FORMULARIO CAMPO GRAVITATORIO

LEY DE LA GRAVITACIÓN UNIVERSAL.- dos masas se atraen con una fuerza que es proporcional al producto de las masas e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia que las separa, estando la fuerza dirigida en la dirección de la línea que une ambas masas, matemáticamente:

$$\vec{F} = -G\frac{Mm}{r^2}\hat{r} = -G\frac{Mm}{r^3}\vec{r}$$

Donde G es la constante de gravitación universal que tiene un valor de $6{,}67\cdot10^{-11}$ Nm^2Kg^{-2}.

Si tenemos que calcular la fuerza que se ejerce sobre una masa por parte de un conjunto de masas puntuales, tenemos que aplicar el principio de superposición, según el cual, la fuerza total sobre una masa es la suma de las fuerzas que ejercen cada una de las masas por separado:

$$\vec{F}_{TOT} = \sum_{i=1}^{N}\vec{F}_i$$

CAMPO GRAVITATORIO.- el campo se define como la fuerza por unidad de masa, es decir:

$$\vec{g} = \frac{\vec{F}}{m}$$

Por lo tanto, el valor del peso de un cuerpo en un punto será igual al producto de la masa de ese cuerpo por la aceleración de la gravedad (o campo gravitatorio) en ese punto.

Usando la expresión dada para la fuerza, el campo gravitatorio creado en un punto por una masa puntual, viene dado por:

$$\vec{g} = -G\frac{M}{r^2}\hat{r} = -G\frac{M}{r^3}\vec{r}$$

Para una distribución discreta de masas, también es aplicable el principio de superposición, según el cual el campo gravitatorio en un punto es la suma de los campos creados por cada masa por separado:

$$\vec{g}_{TOT} = \sum_{i=1}^{N}\vec{g}_i$$

Para el cálculo del campo gravitatorio creado por una distribución continua de masa, usaremos el teorema de Gauss, según el cual:

$$\oint_S \vec{g}\,d\vec{S} = -4\pi GM$$

POTENCIAL GRAVITATORIO.- El campo gravitatorio es conservativo, por lo que podemos decir que esto tiene tres implicaciones fundamentales:

- La circulación del campo a lo largo de una trayectoria no depende del camino, si no, de los puntos inicial y final
- La circulación del campo a lo largo de una trayectoria cerrada es nulo
- El campo gravitatorio proviene de un potencial de la forma:

$$\vec{g} = -\nabla V(\vec{r})$$

Además, por ser una fuerza central, y conservativa, se conserva el momento angular de los cuerpos que se mueven debido a la gravitación y la energía, no pasa lo mismo con el momento lineal, que si que varía a lo largo de una trayectoria orbital.

Así, la expresión para el potencial gravitatorio, queda como sigue:

$$V = -G\frac{M}{r}$$

En cuanto al potencial gravitatorio creado por una distribución discreta de masas, también es aplicable el principio de superposición, según el cual, el potencial total es la suma de los potenciales individuales creados por cada partícula.

$$\boxed{V_{TOT} = \sum_{i=1}^{N} V_i}$$

ENERGÍA POTENCIAL GRAVITATORIA.- Al igual que el campo es conservativo, la fuerza también es conservativa, por lo que, la fuerza también proviene de un campo escalar que le vamos a llamar energía potencial gravitatoria, su expresión viene dada por:

$$\boxed{U = -G\frac{Mm}{r}}$$

La energía total de una masa que se encuentra inmersa en una distribución discreta de masas vendrá dada por el principio de superposición, según el cual la energía total es la suma de las energías debidas a cada partícula por separado. También tenemos que tener en cuenta que una distribución de masas, puede tener asociada una energía potencial que tiene el significado del trabajo necesario para traer, desde el infinito la distribución hasta la posición en la que se encuentra, esta expresión de la energía asociada la una distribución viene dada por:

$$\boxed{U_{TOT} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\sum_{i\neq j}^{N} -G\frac{m_i m_j}{\left|\vec{r}_i - \vec{r}_j\right|}}$$

VELOCIDAD ORBITAL DE UN SATÉLITE.- la velocidad orbital de un cuerpo orbitando alrededor de otro, igualando el módulo de la fuerza gravitatoria al módulo de la fuerza centrípeta:

$$G\frac{Mm}{r^2} = m\frac{v^2}{r} \Rightarrow \boxed{v = \sqrt{G\frac{M}{r}}}$$

Que representaría la velocidad orbital.

Donde M representa la masa del cuerpo central y r la distancia entre los centros de dicho cuerpo central y el cuerpo que orbita alrededor de él.

VELOCIDAD DE ESCAPE.- velocidad que le hay que comunicar a un cuerpo para que este pueda escapar de la atracción terrestre, aplicando el principio de conservación de la energía, podemos escribir:

$$-G\frac{Mm}{R} + \frac{1}{2}mv^2 = 0 \Rightarrow \boxed{v = \sqrt{\frac{2Gm}{R}}}$$

ENERGÍA DE CAMBIO DE ÓRBITA.- la energía que sería necesario comunicar a un satélite para cambiarlo de órbita, aplicando el principio de conservación de la energía obtenemos:

$$\boxed{E = \frac{GMm}{2}\left[\frac{1}{R} - \frac{1}{R'}\right]}$$

ENERGÍA DE UN SATÉLITE EN UNA ÓRBITA. La energía mecánica de un satélite en una órbita es igual a la suma de su energía cinética más su energí a potencial:

$$E = E_c + E_p = \frac{1}{2}mv^2 - G\frac{Mm}{r}$$

La velocidad orbital de un satélite en una determinada órbita viene dada por:

$$G\frac{Mm}{r^2} = m\frac{v^2}{r} \Rightarrow \boxed{v = \sqrt{G\frac{M}{r}}}$$

Sustituyendo la velocidad en la expresión de la energía, tenemos que la energía total vendrá dada por:

$$E = E_c + E_p = \frac{1}{2}mv^2 - G\frac{Mm}{r} \Rightarrow E = \frac{1}{2}m\left(\sqrt{G\frac{M}{r}}\right)^2 - G\frac{Mm}{r}$$

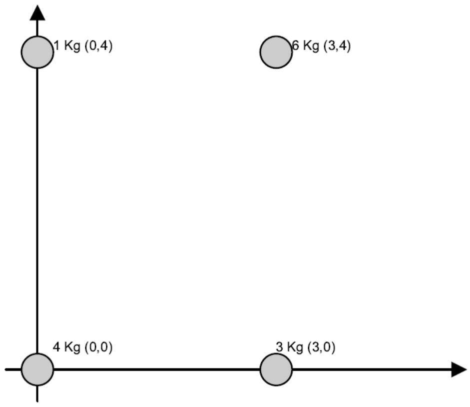
$$\boxed{E = G\frac{Mm}{2r} - G\frac{Mm}{r} = -G\frac{Mm}{2r}}$$

De tal manera que se demuestra que la energía total de un satélite en una órbita es igual a la mitad de la energía potencial en la misma.

PROBLEMAS DE CAMPO GRAVITATORIO.

Problema 1.- **Tenemos una masa de 4 kg situada en el origen de coordenadas, otra masa de 3 kg, se situa en el punto (3,0) y otra masa de 1 kg se situa en el punto (0,4), si las coordenadas están expresadas en metros, determina la fuerza ejercida sobre una partícula de 6 kg situada en el punto (3,4).**

El esquema que tenemos del problema es el siguiente:



Aplicando el principio de superposición según el cual, la fuerza total que sufre una masa viene dada por la suma de las fuerzas que ejercen cada una de las masas por separado, la fuerza total que actúa sobre la masa de 6 kg será la suma de las fuerzas que ejercen las otras tres:

$$\vec{F}_{tot}=\sum_{i=1}^{N}\vec{F}_i$$

Calcularemos por separado cada una de las fuerzas que actúan sobre la masa de 6 kg, le llamaremos masa 1 a la que está en el origen de coordenadas, 2 a la que está en el punto (3,0) y 3 a la que está en el punto (0,4):

$$\vec{F}_1=-G\frac{mm'}{r^3}\vec{r}\Rightarrow\begin{cases}\vec{r}=(3,4)-(0,0)=(3,4)\\ |\vec{r}|=\sqrt{3^2+4^2}=5\end{cases}\Rightarrow\vec{F}_1=-6,67\cdot10^{-11}\frac{4\cdot6}{5^3}(3,4)$$

$$\vec{F}_1=-3,84\cdot10^{-11}\hat{i}-5.12\cdot10^{-11}\hat{j}\ \mathrm{N}$$

$$\vec{F}_2=-G\frac{mm'}{r^3}\vec{r}\Rightarrow\begin{cases}\vec{r}=(3,4)-(3,0)=(0,4)\\ |\vec{r}|=\sqrt{0^2+4^2}=4\end{cases}\Rightarrow\vec{F}_2=-6,67\cdot10^{-11}\frac{3\cdot6}{4^3}(3,4)$$

$$\vec{F}_2=-5,63\cdot10^{-11}\hat{i}-4,22\cdot10^{-11}\hat{j}\ \mathrm{N}$$

$$\vec{F}_3=-G\frac{mm'}{r^3}\vec{r}\Rightarrow\begin{cases}\vec{r}=(3,4)-(0,4)=(3,0)\\ |\vec{r}|=\sqrt{3^2+0^2}=3\end{cases}\Rightarrow\vec{F}_3=-6,67\cdot10^{-11}\frac{1\cdot6}{3^3}(3,4)$$

