TEMA 2.- Campo gravitatorio

CUESTIONES

11.- a) Una masa m se encuentra dentro del campo gravitatorio creado por otra masa M. Si se mueve espontáneamente desde un punto A hasta otro B, ¿cuál de los dos puntos tendrá un mayor potencial gravitatorio? ¿Cuál de los dos puntos estará más cerca de la masa M? Razone las respuestas.
b) Determine el valor del campo gravitatorio en un punto que se encuentra a una altura sobre la superficie de la Tierra igual al radio terrestre. Considere que g = 10 m·s^{-2} en la superficie de la Tierra.

a) Sabemos que la intensidad de campo gravitatorio y el potencial gravitatorio están relacionados de la siguiente forma:

$$\vec{E} = -\,\vec{\text{grad}}\;V = -\,\frac{dV}{d\vec{r}}$$

La expresión anterior nos indica que el campo está siempre dirigido en que es máxima la disminución de potencial. Por tanto, si la masa m se mueve *espontáneamente* de A a B, entonces se estará moviendo en la misma dirección y sentido que el campo gravitatorio, de modo que <u>el potencial gravitatorio en B será menor que en A</u>.
Por otra parte, sabemos que las líneas de fuerza del campo gravitatorio son radiales, nacen en el infinito y terminan en la partícula que crea el campo. Como el movimiento de la partícula es espontáneo, deducimos entonces que <u>B estará más cerca que A de la masa M</u>, pues la masa m se mueve siguiendo dichas líneas de fuerza o de campo. A la misma conclusión llegamos si consideramos que el potencial gravitatorio a una cierta distancia r de la masa M se calcula mediante:

$$V = -G\,\frac{M}{r}$$

Como $V_B < V_A$, entonces deberá ser $r_B < r_A$.

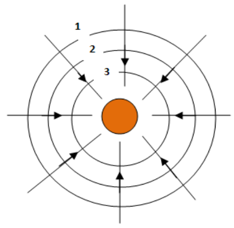
b) El campo gravitatorio a una altura $h = R_T$ sobre la superficie de la Tierra se calcula de la manera siguiente:

$$g = G\,\frac{M_T}{(R_T + h)^2} = \frac{G\,M_T}{(2R_T)^2} = \frac{1}{4}\,\frac{G\,M_T}{R_T^2} = \frac{1}{4}\cdot 10 = \boxed{2'5\;\;m\cdot s^{-2}}$$

12.- a) Explique qué son las líneas de fuerza y las superficies equipotenciales del campo gravitatorio terrestre. ¿Cómo están relacionadas entre sí?
b) Un planeta hipotético describe una órbita circular alrededor del Sol con un radio tres veces mayor que el de la órbita terrestre (supuesta también circular). ¿En cuántos años terrestres recorrería el planeta su órbita?

a) Las líneas de fuerza o de campo son líneas imaginarias que nos indican la dirección y sentido del (vector) campo gravitatorio terrestre; son radiales, comienzan en el infinito y terminan en la masa que crea el campo. Así pues, las líneas de fuerza nos indican la dirección y sentido del movimiento de una masa que se encuentra dentro del campo gravitatorio terrestre. Las superficies equipotenciales son los conjuntos de puntos que se encuentran al mismo potencial gravitatorio V:

$$V = -G\,\frac{M}{r}$$



Como el potencial varía según la distancia a la que nos encontremos de la masa que crea el campo, deducimos que las superficies equipotenciales del campo gravitatorio terrestre serán esferas concéntricas cuyo centro coincide con el centro de la Tierra.
Por último, las líneas de fuerza y las superficies equipotenciales son perpendiculares entre sí, tal y como se indica en la figura de la derecha.

