***2ª ley, o ley de las áreas***: El radio vector de un planeta barre áreas iguales en intervalos de tiempo iguales. Esta ley implica que los planetas no se mueven con velocidad constante, sino que lo hacen más rápido cuanto más cerca estén del Sol (perihelio), y viceversa (se mueven más despacio en el afelio). Esta ley implica que la velocidad areolar (área barrida en un cierto tiempo) de los planetas permanece constante:



$$\frac{dA}{dt} = cte$$

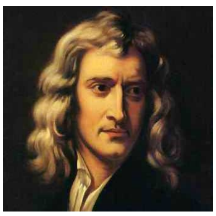
- ***3ª ley, o ley de los períodos*** (publicada en 1619 en la obra *Armonía del mundo*): Los cuadrados de los períodos de revolución de los planetas alrededor del Sol son directamente proporcionales a los cubos de los semiejes mayores de las órbitas que describen, es decir,

$$\boxed{T^2 = k \cdot r^3}$$

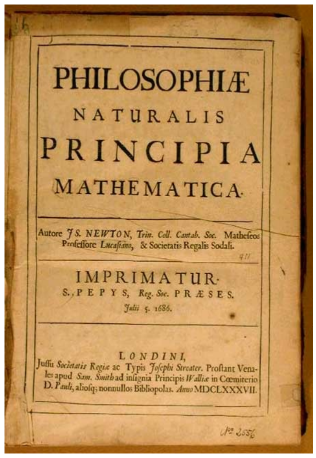
donde T es el período de revolución del planeta, k es la constante de proporcionalidad y r es el semieje mayor de la elipse.

Vídeos acerca de las tres leyes de Kepler:
http://www.youtube.com/watch?v=0q4pF2TjO6A (1 de 2)
http://www.youtube.com/watch?v=_ZDMgrtEFDQ (2 de 2)

2.- LEY DE GRAVITACIÓN UNIVERSAL DE NEWTON.



A partir de los datos recopilados por los astrónomos (en especial por Brahe), de las ideas de Copérnico y Galileo y, sobre todo, de las leyes de Kepler (que no explican *por qué* se mueven los planetas), el físico inglés **Isaac Newton** (1642-1727) estableció en su obra *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica* (Principios matemáticos de la Filosofía Natural), además de las bases de la Física clásica, el fundamento del movimiento de los planetas alrededor del Sol por efecto de fuerzas gravitatorias atractivas entre ambos. Este resultado general se conoce con el nombre de ley de Newton de gravitación universal, la cual establece lo siguiente:



PHILOSOPHIÆ
NATURALIS
PRINCIPIA
MATHEMATICA.

Autore JS. NEWTON, Trin. Coll. Cantab. Soc. Matheseos Professore Lucasiano, & Societatis Regalis Sodali.

IMPRIMATUR.
S. PEPYS, Reg. Soc. PRÆSES.
Julii 5. 1686.

LONDINI,
Jussu Societatis Regiæ ac Typis Josephi Streater. Prostant Venales apud Sam. Smith ad insignia Principis Walliæ in Cœmiterio D. Pauli, aliosq; nonnullos Bibliopolas. Anno MDCLXXXVII.

Dos objetos cualesquiera del Universo, de masas M y m, se atraen mutuamente con una fuerza que es directamente proporcional al producto de sus masas e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia, r, que existe entre sus centros de masa. Matemáticamente, la ley de Newton de gravitación universal se expresa de la siguiente manera:

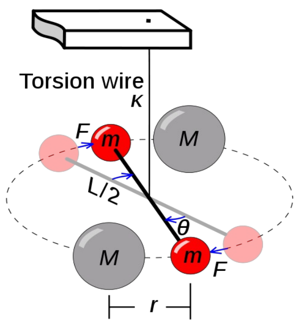
$$\boxed{\vec{F} = -G\frac{Mm}{r^2}\,\vec{u}_r}$$

donde G es la constante de gravitación universal ($G = 6'67\cdot 10^{-11}\ N\cdot m^2\cdot kg^{-2}$).

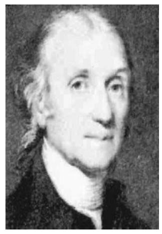
OBSERVACIONES A LA LEY DE NEWTON DE GRAVITACIÓN UNIVERSAL:

1. La fuerza de atracción gravitatoria es de carácter atractivo, de ahí el signo negativo que aparece en su definición.

2. El vector $\vec{u}_r$ es un vector unitario cuya dirección se encuentra en la línea que une ambas masas, y cuyo sentido está dirigido hacia afuera. Como veremos en el apartado siguiente, decimos entonces que la fuerza de atracción gravitatoria es una fuerza central.



