Factorización de un polinomio

Sacar factor común

Consiste en aplicar la propiedad distributiva: **a · b + a · c + a · d = a (b + c + d)**

Ejemplos

Descomponer en factores sacando factor común y hallar las raíces (son las soluciones)

- $x^3 + x^2 = x^2 (x + 1)$ La raíces son: $x = 0$ y $x = -1$
- $2x^4 + 4x^2 = 2x^2 (x^2 + 2)$ Sólo tiene una raíz $x = 0$; ya que el polinomio, $x^2 + 2$, no tiene ningún valor que lo anule; debido a que al estar la x al cuadrado siempre dará un número positivo, por tanto es irreducible.
- $x^2 - ax - bx + ab = x (x - a) - b (x - a) = (x - a) \cdot (x - b)$ La raíces son $x = a$ y $x = b$.

Diferencia de cuadrados

Una diferencia de cuadrados es igual a suma por diferencia: $\mathbf{a^2 - b^2 = (a + b) \cdot (a - b)}$

Ejemplos

Descomponer en factores y hallar las raíces

- $x^2 - 4 = (x + 2) (x - 2)$ Las raíces son $x = -2$ y $x = 2$
- $x^4 - 16 = (x^2 + 4) \cdot (x^2 - 4) = (x + 2) \cdot (x - 2) \cdot (x^2 + 4)$ Las raíces son $x = -2$ y $x = 2$

Trinomio cuadrado perfecto

Un trinomio cuadrado perfecto es igual a un binomio al cuadrado; $\mathbf{a^2 \pm 2\,a\,b + b^2 = (a \pm b)^2}$

Ejemplos

- Descomponer en factores y hallar las raíces

$$\underset{3^2}{\underset{\downarrow}{9}} + \underset{2\cdot 3\cdot x}{\underset{\uparrow}{6x}} + \underset{x^2}{\underset{\downarrow}{x^2}} = (3 + x)^2$$

La raíz es $x = -3$, y se dice que es una **raíz doble**.

$$\underset{x^2}{\underset{\downarrow}{x^2}} - \underset{2\cdot x\cdot 2}{\underset{\uparrow}{4x}} + \underset{2^2}{\underset{\downarrow}{4}} = (x - 2)^2$$

La raíz es $x = 2$.

Trinomio de segundo grado

Para descomponer en factores el trinomio de segundo grado $P(x) = ax^2 + bx + c$, se iguala a cero y se resuelve la ecuación de 2º grado. Si las soluciones a la ecuación son x_1 y x_2, el polinomio descompuesto será: $\mathbf{ax^2 + bx + c = a \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2)}$

Ejemplos

- Descomponer en factores y hallar las raíces: $x^2 - 5x + 6$ $\quad x^2 - 5x + 6 = 0$

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \cdot 6}}{2} = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 24}}{2} = \frac{5 \pm 1}{2} = \begin{cases} \nearrow x_1 = \frac{6}{2} = 3 \\ \searrow x_2 = \frac{4}{2} = 2 \end{cases}$$

$$x^2 - 5x + 6 = (x - 2) \cdot (x - 3)$$

Las raíces son $x = 3$ y $x = 2$.

- $x^2 - x - 6$ $\quad x^2 - x - 6 = 0$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1^2 + 4 \cdot 6}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 24}}{2} = \frac{1 \pm 5}{2} = \begin{cases} \nearrow x_1 = \frac{6}{2} = 3 \\ \searrow x_2 = \frac{-4}{2} = -2 \end{cases}$$

$$x^2 - x - 6 = (x + 2) \cdot (x - 3)$$

Las raíces son $x = 3$ y $x = -2$.

Trinomios de cuarto grado de exponentes pares

Para hallar las raíces se iguala a cero y se resuelve la ecuación bicuadrada.

