1. Una revolución científica que modificó la visión del mundo. De las leyes de Kepler a la Ley de gravitación universal.

Desde la antigüedad el hombre intenta entender el movimiento de los astros, inicialmente con explicaciones ajenas a la validación mediante observación, teológicas. Del movimiento observado de las estrellas surge la idea de esfera celeste y modelo geocéntrico, modelo que los griegos explican con esferas por ser figuras geométricas perfectas. Ptlomeo realiza modificaciones sobre el modelo geocéntrico de Aristóteles (excentricidad, epiciclos, ecuante) para explicar hechos observados (variación brillo, movimiento retrógrado), pero mantiene el uso de circunferencias. Pasa a ser geoestático.
El deseo de avanzar en la comprensión fue importante porque motivó observaciones y llevó la primera teoría física, mediante la primera gran **revolución científica**, la revolución copernicana. Es una revolución porque caen pilares previos que son sustituidos por otros: los pilares previos eran la autoridad de una afirmación (Aristotélicos, dogmas, religión), y con el Renacimiento son sustituidos por el experimento y la observación. Las afirmaciones científicas son repetibles y falsables, se produce una separación de ciencia y religión.
Copérnico: modelo heliocéntrico (helioestático), en el que la Tierra se movía. Tardó en ser aceptado: rompía dogmas (aunque seguía usando esferas) y sólo aportaba exactitud y simplicidad, hacía lo mismo que Ptolomeo. Importante porque con su modelo se adaptó el calendario; al jueves -juliano- 4 de octubre de 1582 le sucede el viernes -gregoriano- 15 de octubre de 1582 (realmente depende del país!)
Galilei: intenta demostrar la realidad física del modelo de Copérnico, que no se aceptaba, solamente se usaba por su precisión Aporta pruebas heliocéntricas/antigeocéntricas como las fases de Venus, lunas de Júpiter, manchas solares y montañas en la Luna. Fue procesado por la iglesia en 1633: el geocentrismo contradecía la biblia que implicaba Tierra inmóvil y Sol moviéndose en torno a ella: *Josué 10:12 "Entonces Josué habló a Jehová ...y dijo ...: Sol, detente en Gabaón" Salmos 93:1 "Afirmó también el mundo, y no se moverá."*
Galilei realiza otras importantes aportaciones a la ciencia: el foco en la observación y el experimento controlado que es la base del método científico, aportando leyes de movimiento.
Globalmente la revolución copernicana supone un paradigma del método científico, siendo una **revolución científica** donde surge en sí la propia ciencia. El método científico se puede ver en 4 pasos simplificados:
1. Observación y planteamiento de hipótesis: Copérnico plantea el heliocentrismo con órbitas circulares.
2. Realización de observación y medidas. Galilei aporta observaciones, Tico Brahe aporta medidas.
3. Análisis e interpretación de datos, revisión de hipótesis. Kepler partiendo de los datos de Tico Brahe formula sus tres leyes, que describen la cinemática del movimiento de los planetas. Kepler se declara copernicano, pero ya no usa órbitas circulares, revisa hipótesis.
4. Conclusiones. Formulación de leyes científicas. Newton partiendo de las leyes de Kepler formula la ley de gravitación universal, que describe la dinámica del movimiento de los planetas (publica al tiempo las tres leyes de dinámica). Es universal porque aplica no sólo a los planetas, sino a cualquier cuerpo con masa.

1.1 Leyes de Kepler

Desarrolladas para planetas orbitando alrededor del Sol, pero igualmente válidas para objetos orbitando por gravedad respecto a un objeto central (satélites naturales y artificiales)
1. Ley de las órbitas. Planetas describen órbitas elípticas y el Sol está en uno de los focos.
2. Ley de las áreas. El área barrida por unidad de tiempo por el radio vector que une Sol-Planeta / la velocidad areolar es constante.
3. Ley de los períodos. Los cuadrados de los períodos son directamente proporcionales a los cubos de los semiejes mayores de las órbitas.
Nota: Las demostraciones de las leyes de Kepler se hacen más adelante, tras ver la Ley de Gravitación Universal y los conceptos de momento de una fuerza respecto de un punto y momento angular.
Nota: a menudo se suelen considerar órbitas circulares, por lo que los semiejes mayores (a) coinciden con el radio, pero hay que recordar el caso general de la elipse, y los conceptos geométricos de elipse (la suma de distancias entre un punto cualquiera y ambos focos es constante, Área $A=\pi ab$, para $a=b=r$ $A=\pi r^2$).

