T02-ÁLGEBRA: ECUACIONES DE PRIMER Y SEGUNDO GRADO

Algunos problemas divertidos

1. Divide 30 por 1/2 y suma 10. ¿Cuál es el resultado?
2. Juntos perro y gato pesan 15 kilos. Si el peso del can es un número impar, y si el macho pesa el doble que la hembra, ¿cuánto pesa cada uno?
3. Se encuentran dos viajeros en un tren y entablan una conversación:
   Tengo tres hijos. El producto de sus edades es 36 y la suma, el mismo número del asiento en el que estás.
   Hay dos soluciones pero ¿los mayores son los gemelos?
   No, los chicos.
   Entonces, ya se la solución.
   ¿Cuáles son las edades de los tres hijos?, y ¿por qué pregunta eso?

Soluciones al final

Sistemas de ecuaciones de primer grado

Sistemas de ecuaciones con dos incógnitas

Dos ecuaciones con dos incógnitas forman un sistema, cuando lo que pretendemos de ellas es encontrar su solución común.

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$$

La solución de un sistema es un par de números x_1, y_1, tales que reemplazando x por x_1 e y por y_1, se satisfacen a la vez ambas ecuaciones.

Ejemplo:

$$\begin{cases} 3x - 4y = -6 \\ 2x + 4y = 16 \end{cases}$$

x = 2, y = 3

$$\begin{cases} 3 \cdot 2 - 4 \cdot 3 = -6 \\ 2 \cdot 2 + 4 \cdot 3 = 16 \end{cases} \qquad \begin{cases} 6 - 12 = -6 \\ 4 + 12 = 16 \end{cases} \qquad \begin{matrix} -6 = -6 \\ 16 = 16 \end{matrix}$$

Sistemas equivalentes. Criterios de equivalencia

1º Si a ambos miembros **de una ecuación de un sistema** se les suma o se les resta una misma expresión**, el** sistema **resultante es** equivalente**.**

$$\begin{cases} 3x - 4y = -6 \\ 2x + 4y = 16 \end{cases} \begin{cases} 3x - 4y + 3 = -6 + 3 \\ 2x + 4y - 5y = 16 - 5y \end{cases}$$

x = 2, y = 3

2º Si multiplicamos o dividimos ambos miembros **de las ecuaciones de un sistema** por un número distinto de cero**, el** sistema **resultante es** equivalente**.**

$$\begin{cases} 3x - 4y = -6 \\ 2x + 4y = 16 \end{cases} \begin{cases} 3 \cdot (3x - 4y) = -6 \cdot 3 \\ \dfrac{2x + 4y}{2} = \dfrac{16}{2} \end{cases}$$

x = 2, y = 3

3º Si sumamos o restamos a una ecuación **de un sistema otra ecuación** del mismo sistema**, el** sistema **resultante es** equivalente **al dado.**

$$\begin{cases} 3x - 4y = -6 \\ 2x + 4y = 16 \end{cases} \begin{cases} 3x - 4y = -6 \\ 2x + 4y + 3x - 4y = 16 - 6 \end{cases}$$

x = 2, y = 3

4º Si en un sistema se sustituye una ecuación por otra que resulte de sumar las dos ecuaciones del sistema previamente multiplicadas o divididas por números no nulos, resulta otro sistema equivalente al primero.

$$\begin{cases} 3x - 4y = -6 \\ 2x + 4y = 16 \end{cases} \qquad \begin{cases} 3x - 4y = -6 \\ \dfrac{2x + 4y}{2} = \dfrac{16}{2} \end{cases} \qquad \begin{cases} 3x - 4y = -6 \\ x + 2y = 8 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x - 4y + x + 2y = -6 + 8 \\ x + 2y = 8 \end{cases} \qquad \begin{cases} 4x - 2y = 2 \\ x + 2y = 8 \end{cases} \qquad x = 2, \quad y = 3$$

5º Si en un sistema se cambia el orden de las ecuaciones o el orden de las incógnitas**, resulta otro** sistema equivalente**.**

$$\begin{cases} 3x - 4y = -6 \\ 2x + 4y = 16 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x + 4y = 16 \\ 3x - 4y = -6 \end{cases} \qquad x = 2, \; y = 3$$

$$\begin{cases} 3x - 4y = -6 \\ 2x + 4y = 16 \end{cases} \qquad \begin{cases} -4y + 3x = -6 \\ 4y + 2x = 16 \end{cases} \qquad x = 2, \; y = 3$$

