

## Sigue la PROBABILIDAD

### Resumen de Probabilidad

Teoría de probabilidades: La **teoría de probabilidades** se ocupa de **asignar** un cierto **número** a cada **posible resultado** que pueda ocurrir en un **experimento aleatorio**, con el fin de cuantificar dichos resultados y saber si un suceso es más probable que otro.

Suceso: Es cada uno de los resultados posibles de una experiencia aleatoria.

Espacio muestral: Es el conjunto de todos los posibles resultados de una experiencia aleatoria, lo representaremos por E (o bien por la letra griega  $\Omega$ ).

### Tipos de sucesos

**Suceso elemental** es cada uno de los elementos que forman parte del espacio muestral.

Suceso aleatorio o **Suceso compuesto** es cualquier subconjunto del espacio muestral.

**Suceso seguro**, E, está formado por todos los posibles resultados (es decir, por el espacio muestral).

**Suceso imposible**,  $\emptyset$ , es el que no tiene ningún elemento.

Por ejemplo al tirar un dado obtener una puntuación igual a 7.

**Sucesos compatibles**: Dos sucesos, A y B, son compatibles cuando tienen algún suceso elemental común.

**Sucesos incompatibles**: Dos sucesos, A y B, son **incompatibles** cuando no tienen ningún elemento en común.

**Sucesos independientes**: Dos sucesos, A y B, son independientes cuando la probabilidad de que suceda A no se ve afectada porque haya sucedido o no B.

**Sucesos dependientes**: Dos sucesos, A y B, son dependientes cuando la probabilidad de que suceda A se ve afectada porque haya sucedido o no B.

**Suceso contrario**: El suceso contrario a A es otro suceso que se realiza cuando no se realiza A., Se denota por  $\bar{A}$ .

La **unión de sucesos**,  $A \cup B$ , es el suceso formado por todos los elementos de A y de B.

Intersección de sucesos

La **intersección de sucesos**,  $A \cap B$ , es el suceso formado por todos los elementos que son, a la vez, de A y B.

La **diferencia de sucesos**,  $A - B$ , es el suceso formado por todos los elementos de A que no son de B.

$$A - B = A \cap \bar{B}$$

**Sucesos contrarios**: El suceso  $\bar{A} = E - A$  se llama **suceso contrario** o complementario de A.

### Axiomas de la probabilidad

1.  $0 \leq p(A) \leq 1$

2.  $p(E) = 1$

3.  $p(A \cup B) = p(A) + p(B)$

Propiedades de la probabilidad

1  $p(\bar{A}) = 1 - p(A)$

2  $p(\emptyset) = 0$

3  $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$

4 Si  $A \subset B$ , entonces  $p(A) \leq p(B)$

5 Si  $A_1, A_2, \dots, A_k$  son incompatibles dos a dos entonces:  $p(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_k) = p(A_1) + p(A_2) + \dots + p(A_k)$

6 Si el espacio muestral E es finito y un suceso es  $S = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  entonces:

$$p(S) = p(x_1) + p(x_2) + \dots + p(x_r)$$

### Ley de Laplace

$$P(A) = \frac{\text{número de casos favorables a A}}{\text{número de casos posibles}}$$

### Probabilidad de la unión de sucesos

#### Probabilidad de la unión de sucesos incompatibles

$$A \cap B = \emptyset$$

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B)$$

Calcular la probabilidad de obtener un 2 ó un 5 al lanzar un dado.

$$P(2 \cup 5) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

#### Probabilidad de la unión de sucesos compatibles

$$A \cap B \neq \emptyset$$

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$$

$$p(A \cup B \cup C) = p(A) + p(B) + p(C) - p(A \cap B) - p(A \cap C) - p(B \cap C) + p(A \cap B \cap C)$$

**Ejemplo:**

Calcular la probabilidad de obtener un múltiplo de 2 ó un 6 al lanzar un dado.

$$P(2 \cup 6) = \frac{3}{6} + \frac{1}{6} - \frac{1}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

#### Probabilidad condicionada

Sean A y B dos sucesos de un mismo espacio muestral E.

