EXAMEN TIPO CONEMATICA 1º BACHILLERATO

1. **Estudiamos el movimiento de una bolsa de plástico debido al viento y obtenemos la siguiente ecuación de movimiento:**

$$\boldsymbol{\vec{r} = (t^2 + 3)\,\vec{\imath} + 2t\,\vec{\jmath}}$$

Calcular:

a) Desplazamiento en los tres primeros segundos
b) Velocidad media de la bolsa entre t = 2 s y t = 3 s
c) Aceleración media en los 5 primeros segundos.
d) Velocidad (instantánea) en t = 5 s
e) Aceleración (instantánea) en t = 5 s
f) Ecuación del movimiento.

Solución:

a) El desplazamiento es el incremento del vector posición entre los tiempos estudiados, por lo tanto:

$$\overrightarrow{\Delta r} = \vec{r}_{final} - \vec{r}_{inicial} = \vec{r}_3 - \vec{r}_0 = [(3^2 + 3)\,\vec{\imath} + 2 \cdot 3\,\vec{\jmath}]m - [0^2 + 3)\,\vec{\imath} + 2 \cdot 0\,\vec{\jmath}]m$$

$$\overrightarrow{\Delta r} = 9\,\vec{\imath} + 6\,\vec{\jmath}]\text{ m}$$

$$\overrightarrow{|\Delta r|} = \sqrt{9^2 + 6^2} = 10{,}82 \text{ m se ha desplazado.}$$

b) La velocidad media es por definición el incrementos de la posición entre el incremento de tiempo, por tanto:

$$\overrightarrow{v_m} = \frac{\overrightarrow{\Delta r}}{\Delta t} = \frac{\vec{r}_{final} - \vec{r}_{inicial}}{t_{final} - t_{inicial}} = \frac{\vec{r}_3 - \vec{r}_2}{3 - 2} = \frac{[3^2 + 3)\,\vec{\imath} + 2 \cdot 3\,\vec{\jmath}]m - [2^2 + 3)\,\vec{\imath} + 2 \cdot 2\,\vec{\jmath}]m}{1\,s}$$

$$\overrightarrow{v_m} = [5\,\vec{\imath} + 2\,\vec{\jmath}]m/s$$

c) La aceleración media es por definición el incrementos de la velocidad instantánea entre el incremento de tiempo, por tanto:

$$\overrightarrow{a_m} = \frac{\overrightarrow{\Delta v}}{\Delta t} = \frac{\vec{v}_{final} - \vec{v}_{inicial}}{t_{final} - t_{inicial}} = \frac{\vec{v}_5 - \vec{v}_0}{3 - 0} =$$

Antes debemos calcular la velocidad (instantánea) para poder sustituir en ella el tiempo.

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{\frac{d((t^2 + 3)\,\vec{\imath} + 2t\,\vec{\jmath})}{dt}\,m}{s} = (2t\,\vec{\imath} + 2\,\vec{\jmath})\,m/s$$

Entonces:

$$\overrightarrow{a_m} = \frac{(2 \cdot 3\,\vec{\imath} + 2\,\vec{\jmath}) - (2 \cdot 0\,\vec{\imath} + 2\,\vec{\jmath})}{3}\ {}^{m}/{}_{s^2} = \ 2\,\vec{\imath}\ {}^{m}/{}_{s^2}$$

d) La velocidad instantánea ya la hemos calculado en el apartado anterior de forma general, como nos piden para t = 5 s, sustituimos en la expresión y calculamos.

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d((t^2+3)\,\vec{\imath} + 2t\,\vec{\jmath})}{dt}\frac{m}{s} = (2t\,\vec{\imath} + 2\,\vec{\jmath})\ m/s$$

$$\vec{v}(t = 5s) = \ (2 \cdot 5\,\vec{\imath} + 2\,\vec{\jmath})\frac{m}{s} = \ (10\,\vec{\imath} + 2\,\vec{\jmath})\ m/s$$

e) Por definición la aceleración instantánea es la derivada de la velocidad, por tanto:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d(2t\,\vec{\imath} + 2\,\vec{\jmath})}{dt}\frac{m}{s^2} = 2\ m/s^2$$

f) Si descomponemos el vector posición en el eje x e y, y las relacionamos por medio del tiempo llegaremos a la ecuación de la trayectoria.

$$x = \ t^2 + 3 \xRightarrow{entonces} t = \ \sqrt{x-3}$$

$$y = 2t \xRightarrow{entonces} t = \ y/2$$

Igualando ambas y despejando "y".

$$\frac{y}{2} = \ \sqrt{x-3}\ \ entonces\ la\ ecuación\ de\ la\ trayectoria\ es:$$

$$y = 2\sqrt{x-3}$$

2. En una pista de pruebas de 100 m de longitud se tienen dos motoristas situados uno frente de otro. Uno de ellos arranca con una aceleración constante que le lleva a alcanzar los 100 km/h en 10 seg. El otro motorista arranca simultáneamente en persecucion del primero con aceleración tal que consigue los 100 km/h en tan sólo 5 seg. Calcular cuanto tiempo tarda el segundo en alcanzar al primero. Calcular las velocidades que tienen y los espacios recorridos por los dos en el instante del alcance. Si el segundo tarda un cierto tiempo en arrancar ¿cuánto deberia ser este tiempo como minimo para que fuera posible que el primero alcanzase al segundo?