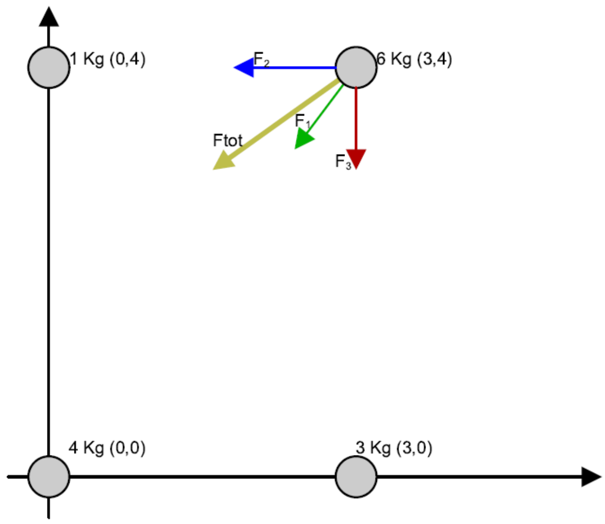
$$\vec{F}_3=-4,45\cdot10^{-11}\hat{i}-5,93\cdot10^{-11}\hat{j}\ \mathrm{N}$$

La fuerza total será la suma de las fuerzas que ejercen cada una de las masas por separado:

$$\vec{F}_{tot}=\sum_{i=1}^{N}\vec{F}_i=\left(-3,84\cdot10^{-11}\hat{i}-5.12\cdot10^{-11}\hat{j}\right)+\left(-5,63\cdot10^{-11}\hat{i}-4,22\cdot10^{11}\hat{j}\right)+\left(-4,45\cdot10^{11}\hat{i}-5,93\cdot10^{11}\hat{j}\right)$$

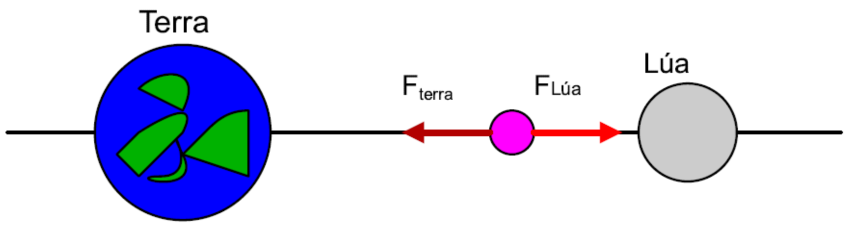
$$\vec{F}_{tot}=-1,39\cdot10^{-10}\hat{i}-1,53\cdot10^{-10}\hat{j}\ \mathrm{N}$$

Que es la fuerza total que actúa sobre la masa. Graficamente:



Problema 2.- **Determina el punto en el que podemos situar una masa m sobre la línea que une la Tierra y la Luna para que la fuerza gravitatoria que actúa sobre dicha masa sea nula, ignorando la interacción gravitatoria del Sol y del resto de los planetas**.

Tenemos que situar una partícula en un lugar entre la Luna y la Tierra, de tal manera que la fuerza total que actúa sobre esa partícula debida a la interacción gravitatoria con la Luna y con la Tierra sea nula, la situación que tenemos, gráficamente, es la siguiente:



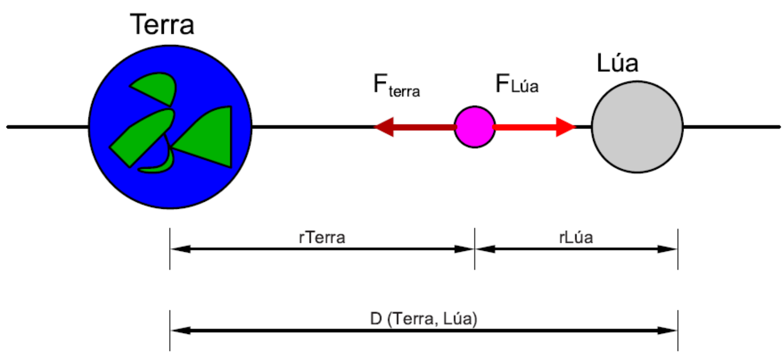
Para que la fuerza que actúa sobre la masa sea nula, el módulo de la fuerza gravitatoria ejercida por la tierra tiene que ser igual al módulo de la fuerza gravitatoria que ejerce la Luna sobre la partícula.

$$G\frac{M_{Terra}m'}{r_{Terra}^2} = G\frac{M_{Lúa}m'}{r_{Lúa}^2} \Rightarrow \frac{M_{Terra}}{r_{Terra}^2} = \frac{M_{Lúa}}{r_{Lúa}^2}$$

Esta ecuación se complementa con la siguiente, que pone de manifesto que la suma de la distancia de la Tierra al objeto más la distancia de la Luna al objeto es igual a la distancia entre la Luna y la Tierra:

$$r_{Terra} + r_{Lúa} = d\left(Terra, Lúa\right)$$

Graficamente:



Sustituyendo los datos tenemos el sistema:

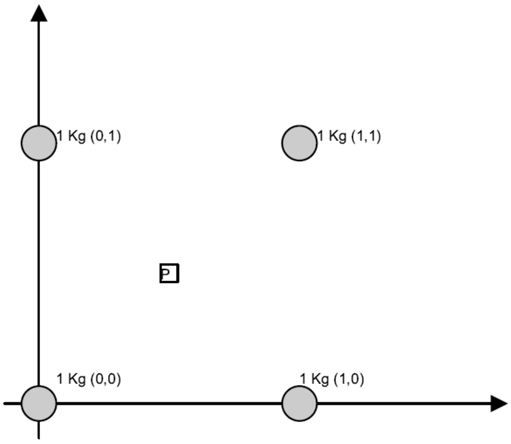
$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{M_{Terra}}{r_{Terra}^2}=\dfrac{M_{Lúa}}{r_{Lúa}^2}\\ r_{Terra}+r_{Lúa}=d\left(Terra,Lúa\right)\end{array}\right\}\Rightarrow \begin{array}{l}\dfrac{6\cdot 10^{24}}{r_{Terra}^2}=\dfrac{7,41\cdot 10^{22}}{r_{Lúa}^2}\\ r_{Terra}+r_{Lúa}=3,84\cdot 10^{8}\end{array}\Rightarrow \begin{array}{l}r_{Terra}=9r_{Lúa}\\ 10r_{Lúa}=3,84\cdot 10^{8}\end{array}\Rightarrow r_{Lúa}=3,84\cdot 10^{7}\ \text{m}$$

La distancia a la que se tiene que colocar la masa de la Tierra sale inmediatamente de las ecuaciones anteriores:

$$r_{Lúa}=3,456\cdot 10^{8}\ \text{m.}$$

Problema 3.- **Tenemos una masa de 1 kg situada en cada uno de los vértices de un cuadrado de 1 m de radio. Determina el campo gravitatorio en el centro del cuadrado y la fuerza que sufriría una masa de 3 kg situada en dicho punto, así como su aceleración.**

La situación que tenemos en el problema es la siguiente:



Aplicando el principio de superposición, el campo gravitatorio en el centro del cuadrado será igual a la suma de los campos que crean cada una de las masas por separado. El campo gravitatorio de cada una de las masas será, llamando masa 1 a la que está en el origen de coordenadas y numerando en sentido horario:

$$\vec{g}_1=-G\frac{m}{r^3}\vec{r}\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}\vec{r}=\left(0.5,0.5\right)-\left(0,0\right)=\left(0.5,0.5\right)\\ r=\sqrt{0.5^2+0.5^2}=0.707\end{array}\right.\Rightarrow \vec{g}_1=-6,67\cdot 10^{-11}\frac{1}{0.707^3}\left(0.5,0.5\right)$$

$$\vec{F}_1=-9.43\cdot 10^{-11}\vec{i}-9.43\cdot 10^{-11}\vec{j}\ \text{N/kg}$$

$$\vec{g}_2=-G\frac{m}{r^3}\vec{r}\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}\vec{r}=\left(0.5,0.5\right)-\left(0,1\right)=\left(0.5,-0.5\right)\\ r=\sqrt{0.5^2+0.5^2}=0.707\end{array}\right.\Rightarrow \vec{g}_2=-6,67\cdot 10^{-11}\frac{1}{0.707^3}\left(0.5,-0.5\right)$$

$$\vec{g}_1=-9.43\cdot 10^{-11}\vec{i}+9.43\cdot 10^{-11}\vec{j}\ \text{N/kg}$$

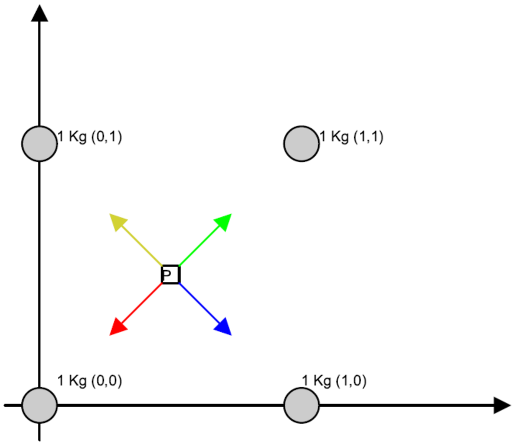
$$\vec{g}_3=-G\frac{m}{r^3}\vec{r}\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}\vec{r}=\left(0.5,0.5\right)-\left(1,1\right)=\left(-0.5,-0.5\right)\\ r=\sqrt{0.5^2+0.5^2}=0.707\end{array}\right.\Rightarrow \vec{g}_3=-6,67\cdot 10^{-11}\frac{1}{0.707^3}\left(-0.5,-0.5\right)$$