Se llama **probabilidad** del suceso B **condicionado** a A y se representa por **P(B/A)** a la **probabilidad del suceso B una vez ha ocurrido el A.**

$$P(B/A) = \frac{p(A \cap B)}{p(A)}$$

Ejemplo

Calcular la probabilidad de obtener un 6 al tirar un dado sabiendo que ha salido par.

$$P(6/\text{par}) = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{3}{6}} = \frac{1}{3}$$

### Probabilidad compuesta

#### **Sucesos independientes**

Dos sucesos A y B son independientes si **p(A/B) = p(A)**

$$p(A \cap B) = p(A) \cdot p(B)$$

**Ejemplo**

Se tiene una baraja de 40 cartas, se saca una y se vuelve a meter. ¿Cuál es la probabilidad de extraer dos ases?

$$p(A \cap B) = p(A_1) \cdot p(A_2) = \frac{4}{40} \cdot \frac{4}{40} = \frac{1}{100}$$

#### **Sucesos dependientes**

Dos sucesos A y B son dependientes si **p(A/B) ≠ p(A)**

$$p(A \cap B) = p(A) \cdot p(B/A)$$

**Ejemplo:**

Se tiene una baraja de 40 cartas, se extraen dos cartas. ¿Cuál es la probabilidad de extraer dos ases?

$$p(A_1 \cap A_2) = p(A_1) \cdot p(A_2 / A_1) = \frac{4}{40} \cdot \frac{3}{39} = \frac{1}{130}$$

### Probabilidad de la diferencia de sucesos

$$p(A - B) = p(A \cap \bar{B}) = p(A) - p(A \cap B)$$

### Tablas de contingencia

Un método útil para clasificar los datos obtenidos en un recuento es mediante las **tablas de contingencia**. Se trata de tablas en cuyas celdas figuran probabilidades, y en la cual podemos determinar unas probabilidades conociendo otras de la tabla.

Ejemplo

Se sortea un viaje a Roma entre los 120 mejores clientes de una agencia de automóviles. De ellos, 65 son mujeres, 80 están casados y 45 son mujeres casadas. Se pide:

1. ¿Cuál será la probabilidad de que le toque el viaje a un hombre soltero?
2. Si del afortunado se sabe que es casado, ¿cuál será la probabilidad de que sea una mujer?

	Hombres	Mujeres	
Casados		45	80
Solteros		65	120
	Hombres	Mujeres	
Casados	35	45	80
Solteros	20	20	40
	55	65	120

$$p(\text{hombre soltero}) = \frac{20}{120} = \frac{1}{6}$$

$$p(\text{mujer / casado}) = \frac{45}{80} = 0.5625$$

### Experimentos compuestos

Un **experimento compuesto** es aquel que consta de dos o más experimentos aleatorios simples.

Es decir, si tiramos un dado, o una moneda, son experimentos aleatorios simples, pero si realizamos el experimento de tirar un dado y posteriormente una moneda, estamos realizando un **experimento compuesto**.

En los **experimentos compuestos** es conveniente usar el llamado **diagrama en árbol** para hacerse una idea global de todos ellos.

### Diagramas de árbol

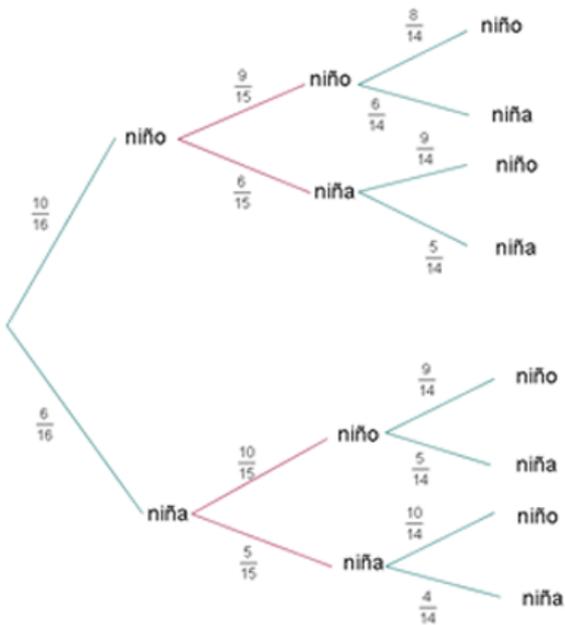
Para la construcción de un **diagrama en árbol** se partirá poniendo una **rama** para cada una de las **posibilidades**, acompañada de su **probabilidad**.