b) Nos piden calcular el periodo del planeta sabiendo que su radio orbital es 3 veces mayor que el terrestre; la 3ª ley de Kepler relaciona el periodo de un planeta con el radio de su órbita (supuesta ésta circular):

$$T^2 = k\cdot r^3$$

Así pues, para el caso de la Tierra la ecuación anterior quedaría de la manera siguiente:

$$T_T^2 = k\cdot r_T^3$$

donde T_T es el periodo de la Tierra (1 año) y r_T es el radio orbital de la Tierra (distancia entre los centros de la Tierra y el Sol). Análogamente, para el planeta la 3ª ley de Kepler quedaría:

$$T_P^2 = k\cdot r_P^3$$

Dividiendo miembro a miembro simplificamos la constante k:

$$\frac{T_T^2}{T_P^2} = \frac{\cancel{k}\cdot r_T^3}{\cancel{k}\cdot r_P^3} \Rightarrow T_P = T_T\sqrt{\left(\frac{r_P}{r_T}\right)^3} = T_T\sqrt{\left(\frac{3\,\cancel{r_T}}{\cancel{r_T}}\right)^3} = \sqrt{27}\cdot T_T = \boxed{5'2\ \text{años}}$$

13.- a) Imagine que, por alguna causa interna, la Tierra redujese su radio a la mitad manteniendo inalterable su masa. ¿Cuál sería la intensidad del campo gravitatorio terrestre en su nueva superficie?
b) ¿A qué altura sobre la superficie terrestre la gravedad es igual a la mitad de su valor en ella? Considere que el radio terrestre es de 6370 km.

a) El campo gravitatorio en la superficie terrestre, suponiendo que su radio se ha reducido a la mitad y que su masa no ha cambiado, vendrá dado por:

$$g = G\,\frac{M_T}{(R_T/2)^2} = 4\,\frac{G\,M_T}{R_T^2} = 4\,g$$

Así pues, <u>el nuevo campo gravitatorio tendrá una intensidad 4 veces mayor</u>; ello se debe a la mayor cercanía entre la superficie de la Tierra y su centro.

b) El campo gravitatorio a una cierta altura h sobre la superficie de la Tierra viene dado por:

$$g = G\,\frac{M_T}{(R_T+h)^2} \Rightarrow \frac{\cancel{g}}{2} = \frac{G\,M_T}{(R_T+h)^2}\cdot\frac{R_T^2}{R_T^2} = \frac{\cancel{g}\,R_T^2}{(R_T+h)^2} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{R_T^2}{(R_T+h)^2}$$

Tomando la raíz cuadrada en ambos miembros, nos queda:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{R_T}{R_T + h} \Rightarrow h = \left(\sqrt{2} - 1\right) R_T = \boxed{2638'54 \ \ \text{km}}$$

14.- a) Una masa m se mueve dentro del campo gravitatorio que crea otra masa M, alejándose de ella. ¿Aumenta o disminuye su energía potencial gravitatoria? ¿A qué es igual dicha variación de energía potencial? ¿Aumenta o disminuye el valor del campo gravitatorio? Justifique las respuestas.
b) La velocidad orbital de Mercurio alrededor del Sol vale 47´87 km·s^{-1}, mientras que la velocidad orbital de la Tierra es de 29´78 km·s^{-1}. Determinar cómo están relacionados sus radios orbitales (o distancias de ambos planetas al Sol).

a) La fuerza gravitatoria es atractiva; por tanto, el movimiento de la masa m no es espontáneo, de manera que su energía potencial gravitatoria aumentará. La variación (negativa) o disminución de dicha energía potencial es igual al trabajo necesario que hay que realizar contra el campo gravitatorio para desplazar la masa m. Por último, conforme nos alejamos de la masa M la intensidad del campo gravitatorio disminuye, pues es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia.

b) El periodo de un planeta y su radio orbital están relacionados mediante la 3ª ley de Kepler:

$$T^2 = k \cdot r^3 \ \ \Rightarrow \left(\frac{2\pi r}{v}\right)^2 = k\, r^3 \Rightarrow \frac{4\pi^2 \cancel{r^2}}{v^2} = k\, \cancel{r}^3 \Rightarrow r = \frac{4\pi^2}{k\, v^2}$$

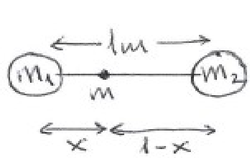
Para determinar la relación entre los radios orbitales de Mercurio y de la Tierra hallamos su cociente:

$$\boxed{\frac{r_T}{r_M}} = \frac{\dfrac{\cancel{4\pi^2}}{\cancel{k}\, v_T^2}}{\dfrac{\cancel{4\pi^2}}{\cancel{k}\, v_M^2}} = \frac{v_M^2}{v_T^2} = \frac{47870^2}{29780^2} = \boxed{2'58}$$

Así pues, el radio orbital de la Tierra es 2´58 veces mayor que el radio orbital de Mercurio.

