PROBABILIDAD

Introducción

Los fundamentos del cálculo de probabilidades surgen alrededor del año 1650, cuando sugerido por los juegos de dados, de cartas, del lanzamiento de una moneda, se planteó el debate de determinar la probabilidad de ganar la partida.
El caballero Mere escribe a Pascal en 1654 y le propone el siguiente problema: "Dos jugadores: Antonio y Bernardo, ponen sobre la mesa 10000 monedas cada uno. Un árbitro va a tirar un dado varias veces seguidas. Cada uno de los jugadores va a elegir un número entre el 1 y el 6. Antonio elige el 5 y Bernardo el 3. Se llevará las 20000 monedas aquel cuyo número salga primero tres veces. Resulta que después de unas cuantas tiradas el 5 ha salido dos veces y el 3 sólo ha salido una vez. En este momento Bernardo recibe un mensaje por el que debe abandonar necesariamente la partida. ¿Cómo repartir de modo justo y equitativo las 20000 monedas?" Pascal pensó mucho, escribió a su amigo Fermat y por diferentes caminos dieron ambos con la misma solución del problema y con un montón enorme de ideas: la Teoría de la Probabilidad había comenzado. Las obras más importantes a partir de entonces fueron debidas al suizo Jacob Bernoulli, con su "Ars conjectandi (1713) y más adelante al francés Pierre Simon de Laplace con su Teoría analítica de las probabilidades (1812).
A mediados del siglo XIX, un fraile agustino austríaco, Gregor Mendel, inició el estudio de la herencia, la Genética, con sus interesantes experimentos sobre el cruce de plantas de diferentes características. Su obra, La matemática de la Herencia, fue una de las primeras aplicaciones importantes de la Teoría de Probabilidad a las ciencias naturales.

Experimentos aleatorios

Cuando lanzamos un dado no sabemos qué número va a salir; sin embargo, si lanzamos una piedra al aire estamos seguros de que caerá al suelo. Es decir, en algunos experimentos podemos saber lo que va a ocurrir y en otros no.
1. A los experimentos en los cuales no sabemos lo que va a ocurrir se les llama experimentos aleatorios.
2. A los otros, aquellos en los que sí podemos decir lo que va a ocurrir, se les llama experimentos deterministas.
Un experimento es aleatorio si hay más de un resultado posible y no podemos decir con anterioridad lo que va a suceder. En este caso se dice que el resultado depende del azar.
Ejemplos:
Todos los juegos de azar son experimentos aleatorios. Como ejemplos podemos poner:
Lanzar una moneda al aire podrá salir cara o cruz.
Sacar una bola de una urna que contiene bolas de distinto color, si no vemos su interior,
Obtener una carta de una baraja, etc...

Espacio muestral

Al conjunto de todos los resultados que pueden obtenerse al realizar un experimento aleatorio se le llama espacio muestral y lo representaremos por E.

Ejemplos:
Consideremos los experimentos aleatorios siguientes:
Lanzar una moneda. Se puede obtener cara (que representaremos por C) o cruz (que representamos por X). El espacio muestral es E = { C, X }
Lanzar un dado de quinielas. Se puede obtener 1, X, 2. El espacio muestral es E = {1, X, 2}
Lanzar un dado. Se puede obtener uno de los números 1, 2, 3, 4, 5 ó 6 y el espacio muestral es E = { 1, 2, 3, 4, 5, 6 }
Obtener una carta de una baraja. Se puede obtener as, dos, tres, cuatro, cinco, seis, siete, sota, caballo o rey, de cada uno de los cuatro palos oros, copas, espadas y bastos. Es decir el espacio muestral estaría formado por 40 elementos que se corresponden con las cuarenta cartas de la baraja.
Girar la flecha de la rueda como la de la imagen. Se puede obtener 1, 2, 3 y 4. El espacio muestral es E = {1, 2, 3, 4}
Si lanzamos dos monedas el espacio muestral estaría formado por los posibles resultados de cara (C) o cruz (X) de cada una de las dos monedas y sería E = {(C,C); (C,X); (X,C); (X,X)}, es decir por cuatro elementos