$$\vec{g}_3=+9.43\cdot 10^{-11}\vec{i}+9.43\cdot 10^{-11}\vec{j}\ \text{N/kg}$$

$$\vec{g}_4=-G\frac{m}{r^3}\vec{r}\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}\vec{r}=\left(0.5,0.5\right)-\left(1,0\right)=\left(-0.5,0.5\right)\\ r=\sqrt{0.5^2+0.5^2}=0.707\end{array}\right.\Rightarrow \vec{g}_4=-6,67\cdot 10^{-11}\frac{1}{0.707^3}\left(-0.5,0.5\right)$$

$$\vec{g}_4=+9.43\cdot 10^{-11}\vec{i}-9.43\cdot 10^{-11}\vec{j}\ \text{N/kg}$$

El campo gravitatorio total en el punto central del cuadrado será nulo, como era de esperar, ya que, el campo creado por una masa se cancela con el campo creado por la masa situada en el vértice opuesto, graficamente:



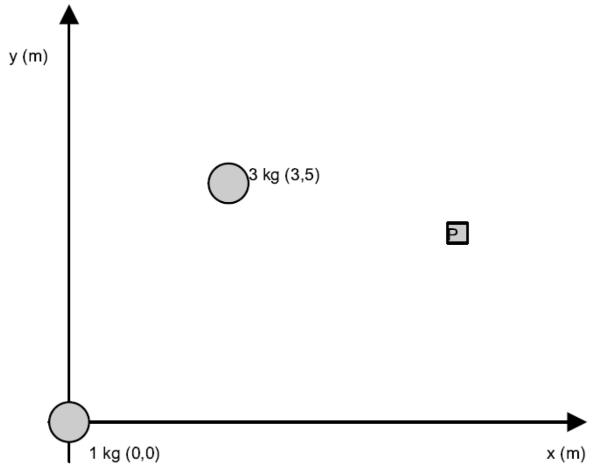
Por lo tanto, la fuerza que sufriría una masa de 3 kg situada en este punto sería nula, ya que:

$$\vec{F} = m\vec{g} = 3 \cdot 0 = 0 \text{ N}$$

Y, por lo tanto, la aceleración será nula también.

Problema 4.- **Determinar el potencial creado por la distribución de la figura siguiente en el punto (8,4).**

La situación que tenemos en el problema es la siguiente:



Tenemos que calcular el potencial gravitatorio creado por una distribución de masas en el punto P, de coordenadas (8,4), por lo tanto, tenemos que aplicar el principio de superposición, según el cual, el potencial total en un punto es igual a la suma de los potenciales que crean cada una de las masas por separado.

$$\boxed{V_{TOT} = \sum_{i=1}^{N} V_i}$$

Calcularemos el potencial que crea cada una de las masas por separado, haciendo referencia el subíndice 1 al potencial que crea la masa que se encuentra en el origen y el subíndice 2 hace referencia a la masa que se encuentra en el punto (3,5):

$$V_1 = -G\frac{m}{r} \Rightarrow \begin{cases} \vec{r} = (8,4) - (0,0) = (8,4) \\ r = \sqrt{8^2 + 4^2} = 8,94 \end{cases} \Rightarrow V_1 = -6,67 \cdot 10^{-11} \frac{1}{8,94} = -7,46 \cdot 10^{-12} \text{ N/kg·m}$$

$$V_2 = -G\frac{m}{r} \Rightarrow \begin{cases} \vec{r} = (8,4) - (3,5) = (5,-1) \\ r = \sqrt{5^2 + (-1)^2} = 5,10 \end{cases} \Rightarrow V_2 = -6,67 \cdot 10^{-11} \frac{1}{5,10} = -1,31 \cdot 10^{-11} \text{ N/kg·m}$$

El potencial total será la suma de estos dos potenciales:

$$V_{tot} = -7,46 \cdot 10^{-12} + \left(-1,31 \cdot 10^{-11}\right) = -2,056 \cdot 10^{11} \text{ N/kg·m}$$

Problema 5.- **Determina el potencial gravitatorio creado por la Tierra en el centro de la Luna.**

El potencial que crea la Tierra en el centro de la Luna vendrá dado por la expresión:

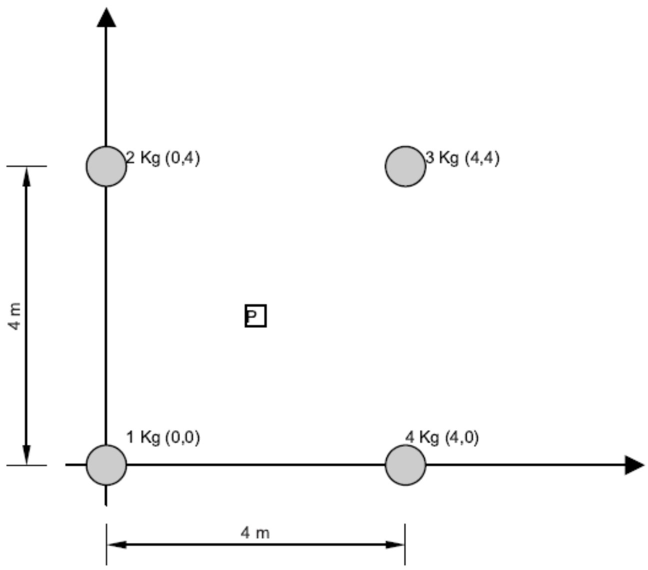
$$V=-G\frac{M}{r}$$

Donde M representa la masa que crea el potencial, en este caso, la masa de la Tierra, y r representa la distancia existente entre el centro de la Tierra y el centro de la Luna, sustituyendo los datos:

$$V=-G\frac{M}{r}=-6,67\cdot10^{-11}\frac{6\cdot10^{24}}{3,84\cdot10^{8}}=-1,042\cdot10^{6}$$ N/kg·m

Problema 6.- **Calcula la energía potencial gravitatoria que posee una masa puntual de 4 kg situada en el centro de un cuadrado en el que tenemos masas de 1, 2, 3 y 4 kg en vértices consecutivos, si el cuadrado tiene 4 m de lado.**

La situación que tenemos es la siguiente:



La energía potencial gravitatoria que posee una masa de 4 kg situada en el centro del cuadrado vendrá dada por la suma de las energías que adquire debido a cada una de las masas por separado, la energía que adquire una masa en presencia de otra és:

$$\boxed{U=-G\frac{Mm}{r}}$$

Calcularemos la energía que adquire la masa central debido la cada una de las masas que se encuentran en el vértice del cuadrado, usaremos el subíndice 1 para la masa que está en el origen y numeraremos en sentido horario, de esta manera, la energía debida la cada una de las masas vendrá dada por:

$$U_1=-G\frac{Mm}{r}\Rightarrow\begin{cases}\vec{r}=(2,2)-(0,0)=(2,2)\\ r=\sqrt{2^2+2^2}=2,83\end{cases}\Rightarrow U_1=-6,67\cdot10^{-11}\frac{1\cdot4}{2,83}=-9,43\cdot10^{-11}$$ J

$$U_2=-G\frac{Mm}{r}\Rightarrow\begin{cases}\vec{r}=(2,2)-(0,4)=(2,-2)\\ r=\sqrt{2^2+(-2)^2}=2,83\end{cases}\Rightarrow U_2=-6,67\cdot10^{-11}\frac{2\cdot4}{2,83}=-1,88\cdot10^{-10}$$ J

$$U_3=-G\frac{Mm}{r}\Rightarrow\begin{cases}\vec{r}=(2,2)-(4,4)=(-2,-2)\\ r=\sqrt{(-2)^2+(-2)^2}=2,83\end{cases}\Rightarrow U_3=-6,67\cdot10^{-11}\frac{3\cdot4}{2,83}=-2,83\cdot10^{-10}$$ J

$$U_4=-G\frac{Mm}{r}\Rightarrow\begin{cases}\vec{r}=(2,2)-(4,0)=(-2,2)\\ r=\sqrt{(-2)^2+(2)^2}=2,83\end{cases}\Rightarrow U_4=-6,67\cdot10^{-11}\frac{4\cdot4}{2,83}=-3,77\cdot10^{-10}$$ J

La energía total vendrá dada por:

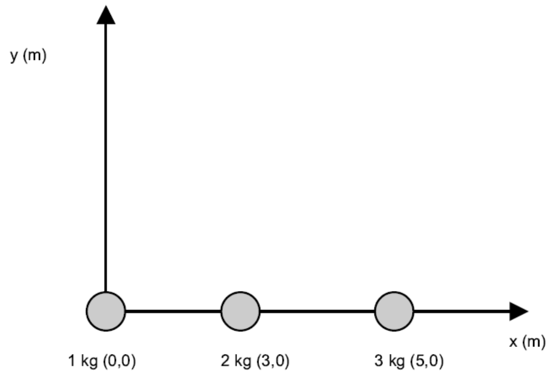
$$U_{tot} = \left(-9,43 \cdot 10^{-11}\right) + \left(-1,88 \cdot 10^{-10}\right) + \left(-2,83 \cdot 10^{10}\right) + \left(-3,77 \cdot 10^{10}\right) = -9,42 \cdot 10^{10} \text{ J}$$