Ejemplos

- $x^4 - 10x^2 + 9$ $\quad x^2 = t$ $\quad x^4 - 10x^2 + 9 = 0$ $\quad t^2 - 10t + 9 = 0$

$$t = \frac{10 \pm \sqrt{10^2 - 4 \cdot 9}}{2} = \frac{10 \pm \sqrt{100 - 36}}{2} = \frac{10 \pm \sqrt{64}}{2} = \frac{10 \pm 8}{2} = \begin{cases} \nearrow t_1 = \frac{18}{2} = 9 \\ \searrow t_2 = \frac{2}{2} = 1 \end{cases}$$

$x^2 = 9 \qquad x = \pm\sqrt{9} = \pm 3$

$x^2 = 1 \qquad x = \pm\sqrt{1} = \pm 1 \qquad x^4 - 10x^2 + 9 = (x + 1) \cdot (x - 1) \cdot (x + 3) \cdot (x - 3)$

- $x^4 - 2x^2 - 3$ $\quad x^2 = t$ $\quad t^2 - 2t - 3 = 0$

$$t = \frac{2 \pm \sqrt{2^2 + 4 \cdot 3}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 12}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{16}}{2} = \frac{2 \pm 4}{2} = \begin{cases} \nearrow t_1 = \frac{6}{2} = 3 \\ \searrow t_2 = \frac{-2}{2} = -1 \end{cases}$$

$x^2 = 3 \qquad x = \pm\sqrt{3}$

$x^2 = -1 \qquad x = \pm\sqrt{-1} \in \mathbb{R} \qquad x^4 - 2x^2 + 3 = (x^2 + 1) \cdot (x + \sqrt{3}) \cdot (x - \sqrt{3})$

Factorización de un polinomio de grado superior a dos

Utilizamos el teorema del resto y la regla de Ruffini para encontrar las raíces enteras.

Ruffini

Paolo Ruffini (1765, 1822) fue un matemático italiano, que estableción un método más breve para hacer la **división de polinomios**, cuando el **divisor es un binomio de la forma x — a**.

Regla de Ruffini

Para explicar los pasos a aplicar en la **regla de Ruffini** vamos a tomar de ejemplo la división:

$(x^4 - 3x^2 + 2) : (x - 3)$

1 Si el polinomio no es completo, lo completamos añadiendo los términos que faltan con ceros.

2 Colocamos los coeficientes del dividendo en una línea.

3 Abajo a la izquierda colocamos el opuesto del término independendiente del divisor.

4 Trazamos una raya y bajamos el primer coeficiente.

	1	0	-3	0	2
3					
	1				

$\boxed{5}$ Multiplicamos ese coeficiente por el divisor y lo colocamos debajo del siguiente término.

	1	0	-3	0	2
3		3			
	1				

$\boxed{6}$ Sumamos los dos coeficientes.

	1	0	-3	0	2
3		3			
	1	3			

$\boxed{7}$ Repetimos el proceso anterior.

	1	0	-3	0	2
3		3	9		
	1	3	6		

Volvemos a repetir el proceso.

	1	0	-3	0	2
3		3	9	18	
	1	3	6	18	

Volvemos a repetir.

	1	0	-3	0	2
3		3	9	18	54
	1	3	6	18	56

$\boxed{8}$ El último número obtenido, **56** , es el resto.

$\boxed{9}$ El cociente es un polinomio de grado inferior en una unidad al dividendo y cuyos coeficientes son los que hemos obtenido.

$x^3 + 3x^2 + 6x + 18$

Ejemplo

Dividir por la regla de Ruffini:

$(x^5 - 32) : (x - 2)$

	1	0	0	0	0	−32
2		2	4	8	16	32
	1	2	4	8	16	0

Los pasos a seguir los veremos con el polinomio: $P(x) = 2x^4 + x^3 - 8x^2 - x + 6$

1. Tomamos los divisores del término independiente: ±1, ±2, ±3.
2. Aplicando el **teorema del resto** sabremos para que valores la división es exacta.
   $P(1) = 2 \cdot 1^4 + 1^3 - 8 \cdot 1^2 - 1 + 6 = 2 + 1 - 8 - 1 + 6 = 0$
3. Dividimos por Ruffini.