Sucesos
En el experimento que consiste en lanzar un dado con las caras numeradas del 1 al 6, el espacio muestral será: E = {1, 2, 3, 4, 5, 6}
Consideramos ahora algunos subconjuntos de él, por ejemplo:
1. Salir par = {2, 4, 6}
2. Salir impar = {1, 3, 5}
A los subconjuntos del espacio muestral se les llama **sucesos**.
En todo experimento hay algunos sucesos destacados que reciben un nombre particular. Por ejemplo, si de una baraja nos quedamos sólo con los oros y extraemos una carta:
1. Es imposible que salga copas . A este suceso se le denomina: **Suceso Imposible**
2. Es seguro que salga oros. A este suceso se le denomina: **Suceso Seguro**
3. Si sacamos una carta de la baraja completa, ¿puede ser a la vez oro y copas?. No, porque no hay una carta de dos palos a la vez. En este caso hablaremos de: **Sucesos incompatibles**
4. Si sacamos una carta de toda la baraja, ¿puede ser que salga espadas y rey a la vez? Sí, porque cuando sacamos una carta puede ser de cualquier palo y de cualquier valor. A estos sucesos se les denomina: **Sucesos compatibles**
Ejemplos:
Veamos otros ejemplos de sucesos en el experimento de lanzar un dado al aire, cuyo espacio muestral es E = {1, 2, 3, 4, 5, 6}. A cada suceso o subconjunto del espacio muestral lo vamos a nombrar indistintamente con letras mayúsculas que no coincida con la letra E.
Si queremos representar el suceso de obtener un número menor que 3. Lo representamos por: A = {1,2},
Si queremos representar el suceso de obtener un 6. Lo representamos por: C = {6}. En este caso a este suceso se le denomina **suceso elemental** porque consta de un solo elemento del espacio muestral. Un suceso que no es elemental, es decir que tiene más de un elemento, se denomina **suceso compuesto**.
El suceso de obtener un número primo sería B = {1,2,3,5}
Al suceso de obtener un número menor que 9, se le denomina **suceso seguro** porque al tirar un dado al aire, seguro que ocurre que nos salga un número menor que 9. En este caso el suceso A = {obtener un número menor que 9} = {1, 2, 3, 4, 5, 6} = E. Los sucesos seguros coinciden con el espacio muestral.
Al suceso de obtener un número mayor que 19 se le denomina **suceso imposible**, porque al tirar un dado al aire nunca ocurrirá que nos salga un número mayor que 19. En este caso el suceso D = {Obtener un número mayor que 19} = {Ø}. Los sucesos imposibles no contienen elementos y lo representamos por el Ø, símbolo del conjunto vacío.

Un ejemplo de dos sucesos incompatibles sería:
A = {Obtener número múltiplo de 3} = {3,6}
B = {Obtener número menor que 3} = {2, 6}
Estos sucesos no se pueden cumplir simultáneamente si tiramos un dado al aire, no tienen elementos comunes. Por eso se denominan sucesos incompatibles.

Un ejemplo de dos sucesos compatibles sería:
A = {Obtener un número par} = {2,4,6}
B = {Obtener un múltiplo de 3} = {3, 6}
Los dos sucesos pueden ocurrir simultáneamente si al tirar un dado sale el número 6. Por tanto se denominan sucesos compatibles.

Sucesos equiprobables
Hay experimentos aleatorios en los cuales los sucesos elementales tienen la misma posibilidad de salir, por ejemplo lanzar una moneda, lanzar un dado, etc. Otros, como por ejemplo, que en Badajoz llueva un día del mes de agosto, o un día del mes de abril, no tienen la misma probabilidad de ocurrir (parece más probable que llueva en abril a que lo haga en pleno verano).
Definición:
A los sucesos elementales de un espacio muestral que tienen la misma probabilidad de ocurrir se les denomina sucesos **equiprobables**.
En una tómbola hay mil papeletas, Juan ha comprado 1 papeleta y Ana ha comprado 4 papeletas. ¿Qué probabilidad de ganar tiene cada uno? Todas las papeletas tienen la misma oportunidad de ganar, por lo tanto, es un experimento aleatorio equiprobable. Como todos los números vendidos son equiprobables, y Juan tiene una papeleta de las 1000 vendidas, decimos que:

Juan tiene 1 oportunidad entre 1000: P(Juan) = 1/1000
Ana tiene 4 oportunidades entre 1000: P(Ana) = 4/1000

Probabilidad de un suceso. Regla de Laplace
La probabilidad de un suceso A, se representa por P(A) y se entiende como la posibilidad de que ocurra dicho suceso. Laplace encontró la ley que determina la probabilidad de que ocurra un suceso en un experimento equiprobable.
Ejemplos

La probabilidad de obtener un número par al lanzar un dado es:
Casos posibles = E= {1, 2, 3, 4, 5, 6}, es decir 6 casos
Casos favorables = {2, 4, 6}, es decir 3 casos
P (sacar par) = nº de casos favorables / nº de casos posibles = 3/6 = 0,5 = 50%

La probabilidad de obtener dos caras al lanzar dos monedas es:
Casos posibles = E = {(C,C); (C,X); (X,C); (X,C)}, es decir 4 casos
Casos favorables = {(C,C)}, es decir 1 caso
P (dos caras) = ¼ = 0,25 = 25%