3. La ley de Newton de gravitación universal es válida para cualquier pareja de objetos existente en el Universo; de hecho, la constante de gravitación universal es válida en todo el Universo. Fue determinada experimentalmente por primera vez por **Henry Cavendish** (1731-1810), quien en 1798 determinó con ayuda de una balanza de torsión (ver imagen a la izquierda) un valor de $6{,}74\cdot 10^{-11}$ $N\cdot m^2\cdot kg^{-2}$, prácticamente igual al actual. A partir de este valor calculó, también con gran precisión, la masa de la Tierra y su densidad media.



4. El pequeño valor de la constante de gravitación tiene como consecuencia el valor extremadamente pequeño de la fuerza de atracción gravitatoria entre dos objetos que se encuentren sobre la Tierra; sin embargo, a escala planetaria esta fuerza es de tal intensidad que da lugar a las trayectorias elípticas de los planetas y explica perfectamente su movimiento.

5. El principal mérito de Newton reside en afirmar que dicha ley, que explica el movimiento de los objetos celestes, es la misma que explica el porqué todos los objetos que se encuentran cerca de la Tierra se mueven verticalmente con la misma aceleración, llamada *aceleración de la gravedad*. En efecto, la aceleración de caída de cualquier objeto que se encuentre cerca de la Tierra será, de acuerdo con la 2ª ley de Newton:

$$a = \frac{\vec{F}}{m} = \frac{-GM}{r^2}\,\vec{u}_r \quad (N\cdot kg^{-1}\ ó\ m\cdot s^{-2})$$

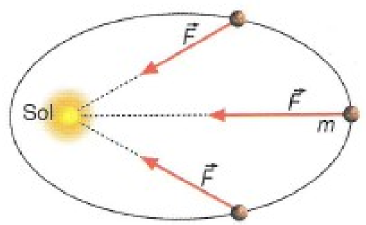
Observar que la aceleración de la gravedad no depende de la masa del objeto que cae, sino de la masa del objeto que atrae a éste (el planeta Tierra).

Vídeos acerca de la ley de gravitación universal de Newton: http://www.youtube.com/watch?v=72sf9S5H7kk (1 de 2) http://www.youtube.com/watch?v=FpQMnHjfNKA (2 de 2)

3.- FUERZAS CENTRALES. COMPROBACIÓN DE LA SEGUNDA LEY DE KEPLER.

Las fuerzas son también llamadas interacciones, pues requieren de la presencia de, como mínimo, dos cuerpos para manifestarse. Todas las interacciones que existen en la Naturaleza pueden ser de dos tipos:

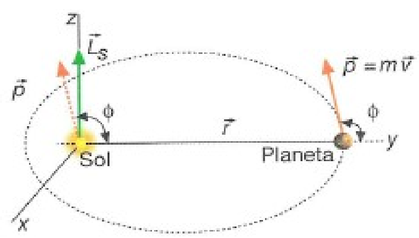
(a) *Fuerzas o interacciones de contacto*: aparecen entre dos cuerpos que están en contacto entre sí. Ej.: fuerza de rozamiento.
(b) *Fuerzas o interacciones a distancia*: aparecen entre dos cuerpos que no se encuentran en contacto. Ejs.: fuerza gravitatoria, fuerza eléctrica, fuerza magnética,...



Diremos que una fuerza es ***central*** cuando está siempre dirigida hacia un mismo punto, independientemente de cuál sea la posición de la partícula sobre la que está actuando. También podemos decir que está siempre dirigida a lo largo de la línea que une los dos objetos que están interaccionando. Tanto la fuerza gravitatoria como la eléctrica son dos importantes ejemplos de fuerzas centrales, pero existen otras, como la fuerza elástica o la centrípeta. Así, la fuerza gravitatoria que actúa sobre un planeta está dirigida siempre hacia el Sol (ver figura a la derecha). Todas las fuerzas centrales son conservativas.