Método de sustitución

1. Se despeja una incógnita en una de las ecuaciones.
2. Se sustituye la expresión de esta incógnita en la otra ecuación, obteniendo un ecuación con una sola incógnita.
3. Se resuelve la ecuación.
4. El valor obtenido se sustituye en la ecuación en la que aparecía la incógnita despejada.
5. Los dos valores obtenidos constituyen la solución del sistema.

Ejemplo:

$$\begin{cases} 3x - 4y = -6 \\ 2x + 4y = 16 \end{cases}$$

1. Despejamos una de las incógnitas en una de las dos ecuaciones. Elegimos la incógnita que tenga el coeficiente más bajo.

$$2x = 16 - 4y \qquad x = 8 - 2y$$

2. Sustituimos en la otra ecuación la variable x, por el valor anterior:

$$3(8 - 2y) - 4y = -6$$

3. Resolvemos la ecuación obtenida:

$$24 - 6y - 4y = -6 \qquad -10y = -30 \qquad y = 3$$

4. Sustituimos el valor obtenido en la variable despejada.

$$x = 8 - 2 \cdot 3 = 8 - 6 \qquad x = 2$$

5. Solución

$$x = 2, \; y = 3$$

Método de igualación

1. Se despeja la misma incógnita en ambas ecuaciones.
2. Se igualan las expresiones, con lo que obtenemos una ecuación con una incógnita.
3. Se resuelve la ecuación.
4. El valor obtenido se sustituye en cualquiera de las dos expresiones en las que aparecía despejada la otra incógnita.
5. Los dos valores obtenidos constituyen la solución del sistema.

Ejemplo:

$$\begin{cases} 3x - 4y = -6 \\ 2x + 4y = 16 \end{cases}$$

1 Despejamos, por ejemplo, la incógnita **x** de la primera y segunda ecuación:

$$3x = -6 + 4y \qquad x = \frac{-6 + 4y}{3}$$

$$2x = 16 - 4y \qquad x = \frac{16 - 4y}{2}$$

2 Igualamos ambas expresiones:

$$\frac{-6 + 4y}{3} = \frac{16 + 4y}{2}$$

3 Resolvemos la ecuación:

$$2(-6 + 4y) = 3(16 - 4y) \qquad -12 + 8y = 48 - 12y$$

$$8y + 12y = 48 + 12 \qquad 20y = 60 \qquad y = 3$$

4 Sustituimos el valor de **y**, en una de las dos **expresiones** en las que tenemos**despejada la x**:

$$x = \frac{-6 + 4 \cdot 3}{3} = \frac{-6 + 12}{3} \qquad x = 2$$

5 Solución:

$$x = 2, \quad y = 3$$

Método de reducción

1. Se preparan las dos ecuaciones, multiplicándolas por los números que convenga.
2. La restamos, y desaparece una de las incógnitas.
3. Se resuelve la ecuación resultante.
4. El valor obtenido se sustituye en una de las ecuaciones iniciales y se resuelve.
5. Los dos valores obtenidos constituyen la solución del sistema.

Ejemplo:

$$\begin{cases} 3x - 4y = -6 \\ 2x + 4y = 16 \end{cases}$$

Lo más fácil es suprimir la y, de este modo no tendríamos que preparar las ecuaciones; pero vamos a optar por suprimir la x, para que veamos mejor el proceso.

$$\begin{cases} 3x - 4y = -6 \xrightarrow{x2} \\ 2x + 4y = 16 \xrightarrow{x(-3)} \end{cases} \begin{cases} 6x - 8y = -12 \\ -6x - 12y = -48 \end{cases}$$

Restamos y resolvemos la ecuación:

$$\begin{cases} \cancel{6x} - 8y = -12 \\ \cancel{-6x} - 12y = -48 \end{cases}$$

$$-20y = -60 \qquad y = 3$$

Sustituimos el valor de y en la segunda ecuación inicial.