Problema 7.- **Calcular la energía potencial gravitatoria asociada a una distribución compuesta por tres masas: 1 kg situado en el punto (0,0), 2 kg situados en el punto (3,0), 3 kg situados en el punto (5,0). Indica cual es el significado físico de la energía obtenida.**

Tenemos un sistema compuesto por tres masas, por lo tanto, la energía asociada la esta distribución vendrá dada por:

$$U_{tot} = U_{12} + U_{13} + U_{23}$$

Para entender mejor esta expresión, lo explicaremos de otra manera, tendremos en cuenta que la energía asociada a la distribución es la energía que hace falta para poder trasladar el sistema desde el infinito hasta su distribución actual. Por lo tanto, trasladando la primeira masa hasta el origen no tendremos ninguna energía, ya que, en principio supoñemos el espacio vacío. Al trasladar la segunda masa, tenemos que vencer la atracción de la primeira, por lo que, para llevarla hasta el punto (3,0), tenemos un intercambio energético dado por U_{12}, por último, al trasladar la tercera masa, tenemos que vencer la atracción de la primeira y de la segunda, por lo tanto, a la energía le tenemos que añadir los términos U_{13} correspondiente a la energía de la tercera en presencia de la segunda y U_{23} que de la cuenta de la energía de la masa 3 en presencia de la masa 2. La situación final del problema es la siguiente:



Las energías a calcular serán las siguientes:

$$U_{12} = -G\frac{m_1 m_2}{r_{12}} = -6,67 \cdot 10^{-11}\frac{1 \cdot 2}{3} = -4,45 \cdot 10^{-11} \text{ J}$$

$$U_{23} = -G\frac{m_2 m_3}{r_{23}} = -6,67 \cdot 10^{-11}\frac{2 \cdot 3}{2} = -2 \cdot 10^{-10} \text{ J}$$

$$U_{13} = -G\frac{m_1 m_3}{r_{13}} = -6,67 \cdot 10^{-11}\frac{1 \cdot 3}{5} = -4 \cdot 10^{-11}$$

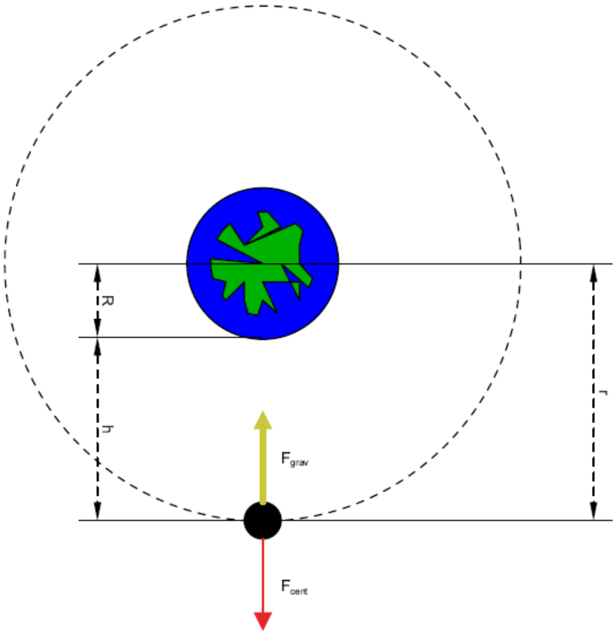
La energía total asociada a la distribución vendrá dada por:

$$U_{tot} = U_{12} + U_{13} + U_{23} = \left(-4,45 \cdot 10^{-11}\right) + \left(-2 \cdot 10^{-10}\right) + \left(-4 \cdot 10^{11}\right) = 2,845 \cdot 10^{10} \text{ J}$$

El significado de esta magnitud, como se expresó anteriormente es la energía que es necesario poner en juego para trasladar el sistema de cargas desde el infinito hasta la configuración actual.

Problema 8.- **Un satélite artificial de 300 kg gira alrededor de la Tierra en una órbita circular de 36378 km de radio. Calcula: a) la velocidad del satélite en la órbita**.

Para calcular la velocidad del satélite en la órbita, debemos usar las leyes de la dinámica, por lo tanto partiremos de igualar la fuerza gravitatoria con la fuerza centripeta:



Desarrollaremos las expresiones para llegar a la expresión final para la velocidad orbital:

$$G\frac{Mm}{r^2} = m\frac{v^2}{r} \Rightarrow \boxed{v = \sqrt{\frac{GM}{r}} = \sqrt{\frac{GM}{R+h}}}$$

Por lo tanto, sustituyendo los datos que nos da el problema, tendremos que la velocidad orbital del satélite en cuestión vendrá dada por:

$$v = \sqrt{\frac{GM}{r}} = \sqrt{\frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 6 \cdot 10^{24}}{36378000}} = 3,32 \cdot 10^3 \text{ m/s}$$

Otras magnitudes que se podrían calcular aquí, relacionadas con la velocidad orbital serían la velocidad angular, el periodo, entendido como el tiempo que tarda el cuerpo en dar una vuelta o la frecuencia, entendida como el número de vueltas que da el cuerpo en la unidad de tiempo. Partiendo de la expresión de la velocidad orbital:

$$v = \omega r \Rightarrow \omega r = \sqrt{\frac{GM}{r}} \Rightarrow (\omega r)^2 = \left(\sqrt{\frac{GM}{r}}\right)^2 \Rightarrow \omega^2 r^2 = \frac{GM}{r}$$

$$\boxed{\omega = \sqrt{\frac{GM}{r^3}}}$$

Relacionando la velocidad angular con el periodo, tenemos:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow \frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{GM}{r^3}} \Rightarrow \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 = \left(\sqrt{\frac{GM}{r^3}}\right)^2 \Rightarrow \frac{4\pi^2}{T^2} = \frac{GM}{r^3}$$

$$\boxed{T^2 = \frac{4\pi^2 r^3}{GM}}$$

Que es la ley de Kepler, por lo tanto, el cálculo anterior, supone la deducción de la ley de Kepler la partir de la ley de la gravitación Universal.

Problema 9.- **Un satélite artificial de 64,5 kg gira alrededor de la Tierra en una órbita circular de radio R = 2,32 R_T ; calcula; a) el período de rotación del satélite, b) el peso del satélite en la órbita. (Datos R_T = 6370 km; g_0 = 9,80 m/s^2).**

En este caso tenemos que hallar el periodo del satélite, para eso usamos las deducciones del problema anterior:

$$G\frac{Mm}{r^2} = m\frac{v^2}{r} \Rightarrow \boxed{v = \sqrt{\frac{GM}{r}} = \sqrt{\frac{GM}{R+h}}}$$

$$v=\omega r \Rightarrow \omega r=\sqrt{\frac{GM}{r}} \Rightarrow (\omega r)^2=\left(\sqrt{\frac{GM}{r}}\right)^2 \Rightarrow \omega^2 r^2=\frac{GM}{r}$$

$$\boxed{\omega=\sqrt{\frac{GM}{r^3}}}$$

$$\omega=\frac{2\pi}{T} \Rightarrow \frac{2\pi}{T}=\sqrt{\frac{GM}{r^3}} \Rightarrow \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2=\left(\sqrt{\frac{GM}{r^3}}\right)^2 \Rightarrow \frac{4\pi^2}{T^2}=\frac{GM}{r^3}$$

$$\boxed{T^2=\frac{4\pi^2 r^3}{GM}} \Rightarrow T=\sqrt{\frac{4\pi^2 r^3}{GM}}$$

Teniendo en cuenta que el radio de la órbita es un dato:

$$T=\sqrt{\frac{4\pi^2(2,32R_T)^3}{GM}}$$

Ahora, muy importante en este problema, tenemos que tener en cuenta que no contamos con el dato de G, sin embargo nos dan el dato de la gravedad en la superficie terrestre g_0 = 9,80 m/s^2, por lo tanto, podemos saber cuánto vale la constante GM, ya que:

$$g_0=\frac{GM}{R_T^2} \Rightarrow GM=g_0\cdot R_T^2=9,80(6370000)^2=3,98\cdot 10^{14}$$ N·m^2/Kg

Por lo tanto, ya podemos sustituir en la expresión obtenida para el periodo, obteniedo un valor de:

$$T=\sqrt{\frac{4\pi^2(2,37R_T)^3}{GM}}=\sqrt{\frac{4\pi^2(2,32\cdot 6370000)^3}{3,98\cdot 10^{14}}}=1,79\cdot 10^4$$ s

Nótese, que de la expresión del periodo podemos obtener como varía dicha magnitud respeto de las otras:

- El periodo es proporcional al radio, por lo tanto cuanto mayor sea el radio de la órbita mayor será el periodo, o lo que es lo mismo, más tardará en dar una vuelta.
- El periodo es inversamente proporcional a la masa central, por lo tanto, cuanto mayor sea la masa central alrededor de la cual gire nuestro cuerpo menor será el periodo.
- El periodo de un cuerpo orbitando solo depende de estos dos factores, la masa del cuerpo central y la distancia entre dicho cuerpo y el satélite.