AMPLIACIÓN: En el tema anterior estudiamos la relación entre el momento de una fuerza y la variación temporal del momento angular:

$$\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt}$$



En la figura de la derecha se muestra el momento angular de un planeta con respecto del Sol. Puede observarse que es perpendicular al plano formado por el momento lineal del planeta y su vector de posición. Ahora bien, como la fuerza de atracción gravitatoria es una fuerza central, entonces el momento de dicha fuerza con respecto del centro de fuerzas será nulo:

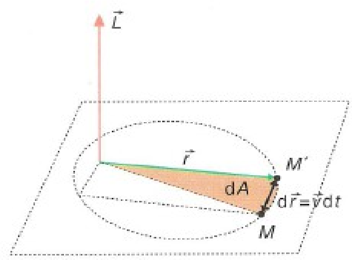
$$\text{si} \quad \vec{r} \parallel \vec{F} \Rightarrow \vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} = 0$$

de donde deducimos que el momento angular del planeta permanece constante si éste se encuentra sometido a una fuerza central. De esta importante afirmación podemos extraer algunas consecuencias:

1. Como la dirección del momento angular permanece constante, el movimiento del planeta tiene lugar en un plano. Dicho plano es el formado por los vectores $\vec{r}$ y $\vec{p}$.

2. Si el sentido del momento angular permanece constante, deducimos que el planeta gira siempre en el mismo sentido, tal y como se deduce de la regla del tornillo o del sacacorchos.

3. Si el módulo del momento angular permanece constante, entonces se cumple la segunda ley de Kepler. En efecto, consideremos un planeta que tarda un tiempo dt en pasar del punto M al M´ (ver figura a la derecha). El vector de posición ha barrido en dicho tiempo el área dA, que es igual a la mitad del área del paralelogramo definido por $\vec{r}$ y $d\vec{r}$:



$$dA = \frac{1}{2} \cdot |\vec{r} \times d\vec{r}| = \frac{1}{2} \cdot |\vec{r} \times \vec{v}|\ dt$$

El valor del momento angular se calcula mediante:

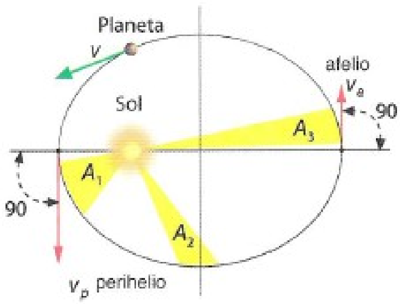
$$|\vec{L}| = |\vec{r} \times m\vec{v}| = m\,|\vec{r} \times \vec{v}| \Rightarrow |\vec{r} \times \vec{v}| = \frac{|\vec{L}|}{m}$$

Sustituyendo en la expresión anterior, nos queda:

$$dA = \frac{1}{2} \cdot \frac{|\vec{L}|}{m}\,dt \Rightarrow \frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} \cdot \frac{|\vec{L}|}{m} = cte$$

En consecuencia, deducimos que la velocidad areolar de un planeta permanece constante al actuar sobre él una fuerza central (la fuerza gravitatoria).

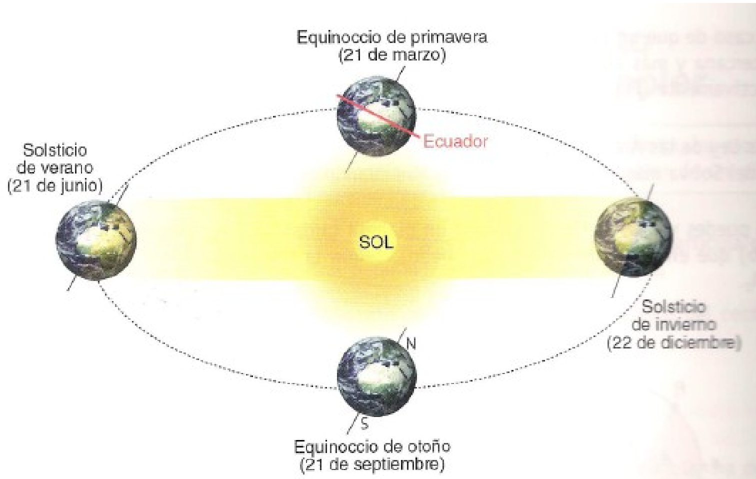
4. Al permanecer constante el momento angular, deducimos que un planeta que gira alrededor del Sol va más deprisa en el perihelio (punto más cercano) que en el afelio (punto más lejano), pues en ambas posiciones se cumple que (ver figura a la derecha):



$$L_a = L_p \;\Rightarrow\; r_a \cdot m \cdot v_a \cdot \text{sen } 90^o = r_p \cdot m \cdot v_p \cdot \text{sen } 90^o \;\Rightarrow\; r_a \cdot v_a = r_p \cdot v_p$$

El resultado anterior es una de las consecuencias de la segunda ley de Kepler.