	2	1	−8	−1	6
1		2	3	−5	−6
	2	3	−5	−6	0

4. Por ser la división exacta, **D = d · c** $(x - 1) \cdot (2x^3 + 3x^2 - 5x - 6)$ Una raíz es x = 1.
   Continuamos realizando las mismas operaciones al segundo factor.
   Volvemos a probar por 1 porque el primer factor podría estar elevado al cuadrado.
   $P(1) = 2 \cdot 1^3 + 3 \cdot 1^2 - 5 \cdot 1 - 6 \neq 0$
   $P(-1) = 2 \cdot (-1)^3 + 3 \cdot (-1)^2 - 5 \cdot (-1) - 6 = -2 + 3 + 5 - 6 = 0$

	2	3	−5	−6
−1		−2	−1	6
	2	1	−6	0

$(x - 1) \cdot (x + 1) \cdot (2x^2 + x - 6)$ Otra raíz es x = −1.

El tercer factor lo podemos encontrar aplicando la ecuación de 2º grado o tal como venimos haciéndolo, aunque tiene el inconveniente de que sólo podemos encontrar **raíces enteras**.

El 1 lo descartamos y seguimos probando por **−1**.

$P(-1) = 2 \cdot (-1)^2 + (-1) - 6 \neq 0$

$P(2) = 2 \cdot 2^2 + 2 - 6 \neq 0$

$P(-2) = 2 \cdot (-2)^2 + (-2) - 6 = 2 \cdot 4 - 2 - 6 = 0$

	2	1	−6
−2		−4	6
	2	−3	0

$(x - 1) \cdot (x + 1) \cdot (x + 2) \cdot (2x - 3)$

Sacamos **factor común** 2 en último binomio y encontramos una raíz racional.

$2x - 3 = 2(x - 3/2)$

La **factorización del polinomio** queda:

$P(x) = 2x^4 + x^3 - 8x^2 - x + 6 = 2(x - 1) \cdot (x + 1) \cdot (x + 2) \cdot (x - 3/2)$

Las raíces son : x = 1, x = − 1, x = −2 y x = 3/2

Ejercicicos

Factorizar

$\boxed{1}$ $x^3 + x^2$ $\boxed{2}$ $2x^4 + 4x^2$ $\boxed{3}$ $x^2 - 4$ $\boxed{4}$ $x^4 - 16$ $\boxed{5}$ $9 + 6x + x^2$ $\boxed{6}$ $x^2 - x - 6$ $\boxed{7}$ $x^4 - 10x^2 + 9$

$\boxed{8}$ $x^4 - 2x^2 - 3$ $\boxed{9}$ $2x^4 + x^3 - 8x^2 - x + 6$ $\boxed{10}$ $2x^3 - 7x^2 + 8x - 3$ $\boxed{11}$ $x^3 - x^2 - 4$

$\boxed{12}$ $x^3 + 3x^2 - 4x - 12$ $\boxed{13}$ $6x^3 + 7x^2 - 9x + 2$

$\boxed{14}$ **Factorizar los polinomios:**

$\boxed{1}$ $9x^4 - 4x^2 =$ $\boxed{2}$ $x^5 + 20x^3 + 100x =$ $\boxed{3}$ $3x^5 - 18x^3 + 27x =$ $\boxed{4}$ $2x^3 - 50x =$ $\boxed{5}$ $2x^5 - 32x =$

$\boxed{6}$ $2x^2 + x - 28 =$

Soluciones:

1 resuelto

$x^3 + x^2$ $x^3 + x^2 = x^2 (x + 1)$ La raíces son: **x = 0** y **x = − 1**

2 resuelto

$2x^4 + 4x^2 = 2x^2 (x^2 + 2)$ $2x^4 + 4x^2 = 2x^2 (x^2 + 2)$

Sólo tiene una raíz **X = 0** ; ya que el polinomio, $x^2 + 2$, no tiene ningún valor que lo anule; debido a que al estar la x al cuadrado siempre dará un número positivo, por tanto es irreducible.