1.2 Ley de Gravitación Universal

$$\vec{F}=-G\frac{M\,m}{r^2}\vec{u}_r;\ G=6{,}67\cdot 10^{-11}\frac{N\,m^2}{kg^2}$$

Siempre atractiva, en la línea que une las dos masas.
Para más de dos masas se usa principio de superposición.
Peso (N), P=mg, con $g=GM/R^2$ y $h<<R$ y se aproxima $h/R\approx 0$
>A veces se indica m_1 y m_2; aquí M y m para separar simbólicamente M "la que crea" y m "la afectada"

1.2.1 Ley de Gravitación Universal y Tercera ley de Kepler

Se pueden relacionar matemáticamente para órbitas circulares (igualando F_g y F_c), R_O=radio órbita.

$$F_c=F_g \Rightarrow m\frac{v^2}{R_O}=\frac{GM}{R_O^2};v=\frac{2\pi R_O}{T} \qquad \frac{T^2}{R_O^3}=\frac{4\pi^2}{GM}\Rightarrow T^2\propto R_O^3$$

1.3 Fuerzas centrales

Son fuerzas que tienen dirección radial partiendo de un centro fijo, y cuyo valor sólo depende de la distancia radial a ese centro. Si se toma como origen de coordenadas el centro fijo, el vector fuerza y el vector posición son siempre paralelos. Son importantes por su relación con las fuerzas conservativas y con el momento angular. Las fuerzas elásticas de un muelle y gravitatorias son un caso de fuerzas centrales.

1.4 Momento de una fuerza respecto a un punto y momento angular

1.4.1 Momento de una fuerza respecto a un punto.

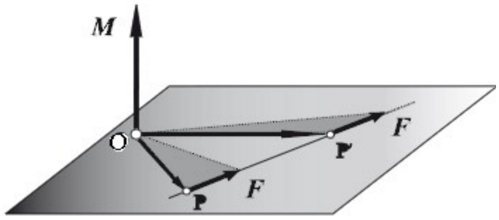
$\vec{M}_o=\vec{r}\times\vec{F}$ Magnitud vectorial.

Producto vectorial, simbolizado por $\times$(no usar $\wedge$, "exterior")

(El producto vectorial se detalla junto a campo magnético)

$|\vec{M}_O|=|\vec{F}||\vec{r}|sen\theta=Frsen\theta=Fb$ Su módulo es el módulo de la fuerza por la distancia mínima eje acción fuerza al punto referencia del momento (b=lsenθ).

Si los vectores posición y fuerza son paralelos el momento es nulo (senθ=0): ocurre en fuerzas centrales.



Wikipedia, Algarabía, dominio público

1.4.2 Momento angular

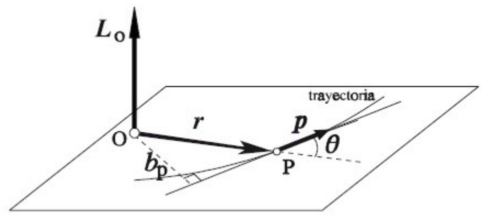
(Se trata aquí para una partícula)

$\vec{L}_o=\vec{r}\times\vec{p}$ Magnitud vectorial. Unidades kg·m²/s ó J·s

$\vec{p}=m\vec{v}$ Momento lineal

$|\vec{L}_o|=|\vec{r}||\vec{p}|\Rightarrow L=rmv\, sen\theta$

Si los vectores posición y momento lineal (velocidad) son perpendiculares el módulo del momento angular es L=rmv, (senθ=1): ocurre en órbita circular y ciertos puntos de otras órbitas.



Wikipedia, Algarabía, dominio público

1.4.3 Propiedades de los momentos

Son respecto a un punto y su valor depende del punto elegido

Tienen el mismo valor aunque F ó p "deslicen" en la misma recta.

Son vectores, perpendiculares al plano que forman $\vec{r}$ y $\vec{F}$ ó $\vec{p}$ y según regla del tornillo.

1.4.4 Conservación del momento angular

$\frac{d\vec{L}}{dt}=\vec{M}$ ***Ecuación fundamental de la dinámica de rotación***.