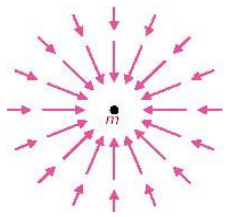
5. Por último, debido a la conservación del momento angular se cumple que el eje de rotación de la Tierra forma un ángulo fijo con el plano, es decir, el eje de rotación de la Tierra mantiene su orientación conforme ésta gira alrededor del Sol (ver figura).



4.- CAMPO GRAVITATORIO.

4.1.- INTENSIDAD DEL CAMPO GRAVITATORIO CREADO POR UNA PARTÍCULA. LÍNEAS DE FUERZA. PRINCIPIO DE SUPERPOSICIÓN.

El ***campo gravitatorio*** es la región del espacio en la que cualquier objeto de masa m se ve sometido a una fuerza gravitatoria. Es decir, cualquier objeto, por el simple hecho de poseer una masa M, crea a su alrededor un campo gravitatorio, de manera que atraerá a cualquier objeto situado en dicho campo. Lógicamente, el campo gravitatorio será un campo de fuerzas atractivo, central y conservativo, pues su valor depende únicamente de la distancia existente entre los objetos que se atraen.



Las ***líneas de fuerza o líneas de campo*** del campo gravitatorio son radiales, nacen en el infinito, terminan en el centro de masa del objeto que crea el campo y nunca se cortan (ver dibujo a la derecha). Son líneas imaginarias que nos indican la trayectoria que seguiría una partícula sometida a la influencia del campo, de manera que el vector intensidad de campo gravitatorio es siempre tangente a dichas líneas.

Llamamos ***intensidad de campo gravitatorio*** en un punto, o simplemente campo gravitatorio en un punto, a la fuerza que ejerce el campo sobre la unidad de masa colocada en dicho punto. Es una magnitud vectorial que se representa con la letra $\vec{g}$, que tiene las dimensiones de una aceleración y que se calcula de la manera siguiente:

$$\vec{g} = \frac{\vec{F}}{m} = -G\frac{M\cancel{m}}{\cancel{m}r^2}\,\vec{u}_r = -G\frac{M}{r^2}\,\vec{u}_r \Rightarrow |\vec{g}| = \boxed{g = G\frac{M}{r^2}} \quad (\text{N/kg ó m}\cdot\text{s}^{-2})$$

Si existen varias partículas M_1, M_2, … la intensidad del campo gravitatorio que crean todas ellas en un punto P separado una distancia r_1, r_2, … respectivamente de ellas se calcula aplicando el ***principio de superposición***, es decir, sumando vectorialmente los campos gravitatorios creados individualmente por cada masa:

$$\boxed{\vec{g} = \vec{g}_1 + \vec{g}_2 + ... = \sum_{i=1}^{n} \vec{g}_i}$$

OBSERVACIONES A LA INTENSIDAD DE CAMPO GRAVITATORIO:

1. El vector campo gravitatorio está siempre dirigido hacia la masa que lo crea. Su dirección y sentido son los mismos que los de la fuerza gravitatoria.
2. La intensidad de dicho vector en un punto viene dada por la aceleración que sufriría un objeto situado en dicho punto.
3. Esta aceleración es independiente de la masa del objeto que se mueve; sólo depende de la distancia y de la masa del objeto que crea el campo gravitatorio.
4. El campo gravitatorio que un cuerpo crea a su alrededor sólo se anula en el infinito, pues si $r \rightarrow \infty$, entonces $g \rightarrow 0$.

4.2.- ENERGÍA POTENCIAL GRAVITATORIA. CONSERVACIÓN DE LA ENERGÍA.

Hemos dicho que el campo gravitatorio es conservativo. Por ello, el trabajo realizado al desplazar una partícula de masa m dentro del campo gravitatorio creado por otra de masa M no dependerá de la trayectoria seguida por la partícula, sino de las posiciones inicial y final de la misma. Si dichas posiciones están separadas una distancia r, llegaremos a la conclusión de que la energía potencial gravitatoria es una magnitud escalar que se calcula, para cada posición relativa de dos masas M y m, de la siguiente manera:

$$\boxed{E_p = -G\frac{Mm}{r}} \quad (\text{J})$$

La expresión anterior nos mide el trabajo que hay que realizar para trasladar una partícula de masa m desde el infinito hasta un punto situado a una distancia r de la masa M.