15.- a) Dos masas, una cuádruple que la otra, están separadas 1 m. ¿En qué punto, a lo largo de la recta que las une, se encontraría en equilibrio una tercera masa de 1000 kg?
b) Mientras un planeta recorre su órbita elíptica alrededor del Sol, ¿se desplaza siempre a la misma velocidad? ¿Qué trabajo realiza la fuerza de atracción gravitatoria a lo largo de una órbita completa? Razone las respuestas.

a) Para que la masa m = 1000 kg se encuentre en equilibrio deberá cumplirse que:



$$\sum \vec{F} = 0 \Rightarrow \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = 0 \Rightarrow F_1 = F_2$$

donde F_1 y F_2 son los valores de las fuerzas de atracción gravitatoria entre la masa m y las masas m_1 y m_2 (ver figura). Ahora bien, la condición anterior sólo puede cumplirse en un punto intermedio entre ambas masas, pues a la izquierda de m_1 y a la derecha de m_2 las fuerzas (atractivas) gravitatorias tienen el mismo sentido, con lo que no podrán anularse; así pues:

$$F_1 = F_2 \Rightarrow \cancel{m}\, g_1 = \cancel{m}\, g_2$$

donde g_1 y g_2 son los campos gravitatorios que, respectivamente, crean las masas m_1 y m_2 ($m_2 = 4m_1$) en el punto donde se encuentra la masa de 1000 kg. Sustituyendo, nos queda:

$$\cancel{G}\frac{m_1}{x^2} = \cancel{G}\frac{m_2}{(1-x)^2} \Rightarrow \frac{\cancel{m_1}}{x^2} = \frac{4\cancel{m_1}}{(1-x)^2}$$

Tomando la raíz cuadrada en ambos miembros, nos queda:

$$\frac{1}{x} = \frac{2}{1-x} \Rightarrow \boxed{x = 0'33 \ \ m}$$

Así pues, la masa de 1000 kg se encontraría en equilibrio a 0´33 m de la masa m_1.

b) No. De acuerdo con la 2ª ley de Kepler, el vector posición del planeta barre áreas iguales en intervalos de tiempo iguales (la velocidad areolar permanece constante). Ello significa que la velocidad del planeta será mayor en el perihelio (punto más cercano al Sol) que en el afelio (punto más lejano).
Por otra parte, al ser la fuerza gravitatoria una fuerza conservativa, el trabajo que ésta realiza cuando un planeta describe una trayectoria completa será nulo, pues en tal caso coinciden las posiciones inicial y final del planeta (recordemos que una fuerza es conservativa cuando el trabajo que realiza al desplazar un objeto no depende de la trayectoria del mismo, sino de las posiciones inicial y final).

PROBLEMAS

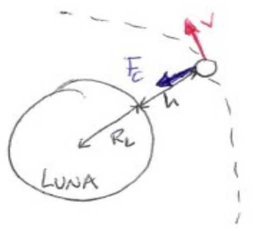
16.- La nave espacial *Lunar Prospector* permanece en órbita circular alrededor de la Luna a una altura de 100 km sobre su superficie. Determine:

a) La velocidad de la nave y el período de su movimiento.

b) La velocidad de escape a la atracción lunar desde esa órbita.

$M_L = 7'36 \cdot 10^{22}$ kg; $R_L = 1470$ km; $G = 6'67 \cdot 10^{-11}$ N·m²·kg⁻²

a) Para determinar la velocidad (orbital) de la nave tendremos en cuenta que la fuerza centrípeta que la mantiene en su órbita es "ejercida" por la fuerza de atracción gravitatoria entre ella y la Luna:

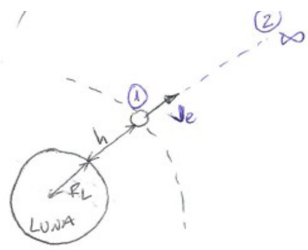


$$F_c = F_g \Rightarrow \cancel{m}\frac{v^2}{\cancel{r}} = G\frac{M_L \cancel{m}}{r^{\cancel{2}}} \Rightarrow v = \sqrt{\frac{G\,M_L}{r}} = \sqrt{\frac{6'67 \cdot 10^{-11} \cdot 7'36 \cdot 10^{22}}{1470000 + 100000}} = \boxed{1768'28 \ \ m \cdot s^{-1}}$$

Para hallar el periodo de la nave tendremos en cuenta que su movimiento es circular uniforme; así pues:

$$\left.\begin{array}{l} T = \dfrac{2\pi}{\omega} \\ \\ v = \omega\, r \Rightarrow \omega = \dfrac{v}{r} \end{array}\right| \Rightarrow T = \frac{2\pi\, r}{v} = \frac{2\pi(1470000 + 100000)}{1768'28} = \boxed{5578'64 \ \ s = 1'55 \ \ h}$$

b) La velocidad de escape a la atracción lunar es la velocidad necesaria que hay que imprimir a la nave para que escape del campo gravitatorio lunar (en el infinito); para hallarla aplicamos la ley de conservación de la energía mecánica, teniendo en



cuenta que no existen fuerzas no conservativas (rozamiento) y que dicha velocidad va disminuyendo conforme la nave se aleja de la Luna:

$$\Delta E = 0 \Rightarrow E_2 - E_1 = 0 \Rightarrow (E_{c2} + E_{p2}) - (E_{c1} + E_{p1}) = 0 \Rightarrow -\frac{1}{2}\cancel{m}\, v_e^2 + \frac{G M_L \cancel{m}}{r} = 0 \Rightarrow v_e = \sqrt{\frac{2 G M_L}{r}}$$

Sustituyendo, nos queda $\boxed{v_e = 2500'73\ m \cdot s^{-1}}$.

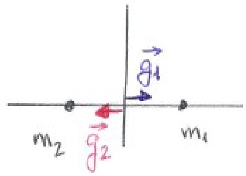
17.- Considere dos masas puntuales m_1 = 3 kg y m_2 = 6 kg situadas, respectivamente, en los puntos (3, 0) m y (-3, 0) m.

a) Calcule el campo gravitatorio en el origen de coordenadas.

b) ¿Qué trabajo hay que realizar para trasladar una masa m = 3 kg desde el punto (0, -4) m hasta el origen de coordenadas? Interprete el signo del resultado obtenido.

$G = 6'67 \cdot 10^{-11}\ N \cdot m^2 \cdot kg^{-2}$

a) De acuerdo con el principio de superposición, el campo gravitatorio total en el origen de coordenadas es la suma (vectorial) de los campos gravitatorios creados por cada masa por separado:



$$\vec{g} = \vec{g}_1 + \vec{g}_2$$

El valor del campo gravitatorio creado por m_1 se calcula mediante:

$$g_1 = G\frac{m_1}{r_1^2} = 6'67 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{3}{3^2} = 2'22 \cdot 10^{-11}\ \ N \cdot kg^{-1}$$

donde r_1 = 3 m es la distancia entre m_1 y el origen de coordenadas.

De acuerdo con la figura, el vector campo gravitatorio creado por la masa m_1 será:

$$\vec{g}_1 = 2'22 \cdot 10^{-11}\ \vec{i}\ \ N \cdot kg^{-1}$$

El valor del campo gravitatorio creado por m_2 se calcula mediante:

$$g_2 = G\frac{m_2}{r_2^2} = 6'67 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{6}{3^2} = 4'45 \cdot 10^{-11}\ \ N \cdot kg^{-1}$$

donde r_2 = 3 m es la distancia entre m_2 y el origen de coordenadas.

