F2B-Problemas resueltos de MAS

1

46.- La aguja de una máquina de coser se mueve verticalmente con un movimiento que puede considerarse vibratorio armónico simple. Si el desplazamiento vertical total de la aguja es de 8 mm, y sabiendo que realiza 20 puntadas en 10 s:

a) Escriba la ecuación de movimiento de la aguja, sabiendo que en el instante inicial se encuentra en uno de los extremos de su trayectoria.

b) Calcule los valores máximos de la velocidad y de la aceleración de la aguja, indicando dónde se alcanzan.

a) La ecuación del movimiento de la aguja será:

$$y = A \operatorname{sen}(\omega t + \varphi)$$

- Si el desplazamiento vertical total es de 8 mm, la amplitud será de 4 mm.
- Si realiza 20 puntadas (u oscilaciones) en 10 s, su frecuencia será de 2 Hz, de modo que la frecuencia angular o pulsación se calculará del modo siguiente:

$$\omega = 2\pi f = 4\pi \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}$$

- Finalmente, hallamos la fase inicial o constante de fase a partir de las condiciones iniciales (en t = 0, x = A):

$$A = A \operatorname{sen}\varphi \quad \Rightarrow \quad \varphi = \pi/2 \text{ rad}$$

Sustituyendo los tres valores, nos queda la siguiente ecuación del movimiento:

$$\boxed{y = 0{\prime}004 \operatorname{sen}(4\pi t + \pi/2) \qquad \text{(S.I.)}}$$

b) La velocidad de la aguja se calcula derivando su posición (o elongación) con respecto del tiempo:

$$v = \frac{dy}{dt} = 0{\prime}016\pi \cos\left(4\pi t + \pi/2\right) \quad \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$$

Su valor máximo es $\boxed{v_{máx} = \pm 0{\prime}016\pi \ \ \text{m}\cdot\text{s}^{-1} = \pm 0{\prime}05 \ \ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}}$, y se alcanza en la posición de equilibrio. Los dos signos se corresponden con los dos posibles sentidos de movimiento de la aguja al pasar por dicho punto.

La aceleración de la aguja se calcula derivando su velocidad con respecto del tiempo:

$$a = \frac{dv}{dt} = 0{\prime}064\pi^2 \operatorname{sen}\left(4\pi t + \pi/2\right) \quad \text{m}\cdot\text{s}^{-2}$$

Su valor máximo es $\boxed{a_{máx} = \mp 0{\prime}064\pi^2 \ \ \text{m}\cdot\text{s}^{-2} = \mp 0{\prime}63 \ \ \text{m}\cdot\text{s}^{-2}}$, y se alcanza en los extremos. Los signos positivo y negativo se corresponden con el acercamiento y alejamiento, respectivamente, de la aguja respecto de la posición de equilibrio.

2

1. 1.- Comenta si la siguiente afirmación es verdadera o falsa: "En un movimiento armónico simple dado por x = A senωt las direcciones y sentidos de la velocidad y la aceleración coinciden en todos los puntos de la trayectoria" (1,2puntos)

2.- Un objeto oscila según un movimiento armónico simple dado por x = Asenωt. Si el valor de la amplitud de la oscilación es 6 cm y la aceleración del objeto cuando x = - 4 cm es 24 cm/s2, calcular: (a) La aceleración cuando x = 1 cm (b) la velocidad máxima que alcanza el objeto (1,3 puntos).

1. La afirmación es falsa, ya que como viene esquematizado en los dibujos, la aceleración y la velocidad solo coinciden en dirección y sentido cuando el cuerpo se dirige hacia la posición de equilibrio. Cuando el cuerpo se aleja de dicha posición la aceleración cambia de sentido haciendo que la velocidad del cuerpo disminuya hasta detenerse en el extremo de la trayectoria.

2 (a) Calculamos en primer lugar el valor de la pulsación ω a partir del dato de la aceleración en x = - 4 cm.

$$\omega^2 = \frac{-a}{x} = \frac{-24}{-4} = 6\,s^{-2} \qquad \Rightarrow \qquad \omega = \sqrt{6}\ s^{-1}$$

Sustituyendo para x = 1 cm = 0,01 m.

$$a = -\omega^2 x = -6 \cdot 0{,}01 = 0{,}06\,m/s^2$$

(b) Para calcular la velocidad máxima escribimos la ecuación del movimiento y derivamos obteniendo la de la velocidad.

$$x = 0{,}06\,\mathrm{sen}\sqrt{6}t; \qquad v = \frac{dx}{dt} = 0{,}06\sqrt{6}\cos\sqrt{6}t$$

el valor máximo se obtiene cuando el coseno vale la unidad, de modo que:

$$v_{max} = 0{,}06\sqrt{6}\,m/s$$

3

7. 1.- Deducir las expresiones de las energías asociadas al oscilador armónico simple.
2.-Se observa que un determinado muelle se alarga en 3,9 cm cuando se cuelga de él una masa de 10 g. Si una masa de 25 gr. unida a este muelle oscila en un movimiento armónico simple, calcular el período de la oscilación.