Implica la ***conservación del momento angular*** ya que $Si\ \vec{M}=0\Rightarrow\vec{L}=cte$

Nota: analogías con la 2ª ley de Newton expresada con momento lineal, y con conservación momento lineal, cambia P → L y F → M (Equivalencia de magnitudes dinámicas de traslación y rotación)

1.4.5 Demostración de primera ley Kepler con el momento angular

$\vec{L}=cte$ fuerzas centrales, prolongación pasa por centro (Sol); O en centro: $\vec{M}_O=0$, $\vec{r}\ y\ \vec{F}$ paralelos.

Constante en dirección, como $\vec{L}=m\vec{R}\times\vec{V}\Rightarrow\vec{R}\ y\ \vec{V}\ en\, mismo\ plano$. Demuestra órbitas planas.

Constante en sentido, mismo sentido avance tornillo.

Nota: no se demuestra que la órbita es una elipse (en general es una cónica), queda fuera bachillerato.

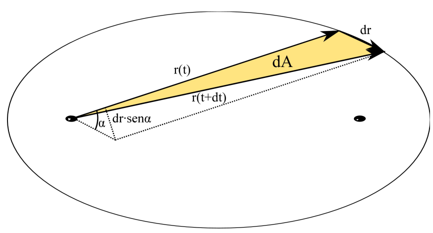
1.4.6 Demostración de segunda ley Kepler con el momento angular

Planteamos la órbita elíptica y un área diferencial barrida

$dA=\frac{1}{2}|\vec{r}\times d\vec{r}|$ (Medio paralelogramo formado por vectores r y dr)

Operando para velocidad areolar $\frac{dA}{dt}=\frac{1}{2}\left|\vec{r}\times\frac{d\vec{r}}{dt}\right|=\frac{1}{2}|\vec{r}\times\vec{v}|$

Como $|\vec{L}|=cte=m|\vec{r}\times\vec{v}|$ $\frac{dA}{dt}=\frac{1}{2}\frac{|\vec{L}|}{m}=\frac{|\vec{L}|}{2m}=cte$



En los puntos de máximo acercamiento y alejamiento de una órbita elíptica (apoapsis/periapsis: Sol afelio / perihelio, Tierra apogeo/perigeo), al ser los vectores posición y velocidad perpendiculares la conservación del momento angular se puede plantear $mr_Av_A=mr_Pv_P$, que nos indica que cuando más próximo está al foco mayor es la velocidad, y nos sugiere la idea de velocidad areolar constante.

Velocidad areolar de modo práctico en problemas: área total órbita/periodo órbita (πr²/T ó πab/T), T → 3ª ley

1.5 Fuerzas conservativas

Los conceptos de Fuerza, Trabajo, Energía y Energía Cinética son previos a 2º Bachillerato y deben ser conocidos, no se repasan aquí. La E_p y E_m también han sido tratados aunque aquí se repasan y profundizan.
Se introduce primero el concepto de fuerzas conservativas para luego introducir el concepto de Energía potencial, que están muy relacionados. Se pueden plantear tres definiciones de fuerzas conservativas:
1.Conservan capacidad de realizar trabajo por el estado de movimiento, no varían la E_c si no varía posición
2.El trabajo realizado en trayectoria cerrada es nulo.
3.El trabajo realizado entre dos puntos no depende de la trayectoria, solamente de los puntos inicial y final.

1.6 Energía potencial

Cualitativamente es la energía asociada a que un cuerpo se encuentre en cierta posición donde existen fuerzas conservativas. Sólo en el caso de fuerzas conservativas se puede definir energía potencial (Se usa U ó E_p)

$$\Delta E_p \, entre\, A\, y\, B = E_p(B) - E_p(A) = -W_{A\to B} \, realizado\, por\, las\, fuerzas\, conservativas$$

Gran ventaja: para calcular trabajo en lugar de una integral con vectores usamos una resta de escalares.
Se miden diferencias de E_p entre 2 puntos: para asignar un valor de E_p en un punto debemos asigar valor 0 a un punto concreto que se toma como referencia.

$$W=\int_1^2 \vec{F}_c\, d\vec{r} = U_1 - U_2 = -(U_2 - U_1) = -\Delta U \,(se\, usa\, U\, ó\, E_p)$$

Nota: aunque sea obvio, recordar que los incrementos Δ siempre son "valor final menos valor inicial"
La energía potencial no tiene una expresión general como la E_c, depende tipo fuerza conservativa asociada.