Hagamos un esquema del problema. La pista de pruebas se supone que es circular y al estar un motorista enfrente del otro, es lógico pensar que por ejemplo la moto 2 está en la salida, y la moto 1 en el punto diametral opuesto, esto es, a 50 metros de la salida, justo a mitad del recorrido. Los dos motoristas tiene un movimiento uniformemente acelerado, por lo tanto las ecuaciones del movimiento serán:

$$s = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$$

$$v = v_0 + at$$

Pasemos los 100Km/h a m/s:

$$v = 100\frac{Km}{h} \cdot \frac{1000m}{1Km} \cdot \frac{1h}{3600s} = 27{,}78 m/s$$

DATOS MOTO1	DATOS MOTO2
$v_0 = 0$	$v_0 = 0$
$s_0 = 50m$	$s_0 = 0$
(Ya que como uno está en frente del otro, uno estará en la meta y otro a mitad del recorrido)	
t = t	t = t
$a = \frac{27{,}78\, m/s}{10s} = 2{,}78 m/s^2$	$a = \frac{27{,}78\, m/s}{5s} = 5{,}56 m/s^2$
$s_1 = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$	$s_2 = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$
$s_1 = 50 + 0 + \frac{1}{2} \cdot 2{,}78 \cdot t^2$	$s_2 = 0 + 0 + \frac{1}{2} \cdot 5{,}56 \cdot t^2$

La moto 2 sale desde el principio de la pista y avanza hasta que alcanza a la moto 1. En ese momento ambas motos estarán en la misma posición, por lo tanto podemos igualar s_1 y s_2

$$s_1 = s_2$$

$$50 + 0 + \frac{1}{2} \cdot 2{,}78 \cdot t^2 = 0 + 0 + \frac{1}{2} \cdot 5{,}56 \cdot t^2$$

$$50 + 1{,}39 \cdot t^2 = 2{,}78 \cdot t^2$$

Resolvemos:

$$1{,}39 \cdot t^2 - 50 = 0$$

$$t = \sqrt{\frac{50}{1{,}39}} = 5{,}997s \cong 6\ segundos$$

Tardará el segundo 6 segundos en alcanzar al primero. Cuando espacio habrán recorrido:

$s_2 = 0 + 0 + \frac{1}{2} \cdot 5{,}56 \cdot t^2 = 2{,}78 \cdot 36 = 100{,}08\ metros\ ha\ recorrido\ la\ moto\ 2$ (1 vuelta)

La moto 1 habrá recorrido (100 -50) m = 50 metros, media vuelta.

Para la segunda pregunta el tiempo mínimo que debe dejar el segundo para ser alcanzado por el primero es justamente aquel en el que el segundo aún no se ha movido, y por tanto, es el tiempo que le cuesta al primero en dar media vuelta y llegar a la posición inicial de la moto 2. Y como lo habíamos calculado antes, el tiempo mínimo son los 6 segundos.

3. Una bicicleta con ruedas de 0,30 cm de radio empieza a moverse y en 5 segundos alcanza una velocidad de 1 m/s. Calcular:

a) La aceleración angular.

b) La velocidad lineal a los 3 segundos.

c) Las vueltas que ha dado en los 5 primeros segundos.

Lo primero que tenemos que hacer es ver los datos que tenemos y sustituirlos en las ecuaciones del movimiento.

DATOS: Parte del reposo, entonces: $\omega_0 = 0$ rad/s

Radio rueda: r = 0,3 m

Velocidad lineal a los t = 5 s es v = 1 m/s

Como es un movimiento circular uniformemente acelerado, ponemos sus fórmulas y la relación con las magnitudes lineales:

$$w = w_0 + \alpha t \qquad \theta = \theta + \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2$$

$$s = \theta \cdot r \qquad v = w \cdot r \qquad w = \frac{2\pi}{T}$$

Nos piden la aceleración angular, α. Usaremos la fómula $w = w_0 + \alpha t$.

Como la velocidad a los 5 segundos es de 1 m/s, entonces, será la velicidad angular (w) en ese tiempo. Como:

$$v = w \cdot r \xRightarrow[entonces]{} w = \frac{v}{t} = \frac{1\frac{m}{s}}{0,3\ m} = 3.33\ rad/s$$

$$w = w_0 + \alpha t \xRightarrow[entonces]{} \alpha = \frac{w - w_0}{t} = \frac{(3.33 - 0\ )rad/s}{5s} = 0.66\ rad/s^2$$

b) La velocidad lineal a los 3 segundos la calcularemos de forma fácil usando las formulas anteriores ahora que sabemos la aceleración angular que será la misma en ese intervalo de tiempo. Por tanto:

$$w = w_0 + \alpha t \xRightarrow[entonces]{} w = 0 + 0.66\frac{rad}{s^2} \cdot 3s = 1.98\frac{rad}{s}$$

$$v = w \cdot r \xRightarrow[entonces]{} v = 1.98\frac{rad}{s} \cdot 0.3\ m = 0.6\ m/s$$

c) Para calcular las vueltas dadas en los 5 segundos calcularemos el ángulo girado, entonces:

$$\theta = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2 = 0 + 0 \cdot 5 + \frac{1}{2}0.66\frac{rad}{s^2} \cdot 5\ s^2 = 8.25\ rad$$

Y por último pasamos los radianes a vueltas, teniendo en cuenta que una vuelta son 2 π

$$8.25\ rad \cdot \frac{1\ vuelta}{2\pi\ rad} = 1.63\ vueltas$$

4. Lanzamos una pelota con velocidad inicial de 15 m/s y un ángulo de 30º hacia una pared que está a 18 metros.

a) tipo de movimiento y altura a la que impactará en la pared.

b) Velocidad en el momento del impacto.

c) Distancia a la que habría caído si no hubiese pared.

(Soluciones a) 1,02m b) 13.96 m/s c) 20 m