1. La expresiones de las energías son:

$$\left.\begin{array}{l} E_c = \frac{1}{2}mv^2 \\ E_p = \frac{1}{2}kx^2 \end{array}\right\} \; E_T = E_c + E_p = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2$$

Las ecuaciones de la velocidad y la posición son:

$$x = A\cos\omega t \qquad x^2 = A^2\cos^2\omega t$$
$$v = -A\omega\mathrm{sen}\omega t \qquad v^2 = A^2\omega^2\mathrm{sen}^2\omega t$$

Sustituyendo en cada una de las expresiones tenemos:

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\omega^2A^2\mathrm{sen}^2(\omega t + \varphi_0)$$

$$E_p = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}m\omega^2A^2\cos^2(\omega t + \varphi_0)$$

$$E_T = \frac{1}{2}mA^2\omega^2\mathrm{sen}^2\omega t + \frac{1}{2}m\omega^2A^2\cos^2\omega t = \frac{1}{2}m\omega^2A^2\left(\mathrm{sen}^2\omega t + \cos^2\omega t\right)$$

$$E_T = \frac{1}{2}m\omega^2A^2$$

2. Aplicando la Ley de Hooke al muelle calculamos el valor de la K con los primeros datos:

$$F = Kx; \qquad mg = Kx \quad \Rightarrow \quad K = \frac{mg}{x} = \frac{0{,}01 \cdot 9{,}8}{0{,}039} = 2{,}5\,N/m$$

Igualando las fórmulas proporcionadas por la segunda ley de Newton y la ley de Hooke obtenemos la expresión de la que sale el valor de la frecuencia angular.

$$\left.\begin{array}{l} F = -K\vec{x} \\ \vec{F} = m\vec{a};\quad \vec{F} = -m\omega^2\vec{x} \end{array}\right\} \; -Kx = -m\omega^2 x \quad \Rightarrow \quad K = m\omega^2$$

El dato que necesitamos es el periodo de modo que:

$$K = m\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \quad \Rightarrow \quad T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{K}} = 0{,}2\,\pi\,\mathrm{s}$$

4

8. Una partícula de 0,5 kg que describe un movimiento armónico simple de frecuencia 5 Hz tiene, inicialmente, una energía cinética de 0,2 J y una energía potencial de 0,8 J.

a) Calcula la posición y la velocidad iniciales, así como la amplitud de la oscilación y la velocidad máxima.

La ecuación de la posición de una partícula con un movimiento armónico simple es:

$x = A \cdot \mathrm{sen}(\omega \cdot t + \phi) = A \cdot \mathrm{sen}(2 \cdot \pi \cdot f \cdot t + \phi)$

Por tanto la velocidad es: $\dfrac{dx}{dt} = 2 \cdot \pi \cdot f \cdot A \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot f \cdot t + \phi)$

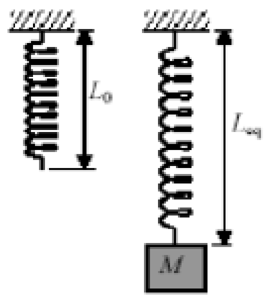
Si sustituimos los valores en las dos expresiones tenemos que:

$x = A \cdot \mathrm{sen}\,(10 \cdot t + \phi)$

$v = A \cdot 10 \cdot \cos\,(10 \cdot t + \phi)$

5

1) Un muelle de masa despreciable tiene una longitud natural L_0 = 20 cm. Cuando de su extremo inferior se cuelga un cuerpo de masa M = 0,1 kg, la longitud en equilibrio del muelle es Leq = 30 cm.



a) Calcula la constante recuperadora, k, de este muelle. Considera: g = 10 m/s^2. (0,5 p.)

Partiendo de la posición de equilibrio anterior, se desplaza M hacia arriba 10 cm, es decir, hasta que el muelle tiene su longitud natural. A continuación se suelta M con velocidad inicial nula, de forma que empieza a oscilar armónicamente en dirección vertical.

b) Calcula la longitud máxima del muelle, en el punto más bajo de la oscilación de M. (1 p.)

c) Calcula la amplitud y la frecuencia de la oscilación, y la velocidad de M cuando pasa por su posición de equilibrio. (1 p.)

a) La fuerza recuperadora del muelle se equilibra con la fuerza del peso del cuerpo.