1.7 Energía mecánica

$E_m = E_c + E_p$ Puede haber energías potenciales de varios tipos al tiempo, como gravitatoria y elástica.
Como por el teorema de las fuerzas vivas $W=\Delta E_c$ y como por definición $W=-\Delta E_p$, si todas las fuerzas son conservativas $W=\Delta E_c = -\Delta E_p \Rightarrow \Delta(E_c + E_p) = \Delta E_m = 0$
Se cita como Teorema de conservación de la Energía Mecánica: Si las fuerza son conservativas $\Delta E_m = 0$

1.8 Energía potencial gravitatoria

Lo planteamos para 2 partículas; qué E_p tiene una partícula respecto a otra
Tomamos como referencia las posiciones infinitamente alejadas a las que asignamos $U(\infty) = E_p(\infty) = 0$
Con ese criterio, podemos plantear una expresión para la E_p en un punto (la deducción aparte):

$$U(r) = E_p(r) = -G\frac{M m}{r} \qquad \Delta E_p = E_p(B) - E_p(A) = -G M m\left(\frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A}\right)$$

Con E_p=0 en ∞, $E_p(r) = E_p(r) - E_p(\infty) = \Delta E_p \, entre\, \infty\, y\, r = -W_{\infty\to r} = W_{r\to\infty}$; la E_p en un punto es:
-El trabajo realizado contra el campo para traer una partícula desde el infinito a ese punto.
-El trabajo realizado por el campo para llevar una partícula desde ese punto al infinito.
Nota: deducimos expresión, teniendo en cuenta que para eliminar vectores de fuerza y desplazamiento, hay que realizar su producto escalar, e interviene un signo según el sentido de la fuerza. Si la integral es desde ∞ a r, fuerza tiene sentido opuesto a $\vec{dr} = dr\, \vec{u}_r$ por lo que el coseno introduce un signo negativo.

$$E_p(r) = -\int_\infty^r \vec{F}\, d\vec{r} = -\int_\infty^r \left|-G\frac{M m}{r^2}\right| |dr|(-1) = \int_\infty^r G\frac{M m}{r^2}\, dr = \left[\frac{-GMm}{r}\right]_\infty^r = \frac{-GMm}{r}$$

Se ve que en el caso gravitatorio la E_p siempre es negativa: el trabajo (para traer la partícula desde la referencia en ∞) siempre es positivo porque lo hace el campo, y se le cambia el signo.
En el caso gravitatorio se puede ver como se tiende a energías menores, diferencias E_p negativa.
*Nota: para más partículas se usa **principio de superposición**, sumar las E_p tomadas de dos en dos.*

1.9 Signos de Trabajo y Energía potencial

Cualitativamente se pueden interpretar los signos de las variaciones de E_p (también con los signos de la propia E_p que son variaciones respecto a la referencia tomada). Se detalla más al tratar el concepto de **campo** gravitatorio, y de nuevo al tratar campo eléctrico, donde signo depende de más cosas que en gravitación.
Nota: en termodinámica IUPAC fija mismo criterio de signos que en mecánica: el trabajo aportado a un sistema es positivo (el sistema gana energía) y el trabajo realizado por el sistema es negativo (el sistema pierde energía). ¿Qué es el sistema sobre el que actúa el campo? La partícula bajo la acción del campo.
Si el campo lo realiza, W es positivo: le aportaría E_c a la partícula (perdiendo E_p, ejemplo piedra que cae).
Si el trabajo se realiza externamente contra el campo, es negativo: le restaría E_c a la partícula (aumentando su E_p, podemos pensar en un lanzamiento vertical de una piedra)
Se puede resumir en dos líneas:

- ΔE_p positiva, W negativo, el trabajo se realiza externamente contra el campo
- ΔE_p negativa, W positivo, el trabajo lo realiza el campo