$$2x + 4 \cdot 3 = 16 \qquad 2x + 12 = 16 \qquad 2x = 4 \qquad x = 2$$

Solución:

$x = 2, \; y = 3$

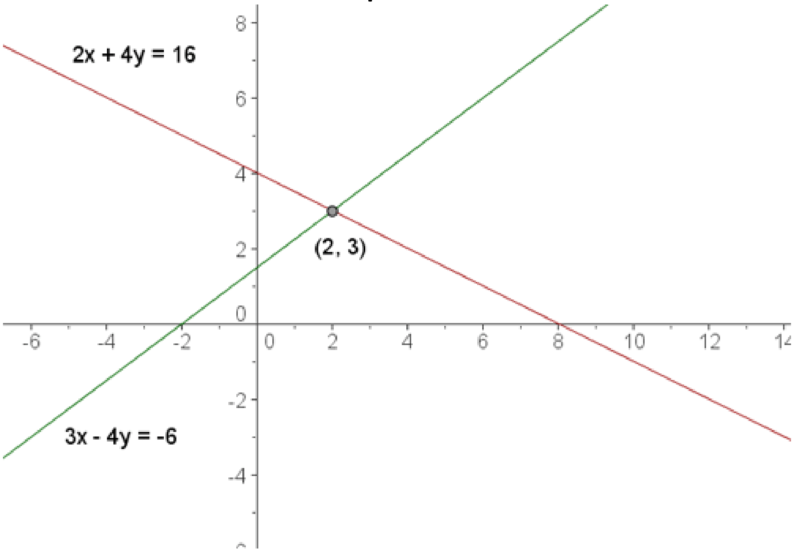
Clasificación de sistemas de ecuaciones

1. Sistema compatible determinado. Tiene una sola solución.

$$\begin{cases} 3x - 4y = -6 \\ 2x + 4y = 16 \end{cases}$$

x = 2, y = 3

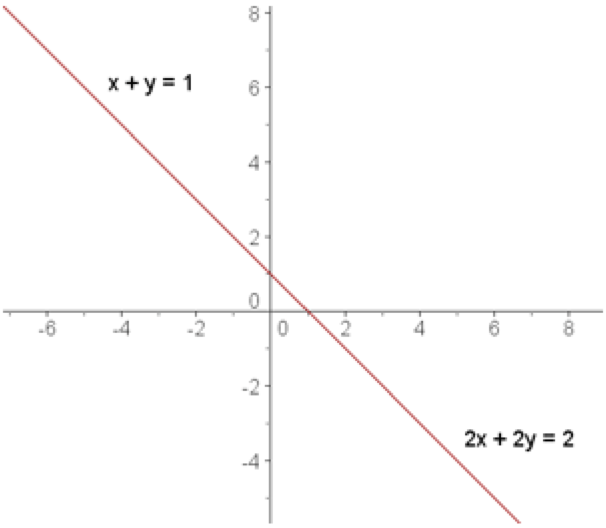
Gráficamente la solución es **el punto de corte de las dos rectas.**



2.Sistema compatible indeterminado. El sistema tiene infinitas soluciones.

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ 2x + 2y = 2 \end{cases} \qquad \begin{cases} -2x - 2y = -2 \\ 2x + 2y = 2 \end{cases}$$
$$0 = 0$$

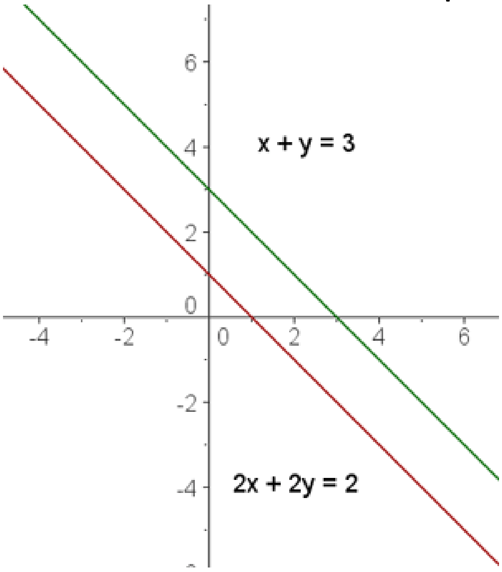
Gráficamente obtenemos **dos rectas coincidentes**. Cualquier punto de la recta es solución.