3 resuelto

$x^2 - 4$ $x^2 - 4 = (X + 2) \cdot (X - 2)$ Las raíces son **X = − 2** y **X = 2**

4 resuelto

$x^4 - 16$ $x^4 - 16 = (x^2 + 4) \cdot (x^2 - 4) = (X + 2) \cdot (X - 2) \cdot (x^2 + 4)$ Las raíces son **X = −2** y **X = 2**

5 resuelto

$$\underbrace{9}_{3^2} + \underbrace{6x}_{2\cdot 3\cdot x} + \underbrace{x^2}_{x^2} = (3 + x)^2$$

$9 + 6x + x^2$ La raíz es **x = −3** .

6 resuelto

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1^2 + 4 \cdot 6}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 24}}{2} = \frac{1 \pm 5}{2} = \begin{cases} x_1 = \frac{6}{2} = 3 \\ x_2 = \frac{-4}{2} = -2 \end{cases}$$

$x^2 - x - 6$ $x^2 - x - 6 = 0$

$x^2 - x - 6 = (x + 2) \cdot (x - 3)$ Las raíces son **x = 3** y **x = −2** .

7 resuelto

$x^4 - 10x^2 + 9$ $x^2 = t$ $x^4 - 10x^2 + 9 = 0$ $t^2 - 10t + 9 = 0$

$$t = \frac{10 \pm \sqrt{10^2 - 4 \cdot 9}}{2} = \frac{10 \pm \sqrt{100 - 36}}{2} = \frac{10 \pm \sqrt{64}}{2} = \frac{10 \pm 8}{2} = \begin{cases} t_1 = \frac{18}{2} = 9 \\ t_2 = \frac{2}{2} = 1 \end{cases}$$

$x^2 = 9$ $x = \pm\sqrt{9} = \pm 3$

$x^2 = 1$ $x = \pm\sqrt{1} = \pm 1$

$x^4 - 10x^2 + 9 = (x + 1) \cdot (x - 1) \cdot (x + 3) \cdot (x - 3)$

8 resuelto

$x^4 - 2x^2 - 3$ $x^2 = t$ $t^2 - 2t - 3 = 0$

$$t = \frac{2 \pm \sqrt{2^2 + 4 \cdot 3}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 12}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{16}}{2} = \frac{2 \pm 4}{2} = \begin{cases} t_1 = \frac{6}{2} = 3 \\ t_2 = \frac{-2}{2} = -1 \end{cases}$$

$x^2 = 3 \qquad x = \pm\sqrt{3}$

$x^2 = -1 \qquad x = \pm\sqrt{-1} \in \mathbb{R}$

$x^4 - 2x^2 + 3 = (x^2 + 1) \cdot (x + \sqrt{3}) \cdot (x - \sqrt{3})$

9 resuelto

$2x^4 + x^3 - 8x^2 - x + 6$

1Tomamos los divisores del término independiente: ±1, ±2, ±3.

2Aplicando el teorema del resto sabremos para que valores la división es exacta.

$P(1) = 2 \cdot 1^4 + 1^3 - 8 \cdot 1^2 - 1 + 6 = 2 + 1 - 8 - 1 + 6 = 0$

3Dividimos por Ruffini.

$$\begin{array}{c|ccccc} & 2 & 1 & -8 & -1 & 6 \\ 1 & & 2 & 3 & -5 & -6 \\ \hline & 2 & 3 & -5 & -6 & 0 \end{array}$$

4Por ser la división exacta, D = d · c $\quad (x-1) \cdot (2x^3 + 3x^2 - 5x - 6) \quad$ Una raíz es x = 1.