1.10 Energía potencial gravitatoria terrestre

Estamos acostumbrados a ver la expresión $E_p=mgh$; se trata de una aproximación para alturas pequeñas.
$\Delta E_p = E_p(B) - E_p(A) = mgh$ Donde $g=GM/R_T^2$ y $h<<R_T$, para poder aproximar $h/R_T \approx 0$, siendo h la diferencia de altura entre B y A, con lo que si A el punto más bajo/B es el más alto, h y ΔE_p son positivas.
La expresión da diferencias de E_p, y toma referencia en punto distinto de ∞, que es el punto elegido con h=0, y por eso sí es posible que existan energías potenciales positivas.
>La demostración de la expresión como aproximación y su rango de validez se incluye como anexo
>Par campo constante, se puede ver la analogía entre la expresión gravitatoria $\Delta E_p=mgh$ y la expresión electrostática $\Delta E_p=qEd$

1.11 Aplicaciones Teoría Gravitación Universal. Movimiento de satélites y cohetes.

Importante/ojo en problemas: distinguir radio de la órbita frente a la altura de órbita sobre superficie planeta.

R órbita=R superficie + h

1.11.1 Periodo de revolución y velocidad orbital

Para el caso de órbita estable circular, podemos plantear de manera análoga a la 3ª ley de Kepler

$$F_c = F_g \rightarrow v = \sqrt{\left(\frac{GM}{R_o}\right)};\ \omega = 2\frac{\pi}{T} = v R_o;\ T = 2\pi\sqrt{\left(\frac{R_o^3}{GM}\right)}$$

1.11.2 Determinar masa de cuerpos celestes

La tercera ley de Kepler permite resolver problemas donde conocidos dos elementos de los tres relacionados se puede determinar el tercero (período del objeto que orbita, radio de su órbita, masa del objeto central)

1.11.3 Energía y velocidad de lanzamiento y de escape

Aplicamos la conservación de la Energía mecánica; igualamos Energía mecánica en los dos puntos, para alcanzar altura h (en el punto más alto $E_c=0$)

$$v_L = \sqrt{2GM\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R+h}\right)}$$

El significado físico de la velocidad de escape es la velocidad que debería tener un cuerpo a una distancia R, con la dirección adecuada, para escapar del campo gravitatorio, es decir, llegar al infinito con velocidad nula. Utilizando el principio de conservación de la energía y teniendo en cuenta que en el infinito la E_p y E_c son nulas (también se puede ver como un lanzamiento con h=∞)

$$E_e = G\frac{Mm}{R} \qquad v_e = \sqrt{2G\frac{M}{R}}$$ En el caso de la Tierra y en superficie: $$v_e = \sqrt{2 g_0 R_T} = 11{,}2\, km/s$$

>A veces surge la duda: los lanzamientos de cohetes no se hacen a esa velocidad, sino a velocidades mucho menores ¿cómo es posible? Hay que tener claro que la velocidad de lanzamiento y de escape es la velocidad que habría que dar inicialmente, sin impulso adicional. En un lanzamiento real, el cohete tiene unos motores que van aportando energía cinética durante la subida, no toda se tiene inicialmente.

1.11.4 Energía y órbitas

En órbita estable circular podemos igualar F_c y F_g, obtener la velocidad y llegar a expresiones de E_c y E_m:

$$E_c = \frac{|E_p|}{2} = \frac{1}{2}G\frac{Mm}{R_o}$$ La mitad en valor absoluto que la E_p, y siempre es positiva.

$$E_m = E_c + E_p = \frac{E_p}{2} = -E_c = \frac{-1}{2}G\frac{Mm}{R_o}$$ La mitad en valor que la E_p, y siempre es negativa.

La expresión E_m válida para órbitas elípticas si R se sustituye por el semieje mayor de la elipse.
En una órbita circular la Ec es constante, pero no en una órbita elíptica, aunque sí que es constante la Em, ya que solamente hay fuerzas conservativas y podemos aplicar la conservación de la Energía mecánica.
Energía en el cambio de órbita: diferencia de las Energías mecánicas en cada una de las órbitas (al cambiar la órbita no solamente cambia la E_p, también la E_c al cambiar la v necesaria para órbita estable).
Energía y velocidad de satelización: energía a aportar a un cuerpo a una distancia R para ponerlo en órbita a distancia R_O. La diferencia de energía mecánica entre ambas situaciones.

$$E_s = GMm\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{2R_O}\right) \qquad v_s = \sqrt{2GM\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{2R_O}\right)}$$ Si $R=R_O$; $$E_s = \frac{1}{2}G\frac{Mm}{R} \qquad v_s = \sqrt{G\frac{M}{R}} = \sqrt{2}\, v_e$$