En el **final** de cada **rama parcial** se constituye a su vez, un **nudo** del cual parten nuevas **ramas**, según las **posibilidades** del siguiente paso, salvo si el nudo representa un posible final del experimento (**nudo final**).

Hay que tener en cuenta: que la **suma de probabilidades** de las **ramas** de cada **nudo** ha de dar **1**.

**Ejemplos:**

- 1 Una clase consta de seis niñas y 10 niños. Si se escoge un comité de tres al azar, hallar la probabilidad de:



1 Seleccionar tres niños.

$$P(3 \text{ niños}) = \frac{10}{16} \cdot \frac{9}{15} \cdot \frac{8}{14} = 0.214$$

2 Seleccionar exactamente dos niños y una niña.

$$P(2 \text{ niños y } 1 \text{ niña}) = \frac{10}{16} \cdot \frac{9}{15} \cdot \frac{6}{14} + \frac{10}{16} \cdot \frac{6}{15} \cdot \frac{9}{14} + \frac{6}{16} \cdot \frac{10}{15} \cdot \frac{9}{14} = 0.482$$

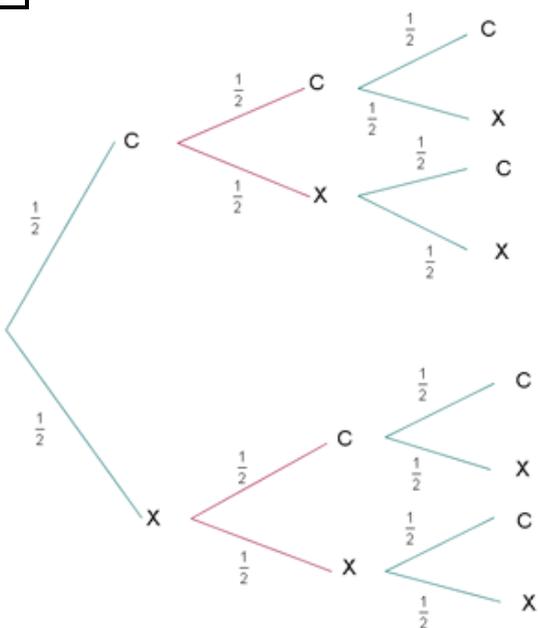
3 Seleccionar exactamente dos niñas y un niño.

$$P(2 \text{ niñas y } 1 \text{ niño}) = \frac{10}{16} \cdot \frac{6}{15} \cdot \frac{5}{14} + \frac{6}{16} \cdot \frac{10}{15} \cdot \frac{5}{14} + \frac{6}{16} \cdot \frac{5}{15} \cdot \frac{10}{14} = 0.268$$

1 Seleccionar tres niñas.

$$P(3 \text{ niñas}) = \frac{6}{16} \cdot \frac{5}{15} \cdot \frac{4}{14} = 0.0357$$

2 Calcular la **probabilidad** de que al arrojar al aire tres monedas, salgan:



1 Tres caras.

$$p(3c) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$$

**Teorema de la probabilidad total**

Si  $A_1, A_2, \dots, A_n$  son:

Sucesos incompatibles 2 a 2.

Y cuya unión es el espacio muestral ( $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n = E$ ).