Continuamos realizando las mismas operaciones al segundo factor.

Volvemos a probar por 1 porque el primer factor podría estar elevado al cuadrado.

$P(1) = 2 \cdot 1^3 + 3 \cdot 1^2 - 5 \cdot 1 - 6 \neq 0$

$P(-1) = 2 \cdot (-1)^3 + 3 \cdot (-1)^2 - 5 \cdot (-1) - 6 = -2 + 3 + 5 - 6 = 0$

$$\begin{array}{c|cccc} & 2 & 3 & -5 & -6 \\ -1 & & -2 & -1 & 6 \\ \hline & 2 & 1 & -6 & 0 \end{array}$$

$(x-1) \cdot (x+1) \cdot (2x^2 + x - 6) \quad$ Otra raíz es x = -1.

El tercer factor lo podemos encontrar aplicando la ecuación de 2º grado o tal como venimos haciéndolo, aunque tiene el inconveniente de que sólo podemos encontrar raíces enteras.

El 1 lo descartamos y seguimos probando por − 1.

$P(-1) = 2 \cdot (-1)^2 + (-1) - 6 \neq 0$

$P(2) = 2 \cdot 2^2 + 2 - 6 \neq 0$

$P(-2) = 2 \cdot (-2)^2 + (-2) - 6 = 2 \cdot 4 - 2 - 6 = 0$

$$\begin{array}{c|ccc} & 2 & 1 & -6 \\ -2 & & -4 & 6 \\ \hline & 2 & -3 & 0 \end{array}$$

$(x-1) \cdot (x+1) \cdot (x+2) \cdot (2x-3) \quad$ Sacamos factor común 2 en último binomio. $2x - 3 = 2(x - 3/2)$

La factorización del polinomio queda: $\mathbf{2x^4 + x^3 - 8x^2 - x + 6 = 2(x-1) \cdot (x+1) \cdot (x+2) \cdot (x - 3/2)}$

Las raíces son : **x = 1, x = − 1, x = −2 y x = 3/2**

10 resuelto

$2x^3 - 7x^2 + 8x - 3 \qquad P(1) = 2 \cdot 1^3 - 7 \cdot 1^2 + 8 \cdot 1 - 3 = 0$

$$\begin{array}{c|cccc} & 2 & -7 & 8 & -3 \\ 1 & & 2 & -5 & 3 \\ \hline & 2 & -5 & 3 & 0 \end{array}$$

$(x-1) \cdot (2x^2 - 5x + 3) \qquad P(1) = 2 \cdot 1^2 - 5 \cdot 1 + 3 = 0$

$$\begin{array}{c|ccc} & 2 & -5 & 3 \\ 1 & & 2 & -3 \\ \hline & 2 & -3 & 0 \end{array}$$

$(x-1)^2 \cdot (2x-3) =$ $\mathbf{2(x - 3/2) \cdot (x-1)^2}$ **Las raíces son: x = 3/2 y x = 1**

11 resuelto

$x^3 - x^2 - 4 \qquad \{\pm 1, \pm 2, \pm 4\}$

$P(1) = 1^3 - 1^2 - 4 \neq 0$

$P(-1) = (-1)^3 - (-1)^2 - 4 \neq 0$

$P(2) = 2^3 - 2^2 - 4 = 8 - 4 - 4 = 0$

	1	−1	0	− 4
2		2	2	4
	1	1	2	0

$(x - 2) \cdot (x^2 + x + 2)$ $\quad x^2 + x + 2 = 0$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 2}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 8}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{-7}}{2} \notin \mathbb{R}$$

$(x - 2) \cdot (x^2 + x + 2)$ Raíz: **x = 2.**

<u>12 resuelto</u>

$x^3 + 3x^2 - 4x - 12$ $\quad \{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \pm 12\}$