La probabilidad de sacar una bola blanca de una urna que contiene 2 bolas negras y 3 blancas es:
Casos posibles = {bola negra, bola negra, bola blanca, bola blanca, bola blanca}, es decir 5 casos
Casos favorables = {bola blanca, bola blanca, bola blanca}, es decir 3 casos
P (bola blanca) = 3/5 = 0,6 = 60%

Si decimos a un amigo que escriba un número del 1 al 10 y, sin verlo, decimos un número. La probabilidad de acertar es:
Casos posibles = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10}, es decir 10 casos.
Casos favorables = {el número que escribe el amigo}, es decir 1 caso
P (acertar) = 1/10 = 0,1 =10%

Probabilidad de que ocurra A o B
Una urna contiene 2 bolas rojas, 3 bolas negras y 5 bolas azules, todas del mismo tamaño. Consideremos el experimento de extraer una bola de la urna sin mirar.

a) Calcula la probabilidad de que ocurra cada uno de los siguientes sucesos:
-Salir una bola que no sea negra
-Salir una bola que no sea roja

b) ¿Qué relación hay entre las tres probabilidades calculadas en el apartado anterior?

c) Imagínate ahora una urna que contiene bolas del mismo tamaño y de distinto color: rojo, negro y blanco. No sabes cuántas hay de cada color, ni cuántas hay en total. Pero alguien te informa de las siguientes probabilidades: p(salir bola roja)=1/2 p(salir bola negra)=1/3 p(salir bola blanca)=1/6 ¿Cuánto suman las tres probabilidades?

Calcula la probabilidad de los siguientes sucesos:
Salir bola roja o negra
Salir bola roja o blanca
Salir bola negra o blanca

La probabilidad de que ocurra uno de los dos sucesos A o B, es igual a la SUMA de las probabilidades de que ocurra cada uno de ellos: P (A+B) = P (A) + P (B)
Para que esto sea así, los dos sucesos, A y B, tienen que ser INCOMPATIBLES

Probabilidad de que ocurra A y B
Supongamos que tenemos dos dados ¿cuál es la probabilidad de sacar dos 6 al tirar los dos dados? Estamos ante sucesos independientes.

La posibilidad de sacar un 6 en un dado es P (A) = 1/6. La posibilidad de sacar un 6 con el segundo dado es P (B) = 1/6. ¿Cuál es la probabilidad de que suceda a la vez?
La probabilidad de que ocurran a la vez dos sucesos A y B, es igual al PRODUCTO de las probabilidades de cada uno de ellos: P(A y B) = P(A) . P(B) = 1/6 . 1/6 = 1/36

EJERCICIOS DE AUTOCOMPROBACIÓN

1. Cuál es la probabilidad de sacar una cara al tirar una moneda
2. Cuál es la probabilidad de sacar dos caras al tirar dos monedas
3. Si tomamos una baraja de 40 cartas y una moneda, cual es la probabilidad de sacar una cara y de sacar un rey. tomando una carta y tirando una moneda a la vez
4. Cuál es la probabilidad que nos toque el premio (a los 5 números) de la ONCE si compramos un solo número
5. Y si no compramos ningún número. Es mucha la diferencia.
6. Cuál es la probabilidad de sacar de una baraja un rey o un oro
7. Cuál es la probabilidad de sacar en una baraja un rey y que sea de oros
8. Cuál es la probabilidad de sacar en una baraja copas o espadas
9. Cual es la probabilidad en una baraja de sacar reyes o sotas
10. Cuál es la probabilidad en una baraja de sacar una carta que esta sea oros o copas
11. Cuál es la probabilidad de tirar una moneda tres veces y que sacan tres caras.

7 SOLUCIONES DE LOS EJERCICIOS DE AUTOCOMPROBACIÓN

1. $P(cara) = \frac{1}{2}$

2 . $P(cara)P(Cara) = \frac{1}{2} * \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

3 . $P(cara)P(rey) = \frac{1}{2} * \frac{4}{40} = \frac{4}{80} = \frac{1}{20}$

4 . $P(54637) = \frac{1}{100000} = 0{,}00001$

5. $P(\sin comprar) = \frac{0}{100000} = 0$

7. $P(rey \quad de \quad oros) = \frac{1}{40}$

8 . $P(copas) = \frac{10}{40} \qquad P(espada) = \frac{10}{40}$

$P(copas) + P(espadas) = \frac{10}{40} + \frac{10}{40} = \frac{20}{40} = \frac{1}{2}$

9. $P(reyes) = \frac{4}{40} \qquad P(sotas) = \frac{4}{40}$

$P(reyes) + P(sotas) = \frac{4}{40} + \frac{4}{40} = \frac{8}{40} = \frac{2}{10}$