De acuerdo con la figura, el vector campo gravitatorio creado por la masa m_2 será:

$$\vec{g}_2 = -\ 4'45 \cdot 10^{-11}\ \vec{i}\ \ N \cdot kg^{-1}$$

El campo gravitatorio total será:

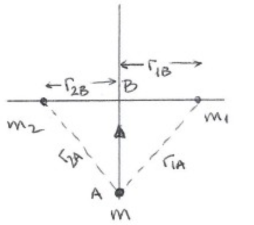
$$\boxed{\vec{g} = \vec{g}_1 + \vec{g}_2 = -\ 2'23 \cdot 10^{-11}\ \vec{i}\ \ N \cdot kg^{-1}}$$ (dirigido en el sentido negativo del eje X)

b) El trabajo necesario para trasladar la masa m del punto A (0, -4) hasta el punto B (0, 0) viene dado por:

$$W = -\ \Delta E_p = -\ (E_{pB} - E_{pA}) = -\ (mV_B - mV_A) = -\ m\ (V_B - V_A)$$

Para hallar el potencial gravitatorio en los puntos A y B volvemos a aplicar el principio de superposición; así, el potencial gravitatorio (total) en el punto A es generado por m_1 y m_2:

$$V_A = -G\frac{m_1}{r_{1A}} - G\frac{m_2}{r_{2A}} = -6'67\cdot 10^{-11}\cdot\frac{3}{5} - 6'67\cdot 10^{-11}\cdot\frac{6}{5} = -\ 1'2\cdot 10^{-10}\ \ J/kg$$



donde r_{1A} = 5 m es la distancia entre la masa m_1 y el punto A, y r_{2A} = 5 m es la distancia entre m_2 y el punto A (ver figura a la derecha).

El potencial gravitatorio (total) en el punto B será:

$$V_B = -G\frac{m_1}{r_{1B}} - G\frac{m_2}{r_{2B}} = -6'67\cdot 10^{-11}\cdot\frac{3}{3} - 6'67\cdot 10^{-11}\cdot\frac{6}{3} = -\ 2\cdot 10^{-10}\ \ J/kg$$

donde r_{1B} = 3 m es la distancia entre la masa m_1 y el punto B, y r_{2B} = 3 m es la distancia entre m_2 y el punto B.

Sustituyendo en la expresión del trabajo, nos queda:

$$W = -\ 3\cdot(-2\cdot 10^{-10} + 1'2\cdot 10^{-10}) = \boxed{2'4\cdot 10^{-10}\ J}$$

El signo positivo del trabajo nos indica que el movimiento de la masa m desde A hacia B es espontáneo (observar que la masa se mueve de mayor a menor potencial).

18.- La masa del Sol es 324440 veces mayor que la de la Tierra, y su radio, 108 veces mayor que el terrestre.

a) ¿Cuántas veces es mayor el peso de un cuerpo en la superficie del Sol que en la de la Tierra?

b) ¿Cuál sería la altura máxima alcanzada por un proyectil que se lanzase verticalmente hacia arriba, desde la superficie solar, con una velocidad de 20 m·s^{-1}?

g = 10 m·s^{-2}

a) Para saber cómo están relacionados los pesos del cuerpo en las superficies del Sol y de la Tierra debemos calcular el cociente entre ambos:

$$\frac{P_S}{P_T} = \frac{\cancel{m}g_S}{\cancel{m}g_T} = \frac{\dfrac{\cancel{G}M_S}{R_s^2}}{\dfrac{\cancel{G}M_T}{R_T^2}} = \frac{\dfrac{324440\,\cancel{M_T}}{108^2\cdot \cancel{R_T^2}}}{\dfrac{\cancel{M_T}}{\cancel{R_T^2}}} = 27'82$$

Por tanto, el peso de un cuerpo en la superficie solar es 27´82 veces mayor que su peso en la superficie terrestre.

b) Como la velocidad de lanzamiento del objeto es pequeña, podemos utilizar la expresión mgh para la energía potencial gravitatoria; considerando que no existe rozamiento, se conservará la energía mecánica:

$$\Delta E = 0 \Rightarrow E_2 - E_1 = 0 \Rightarrow (\cancel{E_{c2}} + E_{p2}) - (E_{c1} + \cancel{E_{p1}}) = 0 \Rightarrow mg_S h - \frac{1}{2}mv^2 = 0 \Rightarrow h = \frac{v^2}{2g_S}$$