Problema 10.- **Se desea situar un satélite artificial, de 50 Kg de masa en una órbirta circular situada en el plano del ecuador y con un radio igual al doble del terrestre, calcula a) la energía que hay que comunicar al satélite y la velocidad orbital del mismo. b) la energía que habría que comunicar al satélite para que escapase a la acción del campo gravitatorio terrestre.**

G=6.67·10^{-11} N·m^2 R=6.37 10^6 m g=10 m s^{-2}

Este es el típico problema de aplicación del principio de conservación de la energía a las órbitas y a los satélites. Para determinar la energía que debemos comunicar a un satélite para que pase de estar en la superficie terreste a una órbita alrededor de la tierra, tenemos que aplicar el principio de conservación de la energía:

$$E+E_0=E_{orbita} \Rightarrow \boxed{E=E_{órbita}-E_0}$$

Vamos deducir la expresión para la energía de un satelite en una órbita:

$$E_{órbita}=E_c+E_p=\frac{1}{2}mv_{órbita}^2-G\frac{Mm}{r}$$

Teniendo en cuenta la expresión para la velocidad orbital que obtuvimos en los apartados anteriores:

$$E_{órbita}=\frac{1}{2}m\left(\sqrt{\frac{GM}{r}}\right)^2-G\frac{Mm}{r}=-G\frac{Mm}{2r}$$

Donde M representa la masa central, m representa la masa del cuerpo que gira y r es la distancia entre los centros de los de los cuerpos o radio de la órbita.

Sustituyendo ahora en la expresión que nos da la energía, y teniendo en cuenta que la energía potencial en la superficie de la Tierra viene dada por:

$$E_0 = -G\frac{Mm}{R}$$

Donde la notación para las masas es la misma que en el caso anterior y R representa el radio de la Tierra.

$$E = E_{órbita} - E_0 \Rightarrow E = -G\frac{Mm}{2r} - \left(-G\frac{Mm}{R}\right)$$

$$E = G\frac{Mm}{R} - G\frac{Mm}{2r} \Rightarrow \boxed{E = GMm\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{2r}\right)}$$

En este caso el radio de la órbita es el doble del radio terrestre, por lo tanto la expresión anterior, se puede expresar como:

$$E = GMm\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{2(2R)}\right) = GMm\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{4R}\right) = \frac{3GMm}{4R}$$

Ahora debemos poner la expresión en función de los datos que en los da el problema, este problema nos da el valor de G, de R y de la gravedad en la superficie terrestre, por lo tanto, el único dato del que no disponemos es la masa de la Tierra, por lo tanto, debemos calcular la masa de la Tierra en función de los datos que tenemos, teniendo en cuenta que la aceleración de la gravedad en la superficie terrestre viene dada por:

$$g_0 = \frac{GM}{R_T^2}$$

Despejando la masa de la Tierra:

$$M = \frac{g_0 \cdot R_T^2}{G} = 5{,}96 \cdot 10^{24} \text{ Kg}$$

Ahora ya disponemos de todos los datos para poder resolver el problema y calcua la energía:

$$E = \frac{3GMm}{4R} \Rightarrow E = \frac{3 \cdot 6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 5{,}96 \cdot 10^{24} \cdot 50}{4 \cdot 6{,}37 \cdot 10^{6}} = 2{,}34 \cdot 10^{9} \text{ J}$$

b) Para determinar la energía para que el satélite escape de la acción gravitatoria de la Tierra, aplicamos de nuevo el principio de conservación de la energía, teniendo en cuenta que si queremos que el cuerpo escape de la atracción gravitatoria la energía final será nula:

$$E_{p0} = -E_{esc} \Rightarrow \boxed{E_{esc} = G\frac{Mm}{R}}$$

Sustituyendo los datos:

$$E_{esc} = G\frac{Mm}{R} = \frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 5{,}96 \cdot 10^{24} \cdot 50}{6{,}37 \cdot 10^{6}} = 3{,}12 \cdot 10^{9} \text{ J}$$

Problema 11.- **Se lanza un proyectil verticalmente desde la superficie de la tierra, con una velocidad inicial de 3 km/s, calcule: a) ¿Qué altura máxima alcanzará?; b) la velocidad orbital que es preciso comunicarle a esa altura para que describa una órbita circular. (Datos G = $6{,}67 \cdot 10^{-11}$ Nm^2/kg^2, R_T = 6378 km M_T = $5{,}98 \cdot 10^{24}$ kg).**

Cuando la velocidad esrelativamente grande, como en este caso, tenemos que igualar la energía en la superficie de la Tierra, que será la energía potencial en la superficie de la tierra más la energía cinética debida a la velocidad con la que se lanza el cuerpo, la energía final será la energía en el punto más alto de la trayectoria, que como es el punto más alto, no posee energía cinética, por lo que, solo tendremos energía potencial:

$$-G\frac{Mm}{R} + \frac{1}{2}mv^2 = -G\frac{Mm}{r}$$

Despejando r, que es el radio tendremos:

$$G\frac{Mm}{r} = G\frac{Mm}{R} - \frac{1}{2}mv^2 \Rightarrow G\frac{M}{r} = G\frac{M}{R} - \frac{1}{2}v^2$$

$$\frac{r}{GM} = \frac{1}{G\frac{M}{R} - \frac{1}{2}v^2} \Rightarrow \boxed{r = \frac{GM}{G\frac{M}{R} - \frac{1}{2}v^2}}$$

Sustituyendo los datos de los que disponemos, hallamos r:

$$r=\frac{GM}{G\frac{M}{R}-\frac{1}{2}v^2}\Rightarrow r=\frac{6,67\cdot 10^{-11}\cdot 5,98\cdot 10^{24}}{6,67\cdot 10^{-11}\frac{5,98\cdot 10^{24}}{6378000}-\frac{1}{2}(3000)^2}=6,87\cdot 10^6$$ m

Teniendo en cuenta que r=R+h, podemos hallar h como:

$$r=R+h\Rightarrow h=r-R=6,87\cdot 10^6-6378000=4,94\cdot 10^5$$ m

b) Ahora, calcularemos la velocidad que es necesario comunicarle para que orbite, para esto, usamos el principio de conservación de la energía entre dos puntos, el primer punto será el punto de altura máxima del problema anterior, donde tendremos energía potencial y energía cinética debido al empuje que exercemos sobre el satélite. El punto final será el satélite orbitando, la energía de este satélite orbitando se halló en el problema anterior:

$$\frac{1}{2}mv^2=E_{órbita}-E_p\Rightarrow\frac{1}{2}mv^2=-G\frac{Mm}{2r}-\left(G\frac{Mm}{r}\right)$$

$$v=\sqrt{2G\frac{M}{r}-G\frac{M}{r}}=\sqrt{G\frac{M}{r}}$$

Sustituyendo los datos que tenemos en el problema tendremos que la velocidad que es necesario comuicarle será:

$$v=\sqrt{G\frac{M}{r}}=\sqrt{\frac{6,67\cdot 10^{-11}\cdot 5,98\cdot 10^{24}}{6,87\cdot 10^6}}=7620$$ m/s.

Que será la velocidad que habrá que comunicar al satélite en el punto más alto de su trayectoria para que orbite con un radio r.

CUESTIONES

Cuestión 1.- **A velocidade que se debe comunicar a un corpo na superficie da Terra para que escape da gravidade terrestre e se afaste para sempre debe ser:**

a. **Maior que (2g0RT)1/2.**
b. **Menor que (2g0RT)1/2.**
c. **Igual que (g0RT)1/2.**

SOL. a

Para conseguir que un corpo "escape" da atracción gravitatoria, deberemos comunicarlle unha enerxía que permita situalo nun punto no que non estea sometido a dita atracción. Esto ocorre a unha distancia "infinita" do centro da Terra e na que se cumpre que ET=0. Aplicando o principio de conservación da enerxía mecánica a ambos puntos (cortiza terrestre e infinito) resultará:

EM = Ec + Ep

EM = (1/2) mvescape2 + (-GMTm/r) =0

vescape2=(2g0RT); vescape= (2g0.RT)1/2

Para conseguir que se afaste, deberemos comunicarlle unha velocidade superior a (2g0RT)1/2

Cuestión 2**.- ¿Como varía g o profundizar cara o interior da Terra?**

a. **Aumenta.**
b. **Diminúe.**
c. **Non varía.**

SOL. b

Se supoñemos que a Terra é unha esfera maciza de densidade constante, podemos calcula-la masa (M') que nun punto do seu interior é causante da atracción gravitatoria:

d= M/V; d= d'

MT/(4/3)pRT3= M'/(4/3)pr3

M'=(r3/RT3) MT

Como g'= GM'/r2, quedará: g= G(r3/RT3) MT=g0r/RT

Obtense unha variación lineal de g con r. A medida que r diminúe (ó ir cara o interior da Terra) g tamén diminúe.

O valor máximo de g obtense cando r= RT.