AMPLIACIÓN: Para demostrar la expresión anterior, consideremos una masa M fija y otra masa, m, separada inicialmente una distancia infinita de la primera. Entonces, el trabajo realizado por la fuerza de atracción gravitatoria para acercar las dos partículas a una distancia r_B será igual a:

$$W = \int_A^B \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_\infty^B \frac{GMm}{r^2}\,dr = GMm\int_\infty^B \frac{dr}{r^2} = GMm\left[-\frac{1}{r}\right]_\infty^B = -\frac{GMm}{r_B}$$

Ahora bien, si consideramos que en el infinito la energía potencial es nula, y como $W = -\Delta E_p$, deducimos que la energía potencial de un sistema de dos partículas separadas una cierta distancia r será igual a la expresión anteriormente indicada.

COMENTARIOS A LA ENERGÍA POTENCIAL GRAVITATORIA:

1. La energía potencial gravitatoria es nula en el infinito.
2. La energía potencial gravitatoria es siempre negativa. El sentido físico de este signo negativo es que a medida que la fuerza gravitatoria realiza el trabajo para aproximar dos masas, la energía potencial de ambas disminuye. Si inicialmente (partículas separadas una distancia infinita) la energía potencial era cero, entonces al final del desplazamiento la energía potencial será negativa. Obviamente, si las masas se separan su energía potencial aumentará. En tal caso, debemos aplicar una fuerza exterior.

3. La energía potencial asociada a un sistema formado por más de dos partículas se obtiene sumando las energías correspondientes a todas las parejas posibles de partículas (*principio de superposición*).

Para cualquier partícula que se mueva en el seno de un campo gravitatorio a una cierta velocidad podemos definir sus energías cinética y potencial gravitatoria; sabemos entonces que, en ausencia de fuerzas no conservativas (p.ej., el rozamiento), se cumple la **ley de conservación de la energía mecánica** (E):

$$E = E_c + E_p = \frac{1}{2}\ mv^2 + \left(-G\frac{Mm}{r}\right) = \text{constante} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\Delta E = 0}$$

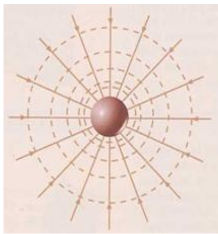
4.3.- POTENCIAL GRAVITATORIO. SUPERFICIES EQUIPOTENCIALES. PRINCIPIO DE SUPERPOSICIÓN.

Hemos visto en el tema anterior que los campos vectoriales llevan asociados campos escalares. El campo gravitatorio, que es un campo vectorial, lleva asociado un campo escalar llamado ***potencial gravitatorio***. El potencial gravitatorio en un punto se define como el trabajo necesario para trasladar la unidad de masa sometida a un campo gravitatorio creado por una masa M desde el infinito (donde el potencial es nulo) hasta dicho punto. Se representa con la letra V y se calcula de la siguiente manera:

$$\boxed{V = -G\frac{M}{r}} \quad (\text{J/kg})$$

El potencial gravitatorio tiene siempre un valor negativo, y está relacionado con la energía potencial gravitatoria de la siguiente manera:

$$\boxed{V = \frac{E_p}{m} \Rightarrow E_p = mV}$$



El potencial gravitatorio en un punto depende de la distancia r del punto al centro del campo. Por tanto, todos los puntos que equidistan del centro del campo estarán sometidos al mismo potencial y formarán una ***superficie equipotencial***. Las superficies equipotenciales del campo gravitatorio son esféricas y perpendiculares a las líneas de campo o de fuerza (ver dibujo a la derecha).

Por otra parte, el trabajo necesario para desplazar una masa m de un punto A a otro B en el seno de un campo gravitatorio creado por una masa M será:

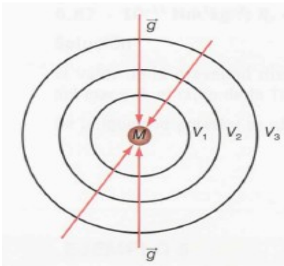
$$\boxed{W = -\Delta E_p = -(E_{pB} - E_{pA}) = -m\cdot(V_B - V_A) = -m\cdot\Delta V}$$

de donde se deduce que el trabajo necesario para desplazar una masa por una superficie equipotencial será nulo, pues en tal caso $\Delta V = 0$. Además, el movimiento de las partículas será espontáneo en el sentido de potenciales decrecientes, es decir, siempre que $V_A > V_B$, pues en tal caso $W > 0$. En caso contrario, hay que realizar trabajo contra las fuerzas del campo (o contra el campo) para conseguir que la masa se mueva ($W < 0$).

4.4.- RELACIÓN ENTRE CAMPO GRAVITATORIO Y POTENCIAL GRAVITATORIO.

