T02-ÁLGEBRA: ECUACIONES DE PRIMER Y SEGUNDO GRADO

El objetivo del lenguaje algebraico tiene el mismo sentido: sustituir por símbolos, elementos de la vida cotidiana. Al relacionar dichos símbolos con cantidades conocidas, obtenemos las expresiones algebraicas. Alberto, en su tienda, está haciendo balance del número de calcetines que tiene en exposición. Y ha anotado en su cuaderno lo siguiente: 3 b + 7 n + 5 m, con ello tiene la información de que dispone en ese momento de 3 pares de calcetines blancos, 7 negros y 5 marrones. De esa forma, con unos pocos símbolos puede tener la información completa. Como veremos más adelante, si sustituimos las letras que aparecen por el precio de cada par de calcetines, puede saber exactamente cuánto puede ganar si los vende todos.
La parte de la matemática que estudia este tipo de expresiones se llama ÁLGEBRA.

ECUACIONES DE PRIMER GRADO
Poco se sabe de la vida de Diofanto, pero sí es posible conocer la duración de la misma gracias al epitafio que dejó escrito sobre su tumba.

> *"Transeúnte, esta es la tumba de Diofanto: es él quien con esta sorprendente distribución te dice el número de años que vivió. Su niñez ocupó la sexta parte de su vida; después, durante la doceava parte su mejilla se cubrió con el primer bozo. Pasó aún una séptima parte de su vida antes de tomar esposa y, cinco años después, tuvo un precioso niño que, una vez alcanzada la mitad de la edad de su padre, pereció de una muerte desgraciada. Su padre tuvo que sobrevivirle, llorándole, durante cuatro años. De todo esto se deduce su edad ."*

¿Sabrías escribir en lenguaje algebraico la expresión que ayuda a saber los años que vivió Diofanto? Utiliza ***x*** para representar la edad de Diofanto.

Alberto salió de compras acompañado de su socio. Llevaba en la cartera 300 euros, y a su regreso sólo le quedaban 120. La compra la había pagado a medias con su socio; se trataba de botes de pintura para adecentar el almacén. Cada lata les había costado 12 euros. El transporte les había costado 36 euros, que también pagaron a medias. Quería Alberto saber cuántas latas de pintura habían comprado. Y no teniendo ganas de bajar al almacén para contarlas, anotó en una hoja la siguiente expresión:

$$\frac{12x+36}{2}=300-120$$

Lenguaje cotidiano	Lenguaje algebraico
Nº de latas	x
12 € por lata. El costo del lote es	12x
Mas 36 € del transporte	12x+36
Alberto puso la mitad, el gasto es	(12x+36)/2
Por otra parte salio con 300 € y lleva 120, se ha gastado	300-120
Ambas cantidades deben de coincidir, es decir	(12x+36)/2=300-120

El mayor exponente al que esté elevado la incógnita x, x^2, x^3 ...se denomina grado de la incógnita. En caso de ser 1 se llaman de primer grado.

Ejemplo $\frac{2x+36}{2}=300-120$

Si el mayor grado de la incognita es 2, segundo grado.

Ejemplo $\frac{2x+36}{4}=300x^2$

El cuadrado de una suma : $(x + b)^2 = x^2 + 2bx + b^2$

El cuadrado de una diferencia: $(x - b)^2 = x^2 - 2bx + b^2$

La diferencia de cuadrados: $x^2 - b^2 = (x + b).(x - b)$

(La tendrás memorizada como "suma por diferencia igual a diferencia de cuadrados")

Vamos a ver los pasos generales a seguir en la resolución de ecuaciones de primer grado:
1º) Eliminación de paréntesis (cuidado con los signos menos antes del paréntesis)

$$x-\frac{3x}{4}=\frac{1}{3}\cdot(2x-1)+\frac{x}{6}$$

$$x-\frac{3x}{4}=\frac{2x}{3}-\frac{1}{3}+\frac{x}{6}$$

2º) Eliminar denominadores. Se calcula el m.c.m. y este se divide por cada uno de los denominadores multiplicando cada resultado por el numerador correspondiente.

$$x-\frac{3x}{4}=\frac{2x}{3}-\frac{1}{3}+\frac{x}{6}$$

$mcd(3,4,6)=mcd(3,2^2,2\cdot 3)=2^2\cdot 3=12$

Multiplicando la ecuación al completo por 12

$$12\cdot x-\frac{12\cdot 3x}{4}=\frac{12\cdot 2x}{3}-\frac{12\cdot 1}{3}+\frac{12\cdot x}{6}$$

$$12x-3\cdot 3x=4\cdot 2x-4+2x$$

3º) Operar: 12x-9x=8x-4+2x
4º) Transposición de términos. Pasar las "x" a un miembro y los términos sin "x" al otro.
(recuerda que lo que está en un término, pasa al otro con signo contrario)

$$12x-9x-8x-2x=-4$$

5º) Se despeja la "x" (El coeficiente de la "x" pasa dividiendo al otro miembro)

$$-7x=-4$$

$$x=\frac{-4}{-7}=\frac{4}{7}$$

Resuelve la ecuación

$$\frac{3x-1}{20}-\frac{2(x+3)}{5}=\frac{4x+2}{15}-5$$

Si un término está sumando en un miembro podemos pasarlo al otro restando y viceversa.
Si un término está multiplicando a todo un miembro de una ecuación se puede pasar al otro miembro dividiendo.