$$F_k = P \quad \Rightarrow \quad k\cdot\Delta x = m\cdot g; \qquad k = \frac{mg}{\Delta x} = \frac{0{,}1\cdot 10}{0{,}1} = 10\,\mathrm{N/m}$$

b) La amplitud de la oscilación es igual a uno y otro lado de la posición de equilibrio del muelle, por tanto el punto más bajo de la oscilación se encuentra 10 cm por debajo de la posición de equilibrio:

$$L_{max} = 40\,\mathrm{cm} = 0{,}4\,\mathrm{m}$$

c) La amplitud de la oscilación es un dato del apartado b) (A = 10 cm)

La frecuencia se puede obtener a partir del valor de k:

$$k = m\omega^2 \quad \Rightarrow \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{0{,}1}{10}} = 10\,\mathrm{rad/s}$$

Para el calculo de la velocidad utilizamos la ecuación del m.v.a.s.:

$$y = A\cos\omega t \quad \Rightarrow \quad v = -A\omega\,\mathrm{sen}\,\omega t \qquad v = -0{,}1\cdot 10\,\mathrm{sen}\,10t = -\mathrm{sen}\,10t$$

Calculamos el valor de t cuando pasa por la posición de equilibrio, es decir cuando y = 0

$$0 = 10\cos 10t; \quad \cos 10t = 0; \quad 10t = \frac{\pi}{2} + 2n\pi \;\Rightarrow\; t = \frac{\pi}{20}\,\mathrm{s}$$

sustituyendo en la ecuación de la velocidad

$$v = -\mathrm{sen}\left(10\cdot\frac{\pi}{20}\right) = -\mathrm{sen}\,\frac{\pi}{2} = -1\,\mathrm{m/s}$$

El valor máximo de la velocidad en módulo es 1m/s y se obtiene cuando el cuerpo pasa por la posición de equilibrio.

6

17. Una partícula de masa m = 5 g oscila armónicamente a lo largo del eje OX en la forma $x = A\cos\omega t$, con A = 0,1 m y ω = 20 π s-1.

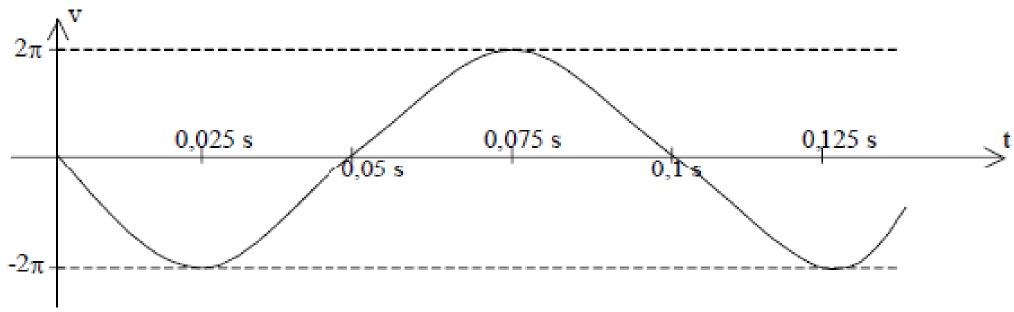
a) Determina y representa gráficamente la velocidad de la partícula en función del tiempo.

b) Calcula la energía mecánica de la partícula.

c) Determina y representa gráficamente la energía potencial de m en función del tiempo.

1°. a) La ecuación que representa la velocidad en función del tiempo se obtiene derivando la ecuación de la posición.

$$v = \frac{dx}{dt} = -A\omega\,\mathrm{sen}\omega t; \qquad v = -2\pi\,\mathrm{sen}(20\pi t)$$



b) La energía mecánica será la suma de la energía cinética y de la potencial:

$$E_M = E_C + E_P = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2$$

$$E_M = \frac{1}{2}m(-A\omega)^2\mathrm{sen}^2(20\pi t) + \frac{1}{2}m\omega^2A^2\cos^2(20\pi t) = \frac{1}{2}m\omega^2A^2\left(\mathrm{sen}^2(20\pi t) + \cos^2(20\pi t)\right)$$

$$E_M = \frac{1}{2}m\omega^2A^2 = \frac{1}{2}0{,}05\cdot 4\pi^2 = 0{,}01\pi^2\ \mathrm{J}$$

c) La energía potencial es: $E_P = \frac{1}{2}m\omega^2A^2\cos^2(\omega t) = 0{,}01\pi^2\cos^2(20\pi t)$

Como se trata de un coseno al cuadrado, todos sus valores serán positivos y la forma de la función será igual que la del coseno pero con los tramos negativos simétricos respecto al eje OX

Esta función toma sus valores máximos en intervalos de tiempo de 0,05 s y se anula en los valores de tiempo intermedios.

Máximos: t = 0; t = 0,05; t = 0,1; t = 0,15;…

Mínimos: t = 0,025; t = 0,075; t = 0,125;…