Aunque el campo gravitatorio es vectorial y el potencial gravitatorio es escalar, existe una relación entre ambos. Para expresar esta relación se utiliza el concepto de gradiente, que es una derivada direccional. Así, observando el esquema de la derecha puede deducirse que el potencial gravitatorio va aumentando conforme nos alejamos de la masa que crea el campo; a esta variación la llamamos ***gradiente de potencial (grad V)***. Esta variación de potencial es máxima si seguimos las líneas de fuerza del campo gravitatorio, es decir, el camino más corto para pasar de una superficie equipotencial a la siguiente es siguiendo las líneas de fuerza (ver figura a la derecha). Sin embargo, el campo gravitatorio tiene sentido contrario al aumento de potencial, con lo cual la relación entre ambos campos será la siguiente:

$$\boxed{\vec{g} = -\vec{\text{grad}}\, V = -\frac{dV}{d\,\vec{r}}}$$



La relación anterior implica que el campo gravitatorio está dirigido en el sentido en que es máxima la disminución del potencial gravitatorio, o lo que es lo mismo, la fuerza gravitatoria apunta en el sentido en que disminuye la energía potencial gravitatoria. Este resultado está de acuerdo con lo comentado en el apartado anterior sobre el movimiento espontáneo de una masa dentro de un campo gravitatorio creado por otra.

4.5.- CAMPO GRAVITATORIO TERRESTRE: INTENSIDAD Y ENERGÍA POTENCIAL.

Como su propio nombre indica, el ***campo gravitatorio terrestre*** es el campo gravitatorio que la Tierra crea a su alrededor, o lo que es lo mismo, es la región del espacio en la que cualquier objeto de masa m siente una fuerza central, conservativa y de carácter atractivo dirigida hacia la Tierra.

Sabemos que este campo viene dado por una aceleración; la aceleración con que cualquier objeto se mueve al estar inmerso en el campo gravitatorio creado por la Tierra se llama ***aceleración de la gravedad***. La dirección de dicho campo es la de la línea que une el objeto con la Tierra, y su sentido va siempre dirigido hacia el centro de la misma. Así pues, el valor o intensidad del campo gravitatorio terrestre al que está sometido un objeto situado a una cierta altura h sobre la Tierra (cuya masa es M_T) será:

$$\boxed{g = G\frac{M_T}{r^2} = G\frac{M_T}{(R_T+h)^2}} \quad (\text{N/kg ó m/s}^2)$$

Si el objeto se encuentra muy cerca de la superficie terrestre ($h \approx 0$), sustituyendo los valores de G, de la masa de la Tierra ($5'98\cdot10^{24}$ kg) y del radio terrestre (6370 km), obtenemos $g = 9'81\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2}$, que es el valor de la aceleración de la gravedad utilizado en muchísimos problemas y situaciones físicas.

La ***energía potencial*** de una partícula de masa m que se encuentra a una cierta distancia r del centro de la Tierra se calculará de la siguiente manera:

$$\boxed{E_p = -\,G\,\frac{M_T\,m}{r} = -\,G\,\frac{M_T\,m}{R_T + h}} \quad (\text{J})$$

La energía potencial gravitatoria terrestre se calculaba en cursos anteriores mediante $E_p = mgh$; dicha expresión es una aproximación realizada cuando la altura a la que se encuentra el cuerpo sobre la superficie terrestre es mucho menor que el radio de la Tierra ($h << R_T$). Así, la variación de energía potencial de un cuerpo que se desplaza hasta una altura h desde la superficie de la Tierra será:

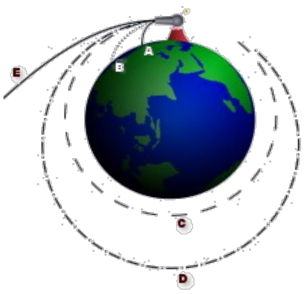
$$\Delta E_p = GM_T m \left(\frac{1}{R_T} - \frac{1}{R_T+h}\right) = GM_T m \frac{R_T+h-R_T}{R_T(R_T+h)} = \frac{GM_T m}{R_T^2} \frac{R_T^2 h}{R_T(R_T+h)} = mg \frac{R_T^2 h}{R_T(R_T+h)} = mg \frac{h}{1+\frac{h}{R_T}} \approx mgh$$

Donde hemos tenido en cuenta que si $h << R_T$, entonces $h/R_T \rightarrow 0$. Si consideramos que $E_p = 0$ en la superficie terrestre, entonces la energía potencial gravitatoria a pequeñas alturas sobre la Tierra será igual a mgh, expresión utilizada en cursos anteriores.