Cuestión 3.- **A forza gravitatoria é proporcional á masa do corpo. En ausencia de rozamento, ¿que corpos caen máis rápido?:**

a. **Os de maior masa.**
b. **Os de menor masa.**
c. **Todos igual.**

SOL. c

Todos caerían igual, porque aínda que a forza gravitatoria depende da atracción das masas, a intensidade do campo gravitatorio (g) medida como F/m, depende unicamente da masa creadora do campo sendo independente da masa do obxecto que cae. g= GM/r2

Esta intensidade de campo gravitatorio é a que determina a aceleración de caída do corpo.

Cuestión 4.- **Se por unha causa interna, a Terra sufrira un colapso gravitatorio e reducira o seu radio a metade, mantendo constante a masa. ¿Como sería o período de revolución arredor do Sol?.**

- **a. Igual.**
- **b. 2 anos.**
- **c. 4 anos.**

SOL. a

Dacordo coa terceira lei de Kepler, T2 e proporcional a R3, resultando independente da distribución das masas durante a rotación, polo que dito período non se verá modificado.

Dito doutro xeito, o campo gravitatorio é un campo de forzas centrais, no que se mantén constante o momento cinético, polo que de non modificarse o centro de masas das partículas, non se modifica o momento de inercia , e polo tanto a velocidade angular permanecería tamén constante.

FC = FG ; mv2 /r = G MTm/r2 de onde v2 = GMT /r

Como v=wr= (2p/T)r; quedará: T2= 4p2r3/GMT

Cuestión 5.-**Unha partícula móvese dentro dun campo de forzas centrais. O seu momento angular respecto do centro de forzas:**

- **a. Aumenta indefinidadamente.**
- **b. É cero.**
- c. **Permanece constante**.

SOL. c

Nun campo de forzas centrais, a forza é de tipo radial, é dicir F e r teñen a mesma dirección, polo que o seu producto vectorial será nulo (vectores paralelos).

Estamos, pois, en condicións de aplica-lo principio de conservación do momento angular ó cinético. Se o momento da forza é nulo, o momento angular permanecerá constante.

MF= r x F= 0

MF= dL/dt = 0

Polo tanto L= constante

Cuestión 6.- **Sexan tres corpos iguais de gran masa, A, B, e C, e un de pequena masa, X. Se os dispoñemos A e B por unha beira e C e X por outra, cos centros igualmente separados:**

- **a. Achegáranse máis rápido A e B.**
- **b. Achegáranse máis rápido C e X.**

c. **Achegáranse ambas parellas cunha mesma aceleración.**

SOL.: a

Segundo a lei de gravitación universal, a forza gravitatoria establécese entre dous corpos cunha intensidade proporcional ó producto das súas masas. En cambio, a aceleración que sofre cada un dos corpos é proporcional á masa do outro. É dicir, a aceleración é proporcional á masa do outro corpo, polo tanto a aceleración de achegamento (suma das aceleracións de cada corpo independente) será maior se algunha das masas é maior, e o achegamento é máis rápido.

Cuestión 7.- **G e g son:**

a. **g maior que G.**
b. **Unha maior cá outra dependendo do lugar e campo dos que se parta.**
c. **Non ten sentido facer unha comparación entre g e G.**

SOL.: c

Non ten sentido a comparación xa que "g" representa a intensidade de campo gravitatorio (F/m), sendo unha constante non universal que depende da distancia (g= GMm/r); mentres que "G" é unha constante universal que non depende da natureza dos corpos que interaccionan e que toma o valor de 6'67.10-11 Nm2kg-2. Representa a forza gravitatoria con que se atraen dous corpos de 1 kg de masa cada un, situados a 1 m de distancia.

Cuestión 8.- **Se nun corpo situado nun campo gravitatorio, a súa EC é igual á súa EP (en valor absoluto), eso significa:**

a. **Que o corpo pode escapar ó infinito.**
b. **Que o corpo rematará caendo sobre a masa que crea o campo.**
c. **Que seguirá unha órbita circular.**

SOL.: a

Tendo en conta o balance enerxético global: EC+EP= -1/2 (GMm/r); este valor será nulo cando r à ¥ .

Cuestión 9.- **As órbitas planetarias son planas porque:**

a. **Os planetas teñen inercia.**
b. **Non varía o momento angular ó ser unha forza central.**
c. **Non varía o momento de inercia dos planetas no seu percorrido**.

SOL.: b

Se temos en conta que o campo gravitatorio é un campo de forzas centrais no que F e r son paralelos, esto suporá que o momento da forza será 0 e polo tanto: dL/dt =0. Esto representa o principio de conservación do momento cinético.

O momento cinético L debe ser constante en módulo (L=I.w=constante), e en dirección e sentido o que implica a existencia de órbitas planas.

Cuestión 10.- **Un mesmo planeta, describindo circunferencias arredor do sol, irá máis rápido:**

a. **Canto maior sexa o raio da órbita.**
b. **Canto menor sexa o raio da órbita.**
c. **A velocidade non depende do tamaño da órbita**.

SOL.: b

Para que un obxecto se atope en órbita: FG= FC => Se r diminúe a forza gravitatoria aumenta, por ser esta inversamente proporcional a r2; aumentando así a aceleración centrípeta a que está sometida e polo tanto a velocidade.

Cuestión 11.- **Coméntese a frase "Tódolos puntos dun mesmo paralelo terrestre e a mesma altura non teñen igual valor da intensidade da gravidade"**

a. **Falso.**
b. **Verdadeiro.**
c. **Depende de que paralelo sexa**

SOL.: a

O valor da intensidade da gravidade "g" na codia terrestre depende do radio da terra, que vai ser distinto en función do punto do meridiano no que nos atopemos. Polo tanto, se o valor do radio é distinto (pois a terra non é unha esfera perfecta), tamén o será o valor de "g", que aumentará na proximidade dos polos e diminuirá na proximidade do ecuador.

Cuestión 12.- **No movemento da Terra arredor do Sol**

a. **Consérvanse o momento angular e o momento lineal.**
b. **Consérvanse o momento lineal e o momento da forza que os une.**
c. **Varía o momento lineal e consérvase o angular**.

SOL.: c

O campo gravitatorio é un campo de forzas centrais no que F e r son paralelos, esto suporá que o momento da forza será 0 e polo tanto: dL/dt =0. Esto representa o principio de conservación do momento cinético. O momento lineal: p= mv non será constante, xa que o vector v cambia continuamente en dirección e sentido.

Cuestión 13.- ¿**A que distancia do centro da Terra** g **é igual ó seu valor nun punto do interior da Terra equidistante do centro e da superficie?. RT = 6400 km**

a. **6400 km.**
b. **9051 km.**
c. **18100 km.**

SOL.:b

Calculando "g" nun punto equidistante entre o centro da Terra e a superficie (r= 3200 km); e comparando co valor pedido no exterior resultará:

No exterior: g= g0R2/r2

No interior: g= g0r/RT (ver cuestión 2)

Onde r= 3200 km e R= 6400 km.

Polo tanto r=9051 km

Cuestión 14.- **Cando un obxecto xira en torno a Terra cúmprese :**

a. **Que a enerxía mecánica do obxecto na súa órbita é positiva.**
b. **Que a súa velocidade na órbita será v=(2gRT)½.**
c. **Que a forza centrípeta e a forza gravitatoria son iguais**.

SOL.: c

A condición dinámica para a existencia dunha órbita implica a existencia dunha forza que garante a existencia dun movemento circular e polo tanto dunha aceleración centrípeta. A responsabilidade desta forza centrípeta recae no caso do campo gravitatorio na forza gravitatoria. Polo tanto a forza gravitatoria será a forza centrípeta.

Custión 15.- **A aceleración de caída dos corpos cara a Terra é:**

a. **Proporcional ó seu peso.**
b. **Proporcional á forza de atracción entre ambos.**
c. **Independente da súa masa.**

SOL..c

A aceleración de caída dos corpos "g" é a intensidade de campo gravitatorio, representa a Forza exercida por unidade de masa, sendo independente da masa.

g= G(M/r2)

PROBLEMAS DE SELECTIVIDAD

Problema 1.- Un cometa de masa 10^{12}kg achégase ó Sol dende un punto moi afastado do sistema solar, podéndose considerar que a súa velocidade inicial é nula.
a) Calcula-la súa velocidade no perihelio (situado a unha distancia aproximada de cen millóns de quilómetros do Sol).
b) Calcula-la enerxía potencial cando cruce a órbita da Terra (a unha distacia r=1'5.108km).
Datos: masa do Sol: 2.10^{30}kg; G=$6'67.10^{-11}$Nm^{2}kg^{-2}

SOLUCIÓN

a) Se o lugar de onde provén o cometa está moi afastado do sistema solar, podemos considerar que a distancia é infinita, e, polo tanto, a enerxía potencial será nula, o mesmo que a enerxía total, pois a velocidade inicial era cero.