Ahora bien, el campo gravitatorio (o gravedad) en la superficie del Sol será:

$$g_S = G\,\frac{M_S}{R_S^2} = G\,\frac{324440\,M_T}{108^2\cdot R_T^2} = \frac{324440}{108^2}\cdot g = 278'16\ \ m\cdot s^{-2}$$

Sustituyendo, nos queda:

$$h = \frac{v^2}{2g_S} = \frac{20^2}{2\cdot 278'16} = \boxed{0'72\ \ m}$$

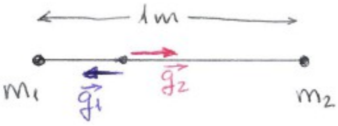
19.- Dos masas puntuales m_1 = 1 kg y m_2 = 2 kg están separadas 1 m.

a) ¿A qué distancia de m_1, en un punto situado entre m_1 y m_2, se anula el campo gravitatorio total creado por ambas masas?

b) Calcule el trabajo necesario para trasladar una masa m = 3 kg desde el infinito hasta el punto medio entre ambas masas. Interprete el signo del resultado obtenido.

G = 6´67·10^{-11} N·m^2·kg^{-2}

a) De acuerdo con la figura, el campo gravitatorio total sólo puede anularse en un punto situado entre las dos masas, pues en tal caso los campos que crean m_1 y m_2 tienen la misma dirección y sentido contrario; de acuerdo con el principio de superposición, deberá cumplirse que:



$$\vec{g} = \vec{g}_1 + \vec{g}_2 = 0 \Rightarrow g_1 = g_2$$

Sustituyendo las expresiones de g_1 y g_2 e igualando, nos queda:

$$\cancel{G}\,\frac{m_1}{x^2} = \cancel{G}\,\frac{m_2}{(1-x)^2} \Rightarrow \frac{1}{x^2} = \frac{2}{(1-x)^2}$$

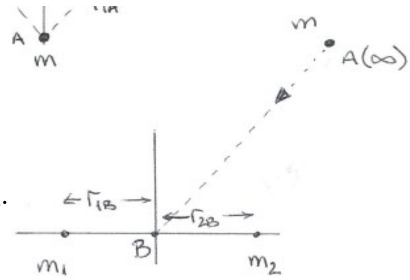
Tomando la raíz cuadrada en ambos miembros, nos queda:

$$\frac{1}{x} = \frac{\sqrt{2}}{1-x} \Rightarrow x = \frac{1}{1+\sqrt{2}} = \boxed{0'41\ \ m}$$

b) El trabajo necesario para trasladar desde el infinito (punto A) hasta el punto B(0, 0) m una masa m = 3 kg se calcula de la manera siguiente:

$$W = -\,\Delta E_p = -\,(E_{pB} - E_{pA}) = -\,(mV_B - mV_A) = -\,m\,(V_B - V_A)$$

Para hallar el potencial gravitatorio en los puntos A y B volvemos a aplicar el principio de superposición; así, el potencial gravitatorio (total) en el punto A será:



$$V_A = -G\,\frac{m_1}{r_{1A}} - G\,\frac{m_2}{r_{2A}} = 0$$

puesto que el punto A se encuentra a una distancia muy grande de m_1 y de m_2.

El potencial gravitatorio (total) en el punto B será:

$$V_B = -G\,\frac{m_1}{r_{1B}} - G\,\frac{m_2}{r_{2B}} = -6'67\cdot 10^{-11}\cdot\frac{1}{0'5} - 6'67\cdot 10^{-11}\cdot\frac{2}{0'5} = -\,4\cdot 10^{-10}\ \ J/kg$$

donde r_{1B} = 0´5 m es la distancia entre la masa m_1 y el punto B, y r_{2B} = 0´5 m es la distancia entre m_2 y el punto B.

Sustituyendo en la expresión del trabajo, nos queda:

$$W = -3\cdot(-4\cdot10^{-10}) = \boxed{1´2\cdot10^{-9}\ J}$$

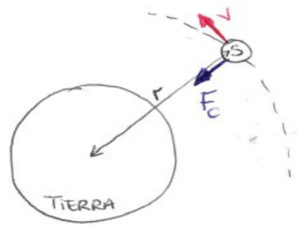
El signo positivo del trabajo nos indica que el movimiento de la masa m desde A hacia B es espontáneo (la masa se mueve de mayor a menor potencial).