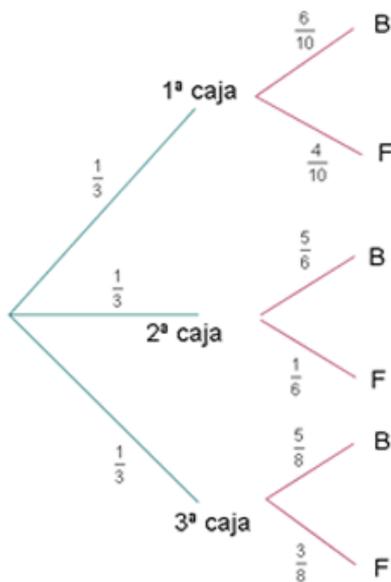
Y B es otro suceso.

Resulta que:

$$p(B) = p(A_1) \cdot p(B/A_1) + p(A_2) \cdot p(B/A_2) + \dots + p(A_n) \cdot p(B/A_n)$$

**Ejemplo:**

Se dispone de tres cajas con bombillas. La primera contiene 10 bombillas, de las cuales hay cuatro fundidas; en la segunda hay seis bombillas, estando una de ellas fundida, y la tercera caja hay tres bombillas fundidas de un total de ocho. ¿Cuál es la probabilidad de que al tomar una bombilla al azar de una cualquiera de las cajas, esté fundida?



**EJERCICIOS**

**1**

$$p(A) = \frac{3}{8} \quad p(B) = \frac{1}{2} \quad p(A \cap B) = \frac{1}{4}$$

Hallar:

**1**  $p(A \cup B)$  **2**  $p(\bar{A})$  **3**  $p(\bar{B})$  **4**  $p(\bar{A} \cap \bar{B})$  **5**  $p(\bar{A} \cup \bar{B})$  **6**  $p(A \cap \bar{B})$  **7**  $p(B \cap \bar{A})$

---

**2** Sean A y B dos sucesos aleatorios con:

$$p(\bar{A}) = \frac{2}{3} \quad p(A \cup B) = \frac{3}{4} \quad p(A \cap B) = \frac{1}{4}$$

Hallar:

**1**  $p(A)$  **2**  $p(B)$  **3**  $p(A \cap \bar{B})$  **4**  $p(B \cap \bar{A})$

---

**3** Se sacan dos bolas de una urna que se compone de una bola blanca, otra roja, otra verde y otra negra. Escribir el espacio muestral cuando:

**1** La primera bola se devuelve a la urna antes de sacar la segunda.

**2** La primera bola no se devuelve.

---

**4** Una urna tiene ocho bolas rojas, 5 amarilla y siete verdes. Si se extrae una bola al azar calcular la probabilidad de: **1** Sea roja. **2** Sea verde. **3** Sea amarilla. **4** No sea roja. **5** No sea amarilla.

---

**5** Una urna contiene tres bolas rojas y siete blancas. Se extraen dos bolas al azar. Escribir el espacio muestral y hallar la probabilidad de los sucesos:

**1** Con reemplazamiento. **2** Sin reemplazamiento.

---

**6** Se extrae una bola de una urna que contiene 4 bolas rojas, 5 blancas y 6 negras, ¿cuál es la probabilidad de que la bola sea roja o blanca? ¿Cuál es la probabilidad de que no sea blanca?

---

**7** En una clase hay 10 alumnas rubias, 20 morenas, cinco alumnos rubios y 10 morenos. Un día asisten 45 alumnos, encontrar la probabilidad de que un alumno:

**1** Sea hombre. **2** Sea mujer morena. **3** Sea hombre o mujer.

---

**8** Un dado está trucado, de forma que las probabilidades de obtener las distintas caras son proporcionales a los números de estas. Hallar:

**1** La probabilidad de obtener el 6 en un lanzamiento.

**2** La probabilidad de conseguir un número impar en un lanzamiento.

---

**9** Se lanzan dos dados al aire y se anota la suma de los puntos obtenidos. Se pide:

**1** La probabilidad de que salga el 7.

**2** La probabilidad de que el número obtenido sea par.

**3** La probabilidad de que el número obtenido sea múltiplo de tres.

---

**10** Se lanzan tres dados. Encontrar la probabilidad de que:

**1** Salga 6 en todos.

**2** Los puntos obtenidos sumen 7.

---

## Soluciones

### Ejercicio 1

Sean A y B dos sucesos aleatorios con:

$$p(A) = \frac{3}{8} \quad p(B) = \frac{1}{2} \quad p(A \cap B) = \frac{1}{4}$$

Hallar:

**1**  $p(A \cup B) = \boxed{\phantom{000}}$   $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B) = \frac{3}{8} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{5}{8}$

$$\boxed{2} p(\bar{A}) \quad \square \quad p(\bar{A}) = 1 - p(A) = 1 - \frac{3}{8} = \frac{5}{8}$$

$$\boxed{3} p(\bar{B}) \quad \square \quad p(\bar{B}) = 1 - p(B) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\boxed{4} p(\bar{A} \cap \bar{B}) \quad \square \quad p(\bar{A} \cap \bar{B}) = p(\overline{A \cup B}) = 1 - p(A \cup B) = 1 - \frac{5}{8} = \frac{3}{8}$$

$$\boxed{5} p(\bar{A} \cup \bar{B}) \quad \square \quad p(\bar{A} \cup \bar{B}) = p(\overline{A \cap B}) = 1 - p(A \cap B) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

$$\boxed{6} p(A \cap \bar{B}) \quad \square \quad p(A \cap \bar{B}) = p(A) - p(A \cap B) = \frac{3}{8} - \frac{1}{4} = \frac{1}{8}$$

$$\boxed{7} p(B \cap \bar{A}) \quad \square \quad p(B \cap \bar{A}) = p(B) - p(A \cap B) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$$

### Ejercicio 2

Sean A y B dos sucesos aleatorios con:

$$p(\bar{A}) = \frac{2}{3} \quad p(A \cup B) = \frac{3}{4} \quad p(A \cap B) = \frac{1}{4}$$

Hallar:

$$\boxed{1} p(A) \quad \square \quad p(A) = 1 - p(\bar{A}) = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$

$$\boxed{2} p(B) \quad \square \quad p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$$

$$p(B) = p(A \cup B) - p(A) + p(A \cap B) \quad p(B) = \frac{3}{4} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{2}{3}$$

$$\boxed{3} p(A \cap \bar{B}) \quad \square \quad p(A \cap \bar{B}) = p(A) - p(A \cap B) \quad \square \quad p(A \cap \bar{B}) = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$$

$$\boxed{4} p(B \cap \bar{A}) \quad \square \quad p(B \cap \bar{A}) = p(B) - p(A \cap B) \quad \square \quad p(B \cap \bar{A}) = \frac{2}{3} - \frac{1}{4} = \frac{5}{12}$$

### Ejercicio 3

Se sacan dos bolas de una urna que se compone de una bola blanca, otra roja, otra verde y otra negra. Escribir el espacio muestral cuando:

$\boxed{1}$  La primera bola se devuelve a la urna antes de sacar la segunda.

$E = \{BB, BR, BV, BN, RB, RR, RV, RN, VB, VR, VV, VN, NB, NR, NV, NN\}$

$\boxed{2}$  La primera bola no se devuelve.

$E = \{BR, BV, BN, RB, RV, RN, VB, VR, VN, NB, NR, NV\}$

### Ejercicio 4

Una urna tiene ocho bolas rojas, 5 amarilla y siete verdes. Si se extrae una bola al azar calcular la probabilidad de:

$$\boxed{1} \text{ Sea roja. } p(\text{roja}) = \frac{8}{20} = 0.4 \quad \boxed{2} \text{ Sea verde. } p(\text{verde}) = \frac{7}{20} = 0.35$$

$$\boxed{3} \text{ Sea amarilla. } p(\text{amarilla}) = \frac{5}{20} = 0.25 \quad \boxed{4} \text{ No sea roja. } p(\text{no roja}) = 1 - \frac{8}{20} = 0.6$$

$$\boxed{5} \text{ No sea amarilla. } p(\text{no amarilla}) = 1 - \frac{5}{20} = 0.75$$

### Ejercicio 5

Una urna contiene tres bolas rojas y siete blancas. Se extraen dos bolas al azar. Escribir el espacio muestral y hallar la probabilidad de los sucesos:

1 Con reemplazamiento.

$$E = \{RR, RB, BR, BB\}$$

$$p(RR) = \frac{3}{10} \cdot \frac{3}{10} = \frac{9}{100}$$

$$p(RB) = \frac{3}{10} \cdot \frac{7}{10} = \frac{21}{100}$$

$$p(BR) = \frac{7}{10} \cdot \frac{3}{10} = \frac{21}{100}$$

$$p(BB) = \frac{7}{10} \cdot \frac{7}{10} = \frac{49}{100}$$

2 Sin reemplazamiento.

$$p(RR) = \frac{3}{10} \cdot \frac{2}{9} = \frac{6}{90}$$

$$p(RB) = \frac{3}{10} \cdot \frac{7}{9} = \frac{21}{90}$$

$$p(BR) = \frac{7}{10} \cdot \frac{3}{9} = \frac{21}{90}$$

$$p(BB) = \frac{7}{10} \cdot \frac{6}{9} = \frac{42}{90}$$

---

### Ejercicio 6

Se extrae una bola de una urna que contiene 4 bolas rojas, 5 blancas y 6 negras, ¿cuál es la probabilidad de que la bola sea roja o blanca? ¿Cuál es la probabilidad de que no sea blanca?

$$p(R \cup B) = \frac{4}{15} + \frac{5}{15} = \frac{9}{15} = \frac{3}{5} \quad p(\bar{B}) = 1 - p(B) = 1 - \frac{5}{15} = \frac{10}{15} = \frac{2}{3}$$

---

### Ejercicio 7

En una clase hay 10 alumnas rubias, 20 morenas, cinco alumnos rubios y 10 morenos. Un día asisten 45 alumnos, encontrar la probabilidad de que un alumno:

1 Sea hombre.  $p(\text{hombre}) = \frac{15}{45} = \frac{1}{3}$

2 Sea mujer morena.  $p(\text{mujer morena}) = \frac{20}{45} = \frac{4}{9}$

3 Sea hombre o mujer.  $p(\text{hombre} \cup \text{mujer}) = 1$

---

### Ejercicio 8

Un dado está trucado, de forma que las probabilidades de obtener las distintas caras son proporcionales a los números de estas. Hallar:

1 La probabilidad de obtener el 6 en un lanzamiento.

$$p(1) + p(2) + p(3) + p(4) + p(5) + p(6) =$$

$$p + 2p + 3p + 4p + 5p + 6p = 21p \quad 21p = 1 \quad p = \frac{1}{21}$$

$$p(6) = 6 \cdot \frac{1}{21} = \frac{6}{21}$$

2 La probabilidad de conseguir un número impar en un lanzamiento.

$$p(1) + p(3) + p(5) = p + 3p + 5p = 9p = 9 \cdot \frac{1}{21} = \frac{9}{21} = \frac{3}{7}$$

---

### Ejercicio 9

Se lanzan dos dados al aire y se anota la suma de los puntos obtenidos. Se pide:

1 La probabilidad de que salga el 7.

1	2	3	4	5	6
6	5	4	3	2	1

$$p(7) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

2 La probabilidad de que el número obtenido sea par.  $p(\text{par}) = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}$

3 La probabilidad de que el número obtenido sea múltiplo de tres.

1	1	2	2	3	3	4	4	5	5	6	6
2	5	1	4	3	6	2	5	1	4	3	6

$$p(3) = \frac{12}{36} = \frac{1}{3}$$

---

**Ejercicio 10**

Se lanzan tres dados. Encontrar la probabilidad de que:

1 Salga 6 en todos.  $p(6_1 \cap 6_2 \cap 6_3) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{216}$

2 Los puntos obtenidos sumen 7.

1	1	5
1	2	4
1	3	3
1	4	2
1	5	1
2	1	4
2	2	3
2	3	2
2	4	1
3	1	3
3	2	2
3	3	1
4	1	2
4	2	1
5	1	1

$$p(7) = \frac{15}{6^3} = \frac{5}{72}$$

---