$P(1) = 1^3 + 3 \cdot 1^2 - 4 \cdot 1 - 12 \neq 0$

$P(-1) = (-1)^3 + 3 \cdot (-1)^2 - 4 \cdot (-1) - 12 \neq 0$

$P(2) = 2^3 + 3 \cdot 2^2 - 4 \cdot 2 - 12 = 8 + 12 - 8 - 12 = 0$

	1	3	−4	− 12
2		2	10	12
	1	5	6	0

$(x - 2) \cdot (x^2 + 5x + 6)$ $\quad x^2 + 5x + 6 = 0$

$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \cdot 6}}{2} = \frac{-5 \pm \sqrt{25 - 24}}{2} = \frac{-5 \pm \sqrt{1}}{2} = \frac{-5 \pm 1}{2} = \begin{cases} \nearrow x_1 = \frac{-4}{2} = -2 \\ \searrow x_2 = \frac{-6}{2} = -3 \end{cases}$$

$(x - 2) \cdot (x + 2) \cdot (x + 3)$ Las raíces son : **x = 2, x = − 2, x = − 3.**

<u>13 resuelto</u>

$6x^3 + 7x^2 - 9x + 2$ $\quad \{\pm 1, \pm 2\}$

$P(1) = 6 \cdot 1^3 + 7 \cdot 1^2 - 9 \cdot 1 + 2 \neq 0$

$P(-1) = 6 \cdot (-1)^3 + 7 \cdot (-1)^2 - 9 \cdot (-1) + 2 \neq 0$

$P(2) = 6 \cdot 2^3 + 7 \cdot 2^2 - 9 \cdot 2 + 2 \neq 0$

$P(-2) = 6 \cdot (-2)^3 + 7 \cdot (-2)^2 - 9 \cdot (-2) + 2 = -48 + 28 + 18 + 2 = 0$

	6	7	-9	2
-2		− 12	10	− 2
	6	− 5	1	0

$(x+2) \cdot (6x^2 - 5x + 1)$ $\quad 6x^2 - 5x + 1 = 0$

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \cdot 6}}{12} = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 24}}{12} = \frac{5 \pm \sqrt{1}}{12} = \frac{5 \pm 1}{12} = \begin{cases} \nearrow x_1 = \frac{6}{12} = \frac{1}{2} \\ \searrow x_2 = \frac{4}{12} = \frac{1}{3} \end{cases}$$

6 · (x + 2) · (x − 1/2) · (x − 1/3) **Raíces: x = − 2, x = 1/2 y x= 1/3**

<u>14 resuelto</u>

Soluciones:

1 $9x^4 - 4x^2 = x^2 \cdot (9x^2 - 4) = \mathbf{x^2 \cdot (3x + 2) \cdot (3x - 2)}$

2 $x^5 + 20x^3 + 100x = x \cdot (x^4 + 20x^2 + 100) = \mathbf{x \cdot (x^2 + 10)^2}$

3 $3x^5 - 18x^3 + 27x = 3x \cdot (x^4 - 6x^2 + 9) = \mathbf{3x \cdot (x^2 - 3)^2}$

4 $2x^3 - 50x = 2x \cdot (x^2 - 25) = \mathbf{2x \cdot (x + 5) \cdot (x - 5)}$

5 $2x^5 - 32x = 2x \cdot (x^4 - 16) = 2x \cdot (x^2 + 4) \cdot (x^2 - 4) = \mathbf{2x \cdot (x^2 + 4) \cdot (x + 2) \cdot (x - 2)}$

6 $2x^2 + x - 28$ $\quad 2x^2 + x - 28 = 0$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 28}}{4} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 224}}{4} = \frac{-1 \pm \sqrt{225}}{4} = \frac{-1 \pm 15}{4} = \begin{cases} \nearrow x_1 = \frac{14}{4} = \frac{7}{2} \\ \searrow x_2 = \frac{-16}{4} = -4 \end{cases}$$

$2x^2 + x - 28 = \mathbf{2\,(x + 4) \cdot (x - 7/2)}$