10 . $P(oros) = \frac{10}{40} \qquad P(copas) = \frac{10}{40}$

$P(oros) + P(copas) = \frac{10}{40} + \frac{10}{40} = \frac{20}{40} = \frac{1}{2}$

11. $P(cara)P(Cara)P(Cara) = \frac{1}{2} * \frac{1}{2} * \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$

EXÁMENES

1. Valencia, 2011

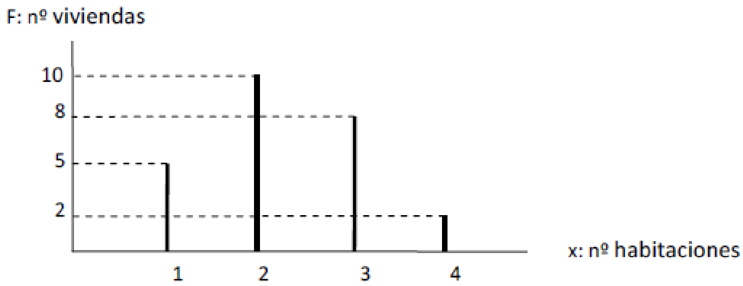
Las frecuencias del número de asignaturas suspendidas en una clase de 20 alumnos es:

x_i (número de asignaturas suspendidas)	0	1	2	3	4
F_i (frecuencias)	7	3	4	1	5

Calcula:
a) La media, la mediana y la moda de la distribución.
b) Si elegimos dos alumnos aleatoriamente, calcula la probabilidad de que ambos tengan sólo una asignatura suspendida.

2. Valencia, 2013

5. En un estudio sobre determinadas características sociológicas de un barrio, elegimos aleatoriamente 25 viviendas del mismo y computamos el número de habitaciones de cada una de ellas. El resultado viene representado en el siguiente diagrama de barras:



Calcular:

a. La media, la mediana y la moda del número de habitaciones de la muestra.

b. Si elegimos dos viviendas al azar, calcula la probabilidad de que ambas tengan una sola habitación.

3. Valencia, 2014

Un grupo de 75 personas prepara las opciones A, B o C de la prueba de acceso a ciclos formativos de grado superior de formación profesional. De ellas, 30 personas preparan la opción A, 20 la opción B y el resto la opción C.

a. Si elegimos una persona al azar, ¿cuál es la probabilidad de que ésta prepare la opción C?

b. Si elegimos al azar dos personas, ¿cuál es la probabilidad de que las dos preparen la opción A?

c. Si elegimos al azar tres personas, ¿cuál es la probabilidad de que ninguna de las tres prepare la opción B?

4. Valencia, 2015

Pregunta 5 Se ha preguntado a un grupo de 40 personas por su equipo de fútbol preferido. Los resultados vienen dados por la tabla siguiente en la que se han borrado dos casillas, cuyos resultados hemos llamado "x" e "y".

	VALENCIA	REAL MADRID	BARCELONA
HOMBRES	8	6	4
MUJERES	10	x	y

a) Encuentra los valores, x e y, sabiendo que si elegimos una persona al azar, la probabilidad de que sea mujer y su preferencia sea R. Madrid es 0,125.

b) Si elegimos dos personas al azar, calcula la probabilidad de que ambas sean hombres y aficionados al Valencia.

5. Castilla-La Mancha, 2013

Una urna contiene 4 bolas blancas y 7 rojas. Se realizan dos extracciones devolviendo la bola extraída.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que las 2 bolas extraídas sean rojas?
b) Si la primera bola es roja. ¿Cuál es la probabilidad de que la segunda sea blanca?
c) Responde a las misma cuestiones en el caso de que no se devuelva la bola.

6. Castilla-La Mancha, 2013

De los 22 alumnos de una clase, 14 son chicos, y de ellos, hay 6 que llevan gafas; sin embargo, solo hay 2 chicas que tienen gafas. Calcula la probabilidad de que, elegido un alumno al azar, sea chica y no lleve gafas.

7. Castilla-La Mancha, 2014

Se ha preguntado a unos alumnos de 3º y 4º de la ESO si tienen o no ordenador en casa, obteniéndose los siguientes resultados:

	Si tienen	No tienen	Totales
3º ESO		35	60
4º ESO			
Totales	45		100

Si se elije un alumno al azar calcular la probabilidad de que:

a) Sea de 3º y no tenga ordenador.
b) Sea de 4º y tenga ordenador.
c) Tenga ordenador, sabiendo que el alumno elegido es de 3º.
d) Sea de 4º, sabiendo que el alumno elegido no tiene ordenador.