En la siguiente página web puedes consultar de forma interactiva los aspectos más importantes del campo gravitatorio:
http://recursostic.educacion.es/newton/web/materiales_didacticos/campo_gravitatorio/index.htm

Indicamos a continuación dos de las principales situaciones en que se emplea el concepto de campo gravitatorio terrestre: las velocidades de escape y orbital de los cohetes y satélites, respectivamente.

4.5.1.- VELOCIDAD DE ESCAPE.



Es la velocidad mínima con que hay que lanzar un cohete para que éste pueda "escapar" de la atracción terrestre (o de cualquier planeta en que se encuentre). Esta velocidad se le va comunicando progresivamente al satélite gracias a la energía obtenida por la combustión de ciertas sustancias. Si consideramos que no existen fuerzas no conservativas deberá conservarse la energía mecánica del cohete. La velocidad del cohete va disminuyendo conforme asciende; en el límite en que no esté sometido a la acción del campo gravitatorio del planeta ($r \rightarrow \infty$) su velocidad y su energía potencial gravitatoria también se anularán. Así pues, la conservación de la energía mecánica entre las posiciones 1 (distancia r respecto del centro del planeta) y 2 (distancia infinitamente lejana) nos lleva a lo siguiente:

$$\Delta E = 0 \quad \Rightarrow \quad E_2 - E_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad (\cancel{E_{c2}} + \cancel{E_{p2}}) - (E_{c1} + E_{p1}) = 0 \quad \Rightarrow \quad -\frac{1}{2}\cancel{m}v_e^2 + G\frac{M\cancel{m}}{r} = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{v_e = \sqrt{\frac{2GM}{r}}}$$

donde v_e es la velocidad de escape del cohete. Observar que dicha velocidad es independiente de la masa del cohete, y que disminuye cuanto mayor sea la altura sobre el planeta.

Si el cohete se encuentra en la superficie terrestre, será $r = R_T$; sustituyendo los valores de G, M_T y R_T antes mencionados, obtenemos:

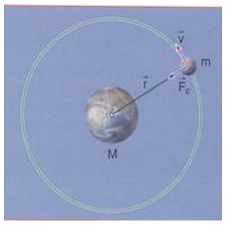
$$v_e = \sqrt{\frac{2GM_T}{R_T}} = 11'2 \cdot 10^3 \;\; m \cdot s^{-1}$$

Lanzar un cohete con una velocidad de salida tan grande supone un considerable consumo, casi instantáneo, de energía (tanto mayor cuanto mayor sea la masa del cohete), lo que supondría casi con seguridad su inmediata destrucción. Ésta es la razón del empleo de cohetes múltiples en los lanzamientos al espacio; estos cohetes van desprendiéndose conforme la nave se aleja de la Tierra.

NOTA: Si para realizar los cálculos anteriores hubiéramos tenido en cuenta la resistencia que ofrece la atmósfera al movimiento del cohete, la velocidad de lanzamiento hubiera debido ser, aproximadamente, de $11{,}43 \cdot 10^3$ $m \cdot s^{-1}$.

Página web acerca de la velocidad de escape:
http://recursostic.educacion.es/newton/web/materiales_didacticos/vescape/index.html

4.5.2.- MOVIMIENTO DE SATÉLITES. VELOCIDAD ORBITAL.



Consideremos un satélite de masa m que gira en una órbita circular de radio r alrededor de la Tierra, de masa M_T. Entonces, la fuerza centrípeta que lo mantiene en su trayectoria es "aportada" por la fuerza gravitatoria:

$$F_c = F_g \quad \Rightarrow \quad \cancel{m}\frac{v^2}{\cancel{r}} = G\frac{M_T \cancel{m}}{r^{\cancel{2}}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{v = \sqrt{\frac{GM_T}{r}}}$$

siendo v la velocidad orbital del satélite (*la cual es independiente de su masa*). Si dicha velocidad permanece constante, el satélite se moverá con m.c.u.; el período de dicho movimiento se calcula mediante:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi \cdot r}{v} = \frac{2\pi \cdot r}{\sqrt{\frac{GM}{r}}} = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{r^3}{GM}}$$

Elevando al cuadrado ambos miembros, obtenemos:

$$\boxed{T^2 = \frac{4\pi^2}{GM} \cdot r^3}$$

que es la expresión de la 3ª ley de Kepler. De dicha expresión se deduce que si la trayectoria del satélite es elíptica, entonces r variará, con lo cual la energía potencial gravitatoria también variará a lo largo de la trayectoria. Cuando r aumenta, la E_p también aumentará, con lo que la energía cinética disminuirá (pues se conserva la energía mecánica al actuar una fuerza conservativa sobre el satélite). Así pues, en el punto más alejado de la Tierra (apogeo), el satélite se moverá a menor velocidad; en el punto más cercano (perigeo) se moverá a una velocidad mayor.