20.- Un satélite artificial de 400 kg gira en una órbita circular a una altura h sobre la superficie terrestre. A dicha altura el valor de la gravedad es la tercera parte del valor en la superficie de la Tierra.

a) Explique si hay que realizar trabajo para mantener el satélite en órbita y calcule su energía mecánica.

b) Determine el período de la órbita.

$g = 10\ m\cdot s^{-2}$; $R_T = 6´4\cdot10^6$ m



a) La fuerza que mantiene al satélite en su órbita es la fuerza centrípeta, la cual existe gracias a la atracción gravitatoria entre la Tierra y el satélite. Dicha fuerza es perpendicular al sentido del movimiento del satélite (observar el dibujo a la derecha), por lo que el trabajo realizado por la misma será:

$$W = F_C\cdot\Delta r\cdot\cos\alpha = F_C\cdot\Delta r\cdot\cos 90º = 0$$

Así pues, no hay que realizar trabajo para mantener al satélite en su órbita (la cual se trata, al ser circular, de una superficie equipotencial). Recordar, además, que durante su trayectoria el satélite está permanentemente cayendo sobre la Tierra.

La energía mecánica del satélite en su órbita se calcula de la manera siguiente:

$$E = E_c + E_p = \frac{1}{2}m v^2 - G\frac{M_T m}{r}$$

Ahora bien, hemos dicho que la fuerza centrípeta que mantiene al satélite en su órbita es "ejercida" por la fuerza de atracción gravitatoria entre él y la Tierra:

$$F_c = F_g \Rightarrow \cancel{m}\frac{v^2}{\cancel{r}} = G\frac{M_T \cancel{m}}{r^{\cancel{2}}} \Rightarrow v^2 = \frac{G M_T}{r}$$

Sustituyendo en la expresión anterior, nos queda:

$$E = \frac{1}{2}\frac{G M_T m}{r} - \frac{G M_T m}{r} = -\frac{1}{2}\frac{G M_T m}{r}\cdot\frac{R_T^2}{R_T^2} = -\frac{1}{2}mg\frac{R_T^2}{r} = -\frac{1}{2}\cdot400\cdot10\cdot\frac{(6´4\cdot10^6)^2}{6´4\cdot10^6 + h}$$

Para calcular h tendremos en cuenta que a la altura a la que se encuentra la gravedad es igual a la tercera parte de su valor en la superficie terrestre:

$$g = G\frac{M_T}{(R_T+h)^2} \Rightarrow \frac{g}{3} = \frac{G M_T}{(R_T+h)^2}\cdot\frac{R_T^2}{R_T^2} = \frac{g R_T^2}{(R_T+h)^2} \Rightarrow \frac{1}{3} = \frac{R_T^2}{(R_T+h)^2}$$

Tomando la raíz cuadrada en ambos miembros, nos queda:

$$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{R_T}{R_T + h} \Rightarrow h = \left(\sqrt{3} - 1\right) R_T = 4'685 \cdot 10^6 \text{ m}$$

Sustituyendo en la expresión de la energía mecánica, obtenemos:

$$E = -\frac{1}{2} \cdot 400 \cdot 10 \cdot \frac{\left(6'4 \cdot 10^6\right)^2}{6'4 \cdot 10^6 + 4'685 \cdot 10^6} = \boxed{-7'39 \cdot 10^9 \text{ J}}$$

b) Para calcular el periodo de la órbita tendremos en cuenta que su movimiento es circular uniforme; así pues:

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

$$v = \omega r \Rightarrow \omega = \frac{v}{r}$$

$$\Rightarrow T = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi r}{\sqrt{\frac{G M_T}{r}}} = 2\pi \sqrt{\frac{r^3}{G M_T}} = 2\pi \sqrt{\frac{\left(R_T + h\right)^3}{G M_T} \cdot \frac{R_T^2}{R_T^2}} = 2\pi \sqrt{\frac{\left(R_T + h\right)^3}{g \cdot R_T^2}}$$

Sustituyendo, nos queda:

$$\boxed{T = 11'46 \cdot 10^3 \text{ s} = 3'18 \text{ horas}}$$