3. Sistema incompatible. No tiene solución

$$\begin{cases} x + y = 3 \\ 2x + 2y = 2 \end{cases} \qquad \begin{cases} -2x - 2y = -6 \\ 2x + 2y = 2 \end{cases}$$
$$0 = -4$$

Gráficamente obtenemos **dos rectas paralelas.**



EJERCICIOS

Resuelve los sistemas de ecuaciones en cada caso:

1 $\begin{cases} 3x + y = 7 \\ x + y = 1 \end{cases}$

2 $\begin{cases} x + y = 20 \\ 2x - 2y = 8 \end{cases}$

3 $\begin{cases} 3x + y = -1 \\ -3x + 2y = 7 \end{cases}$

4 $\begin{cases} 3x + 3y = 6 \\ x - 2y = 4 \end{cases}$

Asocia a cada uno de estos problemas el sistema de ecuaciones que usarías para resolverlo:

5 Pablo compra en una tienda de segunda mano un videojuego de fútbol y dos de boxeo por 55 €. Andrea compra en la misma tienda tres de fútbol y uno de boxeo por 90 €.

6 María y Alex son hermanos y entre los dos suman 19 años. Sabiendo que la edad de María menos uno es igual a la mitad de la edad de Alex.

Problemas

1 Juan compró un ordenador y un televisor por 2000 € y los vendió por 2260 €. ¿Cuánto le costó cada objeto, sabiendo que en la venta del ordenador ganó el 10% y en la venta del televisor ganó el 15%?

2 ¿Cuál es el área de un rectángulo sabiendo que su perímetro mide 16 cm y que su base es el triple de su altura?

3 Una granja tiene pavos y cerdos, en total hay 58 cabezas y 168 patas. ¿Cuántos cerdos y pavos hay?

4 Antonio dice a Pedro: "el dinero que tengo es el doble del que tienes tú", y Pedro contesta: "si tú me das seis euros tendremos los dos igual cantidad". ¿Cuánto dinero tenía cada uno?

5 En una empresa trabajan 60 personas. Usan gafas el 16% de los hombres y el 20% de las mujeres. Si el número total de personas que usan gafas es 11. ¿Cuántos hombres y mujeres hay en la empresa?

6 La cifra de las decenas de un número de dos cifras es el doble de la cifra de las unidades, y si a dicho número le restamos 27 se obtiene el número que resulta al invertir el orden de sus cifras. ¿Cuál es ese número?

$\boxed{7}$ Por la compra de dos electrodomésticos hemos pagado 3500 €. Si en el primero nos hubieran hecho un descuento del 10% y en el segundo un descuento del 8% hubiéramos pagado 3170 €. ¿Cuál es el precio de cada artículo?

$\boxed{8}$ Encuentra un número de dos cifras sabiendo que su cifra de la decena suma 5 con la cifra de su unidad y que si se invierte el orden de sus cifras se obtiene un número que es igual al primero menos 27.

Soluciones a los acertijos

1. Divide 30 por 1/2 y suma 10. ¿Cuál es el resultado?
   Treinta dividido por 1/2 es 60, así que cuando se le suman 10, da 70, que es la respuesta final.

2. Juntos perro y gato pesan 15 kilos. Si el peso del can es un número impar, y si el macho pesa el doble que la hembra, ¿cuánto pesa cada uno?
   El perro, una pequeña Pomerania llamada Henrietta, pesa 5 kilos, y el enorme gatazo llega a los 10. Si supusiste que el perro era "él" y el gato "ella", probablemente no llegaste a ningún lado.

3. Se encuentran dos viajeros en un tren y entablan una conversación:
- Tengo tres hijos. El producto de sus edades es 36 y la suma, el mismo número del asiento en el que estás.
- Hay dos soluciones pero ¿los mayores son los gemelos?
- No, los chicos.
- Entonces, ya se la solución.
¿Cuáles son las edades de los tres hijos?, y ¿por qué pregunta eso?
Asiento 13, Edades: 2, 2 y 9