No perihelio, ten unha enerxía potencial negativa que imos calcular, e que ten que ser contrarrestada, en base ó principio de conservación da enerxía, pola enerxía cinética, positiva. A partir desta, calculámo-la velocidade:

$$Ep=-GMm/r$$
$$Ec= (1/2)mv^2$$
$$Ep+ Ec=0; -GMm/r + (1/2)mv^2 =0$$
$$GMr^{-1}=(1/2)v^2$$
$$v=(2GM/r)^2$$
$$v=(2.6'67.10^{-11}.2.10^{30}/10^{11})2 = 5'2.\ 10^4 \text{ ms-1}$$

b) Para a enerxía potencial ó cruzar a órbita da terra, é indiferente de onde proceda o cometa, tendo que restablecer só a ecuación correspondente: Ep=-GMm/r

Entón, só nos resta substituí-los datos da masa do Sol, a do cometa e a distancia ó Sol cando cruza a órbita da terra, xunto coa constante de gravitación universal:

$$Ep=-GMm/r= - 6'67.10^{-11}.2.10^{30}.10^{12}/1'5.10^{11}$$
$$Ep= - 8'9.10^{20} \text{ J}$$

Probelema 2.- Nun planeta cun radio que é a metade do radio terrestre, a aceleración da gravidade na súa superficie vale 5 ms^{-2}. Calcular:
a) A relación entre as masas do planeta e da Terra.
b) A altura a que é necesario deixar caer un obxecto no planeta, para que chegue a súa superficie coa mesma velocidade coa que o fai na Terra, cando cae dende unha altura de 100 m. (Na Terra: g =10 ms^{-2})

SOLUCIÓN

A intensidade do campo gravitatorio vén dada pola expresión:

$g = G\ M/r^2$

a gravidade na superficie do planeta é : $gp = G\ M_p / r_p^2 = 5$ ms^{-2}

a gravidade na superficie da Terra é: $g_T = G\ M_T / r_T^2 = 10$ ms^{-2}

Despexando as masas do planeta e a Terra nestas expresións queda:

Mp = 5 rp2 / G.MT = 10 rT2 / G

Mp /MT = 0'5 rp2 / rT2

como rp = rT / 2

Mp /MT = 0'5.0'52.rT2 / rT2 = 0'125

MT = 8 Mp

b) A velocidade coa que chega ó chan un corpo que cae dende una altura " h", sen velocidade inicial, na que a intensidade do campo gravitatorio poida considerarse constante, vén dada pola expresión

v2 = 2gh

A velocidade que alcanza un corpo ó caer dende una altura de 100 m ata a Terra é

v = (2gThT)1/2 = (2.10.100) 1/2 = (2000) 1/2 m/s

No planeta para que chegue con esa velocidade terá que caer dende a altura seguinte

v2 = 2gphp

2000 =2.5.hp

hp = 200 m.

Problema 3.- Un satélite de comunicacións de 1 Tm describe órbitas circulares arredor da Terra cun período de 90 minutos. Calcular:
a) A altura a que se atopa sobre a Terra.
b) A enerxía total.
Datos: RT=6400 km; MT=5'96.1024 kg; G=6'67.10-11 Nm2kg-2

SOLUCION

a) A forza centrípeta que fai varia-la dirección da velocidade do satélite é a forza gravitatoria que exerce a Terra sobre o satélite a esa distancia do seu centro: mv2 /r = GMTm /r2

Sendo m = masa do satélite

v = velocidade do satélite na órbita
r = RT+h
G= constante universal
MT = masa da Terra
simplificando queda v2 = GMT /r
Por outro lado sabemos que o período é o tempo que tarda en dar unha volta completa T = 2pr /v
de onde v = 2pr /T
(2pr /T)2 = GMT /r
de onde r3 = GMTT2 / (4p2)
Substituíndo nesta expresión os datos que temos en unidades do Sistema Internacional obtémo-lo valor de
r = 6'647.106 m
r = RT + h
h = r - RT = 6'647.106 - 6'400.106 = 2'47.105 m
b) A enerxía total do satélite é a suma das súas enerxías cinética e potencial
ET = Em = EC + Ep
EC = (1/2)mv2 = (1/2)mGMT /r
Ep = - GMTm/r
Entón: ET = EC + Ep = - ½ GMTm/r
ET = - 6'67.10-11.5'96.1024.103/2.6'647.106 = - 2'99.1010 J

Problema 4.- Un corpo de masa 1000 kg atópase , xirando, a 200 km por enriba da superficie da Terra.
a) ¿Cal é a aceleración da gravidade a esa altura?.
b) ¿Cal é o valor da enerxía total?.
Datos: g0= 9'81 m/s2; RT= 6370 km

SOLUCIÓN.
a) Aplicando a segunda lei de Newton pódese obte-lo valor da aceleración a que está sometido na órbita. O descoñece-los valores de G e da masa da Terra, deberemos utiliza-lo valor de g0 e RT no cálculo.
F=ma; a= F/m
Neste caso a forza responsable desta aceleración é a forza gravitatoria: FG= G MT m/r2
Polo tanto: a= G MT /r2
Multiplicando e dividindo por RT2 obtemos:
a= G MT /r2 (RT2 /RT2) = g0RT2/r2
Substituíndo polos datos do problema (r= 6570 km) a aceleración da gravidade a esa altura é de : 9'22 ms-2
b) A enerxía total será a suma de EC+EP
Para calcula-la enerxía cinética:
Por atoparse en órbita:
FC = FG ; mv2 /r = G MT m/r2 de onde v2 = GMT /r
Entón: EC= (1/2) mv2 = (1/2) mGMT /r
Para calcula-la enerxía potencial : EP= - GMTm/r
Así , a Enerxía total, suma de ambas será:
EM = EC + EP = (1/2)mGMT /r - GMTm/r = - (1/2)GMTm/r
que posta en función de g0 quedará EM = - (1/2)g0 m (R2T /r)
A enerxía total será negativa por tratarse dun campo atractivo e considera-lo valor de referencia 0 para a enerxía no infinito.
Tras substituír polos datos do problema, o valor da enerxía total é de:
-3'03.1010 J

Problema 5.-En tres dos catro vértices dun cadrado de 10 m de lado colócanse outras tantas masas de 10 kg. Calcular:
a) O campo gravitatorio no cuarto vértice do cadrado.
b) O traballo realizado polo campo para levar unha masa de 10 kg dende dito vértice ata o centro do cadrado.
Dato: G= 6'67.10-11 Nm2kg-2

SOLUCIÓN
a) Supondo as masas situadas nos vértices (0,0), (10,0), (0,10) o vector g no (10,10) obteráse a partir da suma vectorial das intensidades creadas por cada unha das masas situadas nos outros vértices g = GMr0 /r2
A masa do vértice (0,0) crea
g1 = - 6'67.10-11 (10/2.102)(10i +10j)/14'14 =-2'36.10-12i - 2'36.10-12j Nkg-1
debido a masa de (10,0) teremos:
g2 = -6'67.10-11 (10/100)(10j/10) = - 6'67.10-12j Nkg-1
debido a masa do (0,10) teremos

g3 = - 6'67.10-11 (10/100)(10i/10) = - 6'67.10-12i Nkg-1
A intensidade no vértice (10,10) será:
g = - 9'03.10-12 i - 9'03.10-12 j Nkg-1
b) O traballo para leva-la masa de 10 kg dende o vértice (10,10) deica o punto (5,5) calcularase pola variación da enerxía potencial que posúe a masa de 10 kg neses dous puntos
W =-DEP= EP0 - EPf
como a enerxía potencial é : EP = - GMm/r teremos
Ep0 = - 6'67.10-11 (100/2001/2 + 100/10 +100/10) = -1'81.10-9 J
Epf = - 6'67.10-11 (100/501/2 + 100/501/2 + 100/501/2) = - 2'83.10-9 J
W = -1'81.10-9 - (- 2'83.10-9) = 1'02.10-9 J ; traballo realizado polo campo.
Problema 6.- Sabendo que o planeta Venus tarda 224'7 días en dar unha volta completa arredor do Sol e que a distancia de Neptuno ó Sol é 4501.106 km así como que a Terra invirte 365'256 días en dar unha volta completa arredor do Sol e que a súa distancia a este é 149'5.106 km. Calcular:
a) Distancia de Venus ó Sol.
b) Duración dunha revolución completa de Neptuno arredor do Sol.
SOLUCIÓN
a) A 3ª lei de Kepler dinos que T2 = KR 3 sendo T o período de revolución do planeta e R o radio da súa órbita. Aplicando esto á Terra e a Venus teremos
T2T = KR3T
T2V = KR3V
de onde:
T2T /T2V = R3T / R3v
R3v = R3T T2V /T2T
e ó substituí-los datos do problema obtemos RV = 108'138·106 km
b) Facendo o mesmo coa Terra e Neptuno obteremos
T2T = KR3T
T2N = KR3N
T2N = T2T R3N /R3T
TN = 5'21.109 s = 165'2 anos
Problema 7.- Un satélite artificial de 200 kg describe unha órbita circular a 400 km de altura sobre a superficie terrestre. Calcula:
a) Enerxía mecánica.
b) A velocidade que se lle comunicou na superficie da Terra para colocalo nesa órbita.
Datos: G = 6'67·10-11 Nm2kg-2 ; MT = 5'96·1024 kg ; RT = 6370 km
SOLUCIÓN
A enerxía mecánica é a suma da enerxía cinética e a potencial
EM = Ec + Ep
que no caso do satélite orbitando terá a seguinte expresión
EM = (1/2) mv2+(-GMTm/r) = (1/2) mGMT /r - GMTm/r = -(1/2) GMTm/r
EM= - (1/2) 6'67·10-11·5'96·1024·200/6770·103 = - 5'53·109 J
b. Aplicando o concepto de conservación da enerxía mecánica ó momento do lanzamento
EM = -GMTm /RT + (1/2) mv2saída
substituíndo e resolvendo obtemos
vsaída = 7,9·103 m/s
Problema 8.- Un satélite cunha masa de 300 kg móvese nunha órbita circular a 5.10 7 m por enriba da superficie terrestre.
a) ¿Cal é a forza da gravidade sobre o satélite?.
b) ¿Cal é o período do satélite?.
Datos: g0= 9'81 ms-2; RT= 6370 km
SOLUCIÓN
Como sabémo-lo módulo da forza de atracción gravitatoria é:
FG= GMTm/r2
se multiplicamos e dividimos esta expresión por R2T transfórmase en:
FG = mg0 (R2T / r2)
onde r = RT + h = 6370.103 + 5.107 = 5'637.107 m
Agora xa dispoñemos de tódolos datos precisos para substituír na expresión da forza, resultando:
F= 37'58 N