Nota: se suele considerar $R=R_T$, con E_c nula en la rampa de lanzamiento, al tiempo que la velocidad en órbita se calcula respecto a un sistema de referencia en el centro de la Tierra. Respecto a ese sistema la superficie de la Tierra y los objetos que están en ella tienen movimiento y cierta E_c. La energía de

satelización si el planeta no gira sobre su eje es distinta a si el planeta sí gira (en el límite, si el planeta girase muy deprisa sobre su eje, podría haber una energía de satelización muy pequeña).
Caso habitual: **órbitas geoestacionarias**: en plano ecuatorial, T=24 h. Satélites comunicaciones.

2. Campo gravitatorio

2.1 La acción a distancia y el concepto físico de campo

Concepto esencial en física introducido para explicar la acción a distancia, considerando que una fuente crea una perturbación en el espacio que asigna a cada punto del espacio un valor de una magnitud física, como puede ser una fuerza, por lo que se habla de campo vectorial o de fuerzas. Vemos campo clásico: instantáneo. La interacción es en 2 pasos: primero fuente crea el campo, y luego el campo el que interacciona con cuerpo.
En el caso habitual de **campos de fuerzas** (como va a ser el campo gravitatorio), se usa el concepto de **líneas de campo**: son líneas representadas de forma que indican el vector campo; dirección es tangente a ellas, sentido mediante flechas en las líneas, y módulo mediante densidad de líneas; el número de líneas por unidad de superficie es proporcional al campo.

2.2 Campo gravitatorio. Campo gravitatorio terrestre.

El campo gravitatorio es el creado por una masa que interacciona con las masas presentes en él generando fuerzas. El campo gravitatorio terrestre es el generado por la Tierra: externamente se puede considerar generado por una masa puntual con el total de la masa Terrestre. Su valor promedio en módulo en superficie se denomina g (comentado al ver energía potencial gravitatoria terrestre). Vectorialmente está dirigido hacia el centro de la Tierra.

2.3 Intensidad del campo gravitatorio

Un vector para cada punto del espacio, nos permite obtener la fuerza gravitatoria asociada a una masa.

$$\vec{E}_g=\frac{\vec{F}}{m}=-G\frac{M}{r^2}\cdot\vec{u}_r ;\, Unidades\, N/kg\, ó\, m/s^2$$ Se suele usar letra g $$\vec{g}=-G\frac{M}{r^2}\vec{u}_r \qquad \vec{F}=\vec{E}_g\cdot m$$

En la superficie de la Tierra, usando su R_T=6370 km y M_T,=5,98·10^{24} kg, |g|=9,8 m/s^2, aunque su valor exacto depende del punto, ya que no es una esfera perfecta.

2.4 Potencial del campo gravitatorio

Un escalar para cada punto del espacio. Al unir puntos de mismo valor se tienen superficies equipotenciales.

$$V(\infty)=0\rightarrow V_A=\frac{W_A}{m}=\frac{U_A}{m}=-G\frac{M}{r_A} ;\, Unidades\, J/kg$$

$$\Delta V=V(B)-V(A)=\frac{W_{AB}}{m}=-GM\left(\frac{1}{r_B}-\frac{1}{r_A}\right)$$

Típico representar E_p ó V vs r.

2.5 Gradiente: relación intensidad de campo y potencial del campo gravitatorio

$$grad\, V=\frac{\partial V}{\partial r}=-\vec{E}_g$$

Gradiente del potencial (un escalar) es un vector, perpendicular a las superficies equipotenciales, tiene dirección de las líneas de campo pero sentido contrario al campo. Indica la dirección en la que el campo cambia más rápidamente.