Los pasos que debes de seguir para resolver un problema son:

1. Identifica los datos y las incógnitas.
2. Elegir la incógnita, designarla con una letra y expresar los demás datos en función de ella.
3. Plantear la ecuación, traduciendo al lenguaje algebraico la igualdad que exista en el problema.
4. Resolver la ecuación planteada.
5. Comprobar que la solución obtenida cumple la ecuación de partida, para detectar posibles fallos de cálculo.
6. Interpretar los resultados obtenidos en relación al problema.
7. Comprobar los resultados obtenidos con el enunciado del problema.

a) Si a un número se le resta 1 el resultado es dos veces mayor que restándole 10. ¿de qué número se trata?
Solución:
El número es "x". Restando 1 es x-1 y esto es el doble que restándole 10, o sea 2(x-10); igualando x-1=2(x-10).
Resolviendo x-1=2x-20, por tanto despejando x=19. Veamos que la solución es la correcta.
Si a 19 le restamos 1, nos queda 18 y es el doble de 19-10=9.

b) La edad del padre es de 32 años y el hijo, 8. ¿Cuánto tiempo debe de transcurrir para que la edad del padre sea el doble que la del hijo?
Solución:
Si el tiempo que ha de transcurrir es **x**, cuando transcurra x años el padre tiene 32+x y el hijo 8+x. Como la del padre es el doble que la del hijo, queda la ecuación 32+x=2(x+8); resolviendo

x+32=2x+16; x=16 años. Comprobemos, dentro de 16 años las edades son 48 y 24 respectivamente se comprueba que el padre duplica en edad al hijo.

c) ¿Cuántos años vivio Diofanto? (Recuerda el problema planteado en el apartado 1)

d) Hallar un número que restándole 2 se obtiene como resultado el doble de la resta del número y 3.

EJERCICIOS DE ECUACIONES

Ejemplo:

Resuelve la ecuación $\frac{x-1}{5}+\frac{2}{3} = -\frac{x+3}{2}-\frac{-2}{-15}$

Lo primero que vamos a hacer es reducir a común denominador, para ello vamos a calcular el m.c.m(5,3,2,15) = 30.

$\frac{x-1}{5}+\frac{2}{3} = -\frac{x+3}{2}-\frac{-2}{-15} \Rightarrow \frac{6(x-1)}{30}+\frac{20}{30} = -\frac{15(x+3)}{30}-\frac{4}{30}$,

ahora que hemos reducido a común denominador la igualdad podemos eliminar los denominadores.

$6(x-1)+20 = -15(x+3)-(4) \Rightarrow 6x-6+20 = -15x-45-4 \Rightarrow$

$6x+14 = -15x-49 \Rightarrow 6x+15x = -49-14 \Rightarrow$

$21x = -63 \Rightarrow x = \frac{-63}{21} = -3$

Resuelve las ecuaciones siguientes:

1 $\frac{3x+1}{7} - \frac{2-4x}{3} = \frac{-5x-4}{14} + \frac{7x}{6}$

2 $\frac{4}{x-3} = \frac{5}{x-2}$

3 $6\left(\frac{x+1}{8} - \frac{2x-3}{16}\right) = 3\left(\frac{3}{4}x - \frac{1}{4}\right) - \frac{3}{8}(3x-2)$

4 $\frac{2}{3}\left[x - \left(1 - \frac{x-2}{3}\right)\right] + 1 = x$

Soluciones: 1 (x = ¼), 2 (x = 7), 3 (x = 5/3), 4 (X = -1)

PROBLEMAS DE APLICACIÓN DE ECUACIONES

1. Un padre tiene 35 años y su hijo 5. ¿Al cabo de cuántos años será la edad del padre tres veces mayor que la edad del hijo?
2. Si al doble de un número se le resta su mitad resulta 54. ¿Cuál es el número?
3. La base de un rectángulo es doble que su altura. ¿Cuáles son sus dimensiones si el perímetro mide 30 cm?
4. En una reunión hay doble número de mujeres que de hombres y triple número de niños que de hombres y mujeres juntos. ¿Cuántos hombres, mujeres y niños hay si la reunión la componen 96 personas?
5. Se han consumido 7/8 de un bidón de aceite. Reponemos 38 l y el bidón ha quedado lleno hasta sus 3/5 partes. Calcula la capacidad del bidón.
6. Una granja tiene cerdos y pavos, en total hay 35 cabezas y 116 patas. ¿Cuántos cerdos y pavos hay?