b) Para o satélite que orbita a forza centrípeta Fc = mv2 /r , é igual á forza gravitatoria antes calculada.
mv2 /r = 37'58 N ; v 2= (37'58.5'637.107 / 300)2 = 2657'3 m/s
como o período é T = 2pr / v
T = 2.p. 5'637.107 / 2657'3 = 13'33.104 s = 37 horas
Problema 9.- Nos vértices dun cadrado de lado l= 3m hai masas de 10 kg cada una. Calcular:
a) A intensidade da gravidade no cuarto vértice creada polas tres masas.
b) O potencial gravitatorio en dito punto.
Datos: G= 6'67. 10-11 Nm2kg-2
SOLUCIÓN
a) A intensidade da gravidade no 41 vértice é a suma vectorial da que crean nese punto as masas situadas nos outros tres:
gtotal = g1 + g2 + g3 sendo g = - G Mr0 /r2
Tomamos como coordenadas dos puntos 1,2,3 e 4 as seguintes:
1(0,0); 2(3,0); 3(0,3); 4(3,3)
g1 = -6'67.10-11.(10/18).(3i + 3j)/4'24 = - 2'62.10-11 i - 2'62.10-11 j N/kg
g2 = - 6'67.10-11.(10/9).(3j/3) = -7'41.10-11 j N/kg
g3 = - 6'67.10-11.(10/9).(3 i/3) = -7'41.10-11 i N/kg
g = -10'03.10-11 i - 10'03.10-11 j Nkg-1
e o seu módulo será
g = 1,42. 10-10 Nkg-1
b) O potencial gravitacional será a suma alxébrica dos potenciais gravitacionais creados nese punto polas masas que se atopan nos outros tres vértices:
Vtotal = V1 + V2 + V3 sendo V = - G M/r
V= -6'67.10-11 [(10/181/2) + (10/3) + (10/3)] = -6,02. 10-10 Jkg-1
Problema 10.- Un astronauta de 75 kg xira nun satélite artificial onde a súa órbita dista h da superficie da Terra. Calcular:
a) O período de dito satélite.
b) O peso de dito astronauta.
Datos: g0= 9'81 m/s2; h= RT= 6370 km
SOLUCIÓN
a) O período do satélite é: T = 2pr /v sendo r o radio da órbita e v a velocidade do satélite na órbita.
r = RT + h = RT + RT = 2 RT = 2.6370.103 m
Como FC = FG teremos mv2 /r = G MT m/r2 de onde v2 = GMT /r
como nos datos non témo-los valores de G e MT , multiplicaremos e dividirémo-la expresión anterior por R2T para deixala en función de g0, e queda
v2 = g0 (R2T /r) = 31244850
v = 5589'7 m/s
Para calcula-lo período: T = 2 .p.2 .6370.103 /5589'7 = 14321 s = 4 h
b) Como o Peso = FG e FC = FG podemos emprega-la expresión
Peso = mv2 /r
P= 75.31244850 / 2.6370.103 = 183,75 N
Problema 11.- Quérese poñer nunha órbita de radio r= 5R/3 un satélite artificial de masa 10 kg, sendo R=6400 km. Calcular:
a) A velocidade de lanzamento.
b) A enerxía total do mesmo.
Datos: g0= 9'81 ms-2
SOLUCIÓN
a) A enerxía mecánica é a suma da enerxía cinética e a potencial
EM = EC + EP
que no caso do orbitando satélite terá a seguinte expresión
EM = (1/2) mv2+(-GMTm/r) = (1/2)mGMT/r -GMTm/r=-(1/2) GMTm/r
que posta en función de g0 quedará EM = - (1/2) g0m (R2T /r)
Aplicando o principio de conservación da enerxía, esta será a mesma que no momento de ser lanzado:
EM [na órbita]= EC + EP [no lanzamento]
-(1/2)g0 m (R2T /r)=-GMT m/RT+(1/2)mv2saída =-g0mRT +(1/2) mv2saída
de aquí teremos
v = [g0RT (2r- RT)/r]2 = (g07RT/5)1/2
substituíndo os datos e operando queda

v= 9'37. 103 m/s

b) A enerxía total será como xa vimos

Em = - (1/2) g0 m (R2T /r) =- (1/2) g0 m (3RT /5) = -188'35. 106 J

Problema 12.- Se o radio da Lúa é unha cuarta parte do da Terra,

Calcula a súa masa.

a) Calcula o radio da órbita arredor da terra.

Datos: gL = 1'7 ms-2; gT= 9'8 ms-2 ; Masa da Terra = 5'9.1024kg.

Período da lúa arredor da terra = 2'36.106s

SOLUCIÓN

a) A intensidade do campo gravitatorio nas superficies da Lúa e a Terra é:

gL = 1'7 = GML/R2L = GML/(RT/4)2 = 16GML/R2T

gT = 9'8 = GMT/R2T

dividindo unha pola outra e substituíndo a masa da Terra teremos

1'7/9'8 = 16.ML/5'9.1024

de onde: ML = 6'40.1022 kg

b) O período de revolución é: T = 2pr/v ; v = 2pr/T

A partir da relación entre forza centrípeta e forza gravitatoria, temos: FC = FG

MLv2 /r = GMTML/r2

v2 = GMT/r

(2pr/T)2 = GMT/r

despexando r

r = [GMTT2 /4p2]1/3

substituíndo os datos e operando teremos

r = 3'81.108 m

Problema 13.- Calcular:

a) A enerxía cinética que debería ter unha persoa de 70kg para orbitar arredor da Terra a unha altura 0.

b) ¿Canta enerxía sería necesaria para elevala a unha órbita estable a 6.370km de altura?

Datos:Raio da terra: 6.370km;G=6'67. 10-11 Nm2Kg-2;MT=5'96.1024 kg.

SOLUCIÓN

a) Para que dera voltas sen caer tería que suceder que a súa forza centrípeta fose igual á gravitatoria

mv2/RT = G.MTm/R2T de onde sacaremos que mv2 = GMTm/RT

entón a enerxía cinética é: Ec = (2) mv2 = (2) GMTm/RT

substituíndo os datos nesa expresión obtemos Ec = 2'18.109 J

b) Cando está na órbita a 6370 km da superficie da Terra terá unha enerxía total:

EM = (1/2) mv2 +(-GMTm/r) = (1/2)mGMT/r -GMTm/r=-(1/2) GMTm/r

EM = - 1/2 GMTm/r = - 1'09.109 J

esta enerxía será igual á suma da enerxía potencial na superficie da Terra e da enerxía cinética que lle temos que comunicar para poñela en órbita

EP sup = - 1/2 GMTm/RT = - 2'18.109 J

logo a enerxía cinetica que hai que comunicarlle será

EC = EM - EP sup = - 1'09.109 - (- 2'18.109) = 1'09.109 J

Problema 14.- Calcular:

a) A velocidade que leva na súa órbita un satélite xeoestacionario.

b) Se fora lanzado cun canon dende a Terra, desprezando o rozamento atmosférico, calcula-la velocidade de lanzamento necesaria.

Datos: G = 6'67.10-11 Nm2kg-2 ; MT = 5'96.1024 kg ; RT = 6370 km

SOLUCIÓN

a) Xeoestacionario, significa que está sempre sobre o mesmo punto, o cal implica que o seu período de rotación ten que ser igual ó da Terra e a súa órbita perpendicular ó Ecuador.

Como sabemos que T = 2pr/v = 86400s ; r = 86400.v/2p

Por outro lado temos que FC =FG ;

mv2 /r = GMTm/r2 ; r = GMT /v2

Igualando e despexando v teremos

v = (2p GMT /T)1/3 = (2p.6'67.10-11.5'96.1024 /86400)1/3

v = 3'07.103 m/s

b) A enerxía cinética dun corpo que orbita ó arredor a Terra é:

EC= (1/2)mv2 = (1/2) GMTm/r
e a enerxía mecánica é : EM = - (1/2) GMTm/r
Polo tanto a enerxía mecánica do satélite xeoestacionario é:
EM = - (1/2).m.30592 J
A enerxía mecánica expresada en función da EP na superficie da Terra e da EC de lanzamento será:
EM = - GMTm/RT + (1/2)mv2lanz.
- (1/2).m.30592 = - 6'67.10-11.5'96.1024.m /6370.103 + (1/2) mv2lanz.
de onde vlanz. = 1'07.104 m/s