3. Anexos/temas para profundizar

3.1 Demostración de la aproximación E_p=mgh y rango de validez

Si tomamos $r_A=R_T$ y $r_B=R_T+h$, y $h<<R_T \rightarrow R_T h<<R_T^2$, podemos plantear

$$\Delta E_p=G\frac{Mm}{r_B}-G\frac{Mm}{r_A}=GMm\left(\frac{1}{R_T}-\frac{1}{R_T+h}\right)=mGM\left(\frac{h}{R_T^2+R_T h}\right)\approx mG\frac{M}{R_T^2}h=mgh$$

Miramos para qué valor de h el error cometido es el 1%

$$Error_{relativo}=\frac{Error_{absoluto}}{Valor_{real}}\cdot 100\Rightarrow 0{,}01=\frac{\frac{GMmh}{R_T}\left(\frac{1}{R_T+h}-\frac{1}{R_T}\right)}{\frac{GMmh}{R_T}\cdot\frac{1}{R_T+h}}=\frac{h\cdot(R_T+h)}{R_T^2+R_T h}=\frac{h^2+R_T h}{R_T^2+R_T h}$$

$$0{,}01\,R_T^2+0{,}01\,R_T h=h^2+R_T h\Rightarrow h^2+0{,}99\,R_T h-0{,}01\,R_T^2=0$$

$$Resuelto\, de\, manera\, general\; h=-R_T\; y\; h=\frac{R_T}{100},\; para\; R_T=6370\cdot 10^{3,}\; h=63700\, m$$

3.2 Problema de dos cuerpos frente a problema de múltiples cuerpos

Se ha tratado solamente el problema de dos cuerpos, que en mecánica clásica es reducible a un problema de un cuerpo equivalente (una masa sometida a un campo). De manera exacta hay que usar el centro de masas del sistema y la masa reducida, pero normalmente se considera un cuerpo muy masivo, se asume M>>m y que solamente un cuerpo es móvil, se tiene un sistema inercial en M. Para dos cuerpos en general se trata de un sistema resoluble, pero para el problema de los tres cuerpos (o más) no es resoluble en general.

3.3 Momento angular de sistemas de partículas, Momento de inercia

Se ha tratado solamente el modelo de partícula, pero si tenemos un sistema de partículas, este tiene momento angular de traslación y rotación, llevando al concepto de momento de inercia asociado al giro del sistema sobre un eje. Inercia a mantener o modificar la rotación del sistema.

3.4 Flujo de campo gravitatorio y ley de Gauss

Aunque la ley de Gauss se ve con campo eléctrico, debido a analogía entre ley gravitación ley Coulomb, hay analogía Gauss gravitacional $\oint \vec{g}\, d\vec{s} = -4\pi G M_{\mathrm{INT}}$

3.5 Tipos de trayectorias

Usando coordenadas polares se llega a cónica que depende de parámetros geométricos p y e=c/a, que pueden calcularse a partir parámetros físicos, como $|\vec{L}|$ y E. Los tipos de trayectorias son función de la E_m total objeto; E_p siempre negativa, y E_c siempre positiva: signo suma E_m indica relación valores absolutos.

-Si $E_m > 0$, ($v>v_e$, $e>1$) escapa de campo, llegando al infinito con velocidad no nula. **Hiperbólica.**

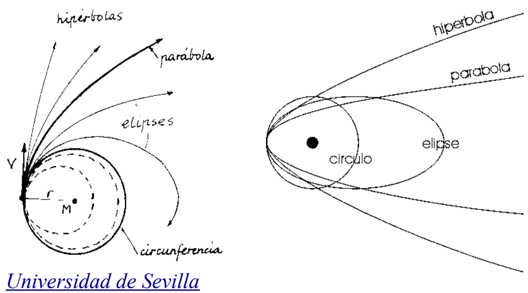
-Si $E_m = 0$ ($E_c = |E_p|$, $v=v_e$, $e=1$), escapa del campo, llegando al infinito sin velocidad (caso teórico, el tiempo que tardaría seria infinito). **Parabólica.** Su velocidad tiende a cero a medida que se aleja.

-Si $E_m < 0$, ($v<v_e$) el objeto queda atrapado en el campo gravitatorio. Se pueden dar 3 situaciones diferentes:

A. $\frac{-1}{2}|E_p| < E_c < |E_p|$ (0<e<1) Describe una órbita **elíptica**, aumentando la excentricidad de la elipse a medida que aumente la velocidad (energía cinética).

B . $\frac{1}{2}|E_p| = E_c$ (e=0) Describe una órbita **circular**.

C. $\frac{1}{2}|E_p| > E_c$ No describe ningún tipo de órbita y acaba colapsando contra el planeta.



Universidad de Sevilla

3.5 Otros temas

Basura espacial
Anomalías órbitas
Apoyo gravitacional
Gravitación y relatividad