7. En una librería, Ana compra un libro con la tercera parte de su dinero y un cómic con las dos terceras partes de lo que le quedaba. Al salir de la librería tenía 12 €. ¿Cuánto dinero tenía Ana?
8. Las dos cifras de un número son consecutivas. La mayor es la de las decenas y la menor la de las unidades. El número es igual a seis veces la suma de las cifras. ¿Cuál es el número?
9. Las tres cuartas partes de la edad del padre de Juan excede en 15 años a la edad de éste. Hace cuatro años la edad del padre era doble de la edad del hijo. Hallar las edades de ambos.
10. Trabajando juntos, dos obreros tardan en hacer un trabajo 14 horas. ¿Cuánto tiempo tardarán en hacerlo por separado si uno es el doble de rápido que el otro?
11. Halla el valor de los tres ángulos de un triángulo sabiendo que B mide 40° más que C y que A mide 40° más que B.

Soluciones:

1. Al cabo de 10 años.
2. 36
3. Altura: 5 cm, Base: 10 cm
4. Hombres: 8, Mujeres: 16, Niños: 72
5. 80
6. Cerdos: 23, Pavos: 12
7. 54
8. 54
9. Edad de Juan: 36, Edad del padre:68.
10. Rápido: 21 horas, Lento: 42 horas
11. C = 20º, B = 60º, A =100º

PRUEBA DE ACCESO
A CICLOS FORMATIVOS DE GRADO SUPERIOR
JUNIO 2010
PARTE COMÚN APARTADO A3
MATEMÁTICAS

Duración: 1 hora 15 minutos.

1.- En un examen de biología aprueba el 52% del alumnado. Posteriormente, los suspendidos realizan una recuperación, aprobando el 25%. Si en total son 32 los aprobados,

a) ¿cuál es el porcentaje de aprobados?
b) ¿Cuántos alumnos/as son en total?

2.- En una ciudad, la tarifa diurna de los taxis es la siguiente: 1'30 € por la bajada de bandera (coste fijo) y 94 céntimos por cada kilómetro recorrido.

a) Calcula el coste de un recorrido de 7 km y 600 m. Redondea a las décimas la cantidad obtenida.
b) Averigua la función que nos da el coste del recorrido en € (en el horario mencionado) en función de los kilómetros recorridos.
c) Si un recorrido ha costado 6€, ¿cuántos km se había recorrido?

JUNIO 2011

1.- Las 3/4 partes de las plazas de un avión son de clase preferente y el resto de clase turista. El 40% de las plazas de clase preferente y el 70% de las de clase turista están ocupadas y el resto vacías.
Si el total de plazas ocupadas son 228. ¿Cuál es el número total de plazas del avión?

3.- Una compañía de coches de alquiler tiene dos tipos de ofertas:

Tipo A: un fijo de 60 € al día, más 0,50 euros por km recorrido.

Tipo B: 0,65 € por km recorrido.

a) Si queremos recorrer, en un día, 420 km, ¿cuál es el coste en cada oferta?

b) Si para hacer un recorrido, en un día, hemos elegido la primera oferta y nos hemos gastado 218 €, ¿cuántos km hemos recorrido?

c) ¿Cuántos km tenemos que recorrer para gastarnos, en un solo día, lo mismo en las dos ofertas?

JUNIO 2013

1. Compramos 100 kg de café por 485 euros. Tostarlos cuesta 95 euros, produciéndose una merma de 1/5 de su peso.

a) Si vendemos todo el café tostado, ¿cuál será el precio del kilo para obtener un beneficio del 12%?

b) Si vendemos el café tostado y fijamos su precio en 8 euros/kilo ¿cuál será el porcentaje de beneficio previsto? En este caso, ¿cuántos kg deberíamos vender, como mínimo, para no tener pérdidas?

2.

a) ~~Resuelve la ecuación:~~

$$\cancel{\frac{-18}{x^2-11} = x^2}$$

b) Cuando un senderista lleva recorridos los 3/7 de un camino aún le quedan 11,6 km por recorrer. Calcula razonadamente la longitud del camino.

JUNIO 2014

1.- a) En un establecimiento aplicaron sobre un producto un descuento del 25% y, posteriormente, sobre este precio rebajado, aplicaron otro descuento del 16%. Calcula el precio que costaba originalmente un producto que con los dos descuentos se quedó en 189 euros.

b) Cuando una balsa de riego está llena hasta sus 3/7 partes, todavía le faltan 258 m^3 para que quede completamente llena. Calcula la capacidad total de esta balsa.