Calcularemos, finalmente, la **<u>energía mecánica</u>** de un satélite de masa m. Ésta es la energía que debe tener dicho satélite para mantenerse en una órbita estacionaria a una cierta altura sobre la superficie terrestre. Si r es la distancia entre el satélite y el centro de la Tierra, y consideramos que la órbita es circular, tendremos que (ver más arriba):

$$v = \sqrt{\frac{GM}{r}} \quad \Rightarrow \quad E_c = \frac{1}{2} mv^2 = \frac{1}{2}\frac{GMm}{r}$$

Y sabiendo que $E_p = -\dfrac{GMm}{r}$, tendremos que la energía mecánica de un satélite en su órbita, será:

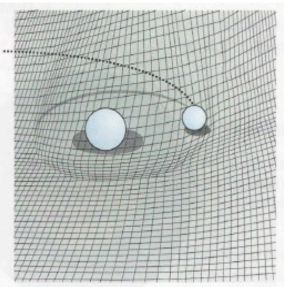
$$\boxed{E =} E_c + E_p = \frac{1}{2}\frac{GMm}{r} - \frac{GMm}{r} = -\frac{1}{2}\frac{GMm}{r} = \boxed{\frac{1}{2}\ E_p}$$

Vemos, pues, que la energía mecánica de un satélite es siempre constante y negativa. Ello se corresponde con órbitas cerradas, ya sean circulares o elípticas, que es el caso de todos los cuerpos del Sistema Solar, que son atraídos por él y que no pueden escapar de sus órbitas.

5.- AMPLIACIÓN: VISIÓN ACTUAL DEL UNIVERSO.

5.1.- ORIGEN Y EXPANSIÓN DEL UNIVERSO.

Los hitos históricos que han sucedido en la Física para explicar el origen y la expansión del universo son los siguientes:

1. Teoría de la gravitación universal de **Newton**.
2. Teoría de la relatividad general de **Einstein**, según la cual la gravedad es una característica del espacio que rodea una masa. Así, el espacio cambia de alguna manera, "se curva", debido a la presencia de una masa (ver dibujo a la derecha). Por ejemplo, la Tierra gira alrededor del Sol debido a la distorsión del espacio causada por la presencia de las masas de ambos cuerpos.
   
   Así pues, la relatividad general trata la gravitación como una curvatura del espacio-tiempo en cuatro dimensiones. La gravedad se explica como una propiedad geométrica del espacio distorsionado.
3. Hipótesis de **Gamow** según la cual el Universo se originó a partir de una gran explosión (Big Bang) ocurrida en un universo de dimensiones muy inferiores al átomo, con una gran densidad y una altísima temperatura (10^9 K); la energía cinética de las partículas elementales producidas en la explosión (electrones, neutrinos, fotones y algunos protones y neutrones) era tan alta que no podían unirse para formar estructuras más complejas. Al expandirse el Universo se fue enfriando, las partículas comenzaron a moverse más lentamente y la interacción fuerte pudo ya ligar protones y neutrones entre sí para formar núcleos. Al decrecer más la temperatura, la interacción electromagnética cobró importancia y empezaron a formarse los primeros átomos de hidrógeno y de helio (unas 2 horas después de la explosión). Conforme decrecía la temperatura, las partículas de hidrógeno y helio comenzaron a condensarse por efecto de la interacción gravitatoria, de modo que mediante procesos de fusión nuclear comenzaron a aparecer las primeras estrellas. La fuerza gravitacional prosiguió dando lugar a las galaxias.

5.2.- SEPARACIÓN DE GALAXIAS.

La ley de **Hubble** es una prueba de la expansión del Universo. Este ley establece que las galaxias se separan a una velocidad directamente proporcional a la distancia que las separa.

5.3.- LA MATERIA OSCURA.

Fue descubierta por el astrofísico suizo **Zwicky** en 1933 como consecuencia de sus observaciones sobre el movimiento de las galaxias. La materia oscura es materia no visible, es decir, materia que no interactúa con la radiación electromagnética. Este científico, al medir la velocidad de estrellas muy alejadas del centro de la galaxia, observó que era mucho mayor de la que deberían tener si la masa de la galaxia era la que correspondía a su parte visible. Como la velocidad aumenta con la masa del centro de atracción, concluyó que debía haber una masa, no visible, mucho mayor: la materia oscura.