MÁS SOBRE LA PROBABILIDAD INTENTANDO ACLARARLA CON MUCHOS EJEMPLOS RESUELTOS

Lo básico:
Experimento aleatorio: No puede predecirse el resultado por mucho que lo hayamos experimentado. Por ejemplo, lanzar un dado.

- Espacio muestral E={1,2,3,4,5,6}
- Sucesos elementales: {1}, {2},{3},{4},{5} y{6}
- Otros sucesos: A={1,2}, B={2,4,6}, C={1,3,5}
- Suceso seguro: E={1.2.3.4.5.6}
- Suceso imposible: Ø={ }. • El suceso contrario del seguro es el suceso imposible, que no se verifica nunca, se indica con Ø.
- Suceso contrario de A: $\bar{A}$ = {3,4,5,6}. El suceso contrario a uno dado A, está formado por todos los sucesos del espacio muestral que no están en A. Es el que ocurre cuando no sucede A y se indica $\bar{A}$.
- Sucesos compatibles: Son los que pueden ocurrir a la vez, como A y B ó A y C.
- Sucesos incompatibles: Si no pueden ocurrir a la vez, como par e impar, B y C.

---

1. OPERACIONES con sucesos: sucesos incompatibles.

Llamamos suceso unión de A y B (AUB) al suceso que se realiza cuando se realizan A o B. El suceso AUB contiene todos los elementos de A y todos los de B.
Llamamos suceso intersección de A y B (A∩B) al suceso que se realiza cuando se realizan simultáneamente A y B. El suceso A∩B está formado por los elementos comunes de A y B.
Dos sucesos son incompatibles cuando es imposible que se realicen simultáneamente.
Si A∩B=Ø entonces A y B son incompatibles.
Si A∩B≠Ø entonces A y B son compatibles.
Por tanto, un suceso y su contrario son incompatibles.

2. PROBABILIDAD de un suceso.

Si repetimos un experimento aleatorio un número muy grande de veces, y calculamos la frecuencia relativa de un suceso A, $f_r(A)$, la LEY DE LOS GRANDES NÚMEROS asegura que dicha frecuencia converge hacia un determinado valor que llamaremos probabilidad de A, P(A).

$$\lim f_r(A) = \frac{n(A)}{n} = P(A)$$

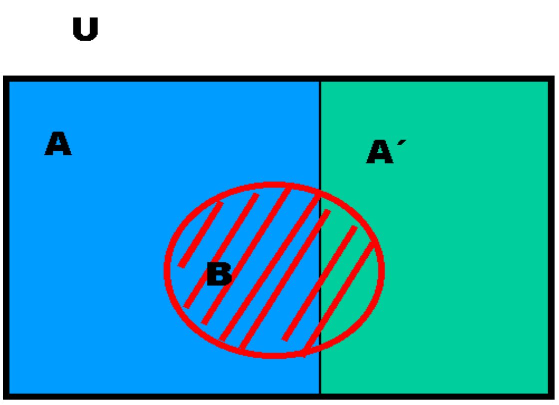
La probabilidad de un suceso A, P(A), mide la esperanza que tenemos de que ese suceso ocurra al realizar un determinado experimento aleatorio.
Así pues, sea E el espacio muestral de un experimento aleatorio. A cada suceso A se le asocia un número, designado P(A) y llamado probabilidad de A, el cual satisface las siguientes AXIOMAS:

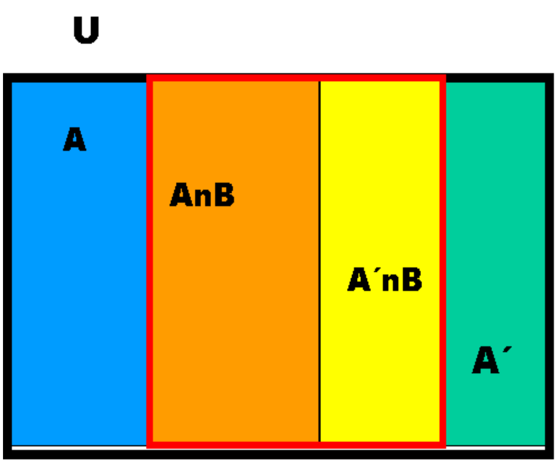
- 0 ≤ P(A) ≤ 1. Es decir la probabilidad es un número entre "0" [imposible] y "1" [seguro].
  Ejemplo: La probabilidad de sacar par en un dado equilibrado es 0,5. p(A)=0,5, que indica que esperamos que la mitad de las veces salga par.
- P(E) = 1. Es decir la probabilidad de que ocurra el espacio muestral (suceso seguro) es "1".
  Ejemplo: La probabilidad de sacar un número del 1 al 6 en un dado equilibrado es "1".
- Si A y B son sucesos mutuamente excluyentes o incompatibles (sin elementos en común, intersección vacía), P(AUB) = P(A) + P(B). Es decir la probabilidad de que ocurra la unión de dos sucesos disjuntos entre sí es la suma de las probabilidades individuales.

Ejemplo: La probabilidad de sacar en un dado {"as" o sacar "número par"} es la suma de las probabilidades individuales de dichos sucesos.

Consecuencia de los axiomas (Teoremas)

1. P(A´) = 1 - P(A). Es decir la probabilidad del complemento de un suceso A es "1 - P(A)".
   Ejemplo: La probabilidad de sacar un número impar en un dado equilibrado es "1 menos la probabilidad de sacar par".
2. Si Ø es el conjunto vacío, entonces P(Ø) = 0 Es decir la probabilidad de un suceso imposible o conjunto vacío es "0".
   Ejemplo: La probabilidad de sacar "7" en un dado equilibrado es 0.
3. Si $A_1, A_2, \ldots\ldots, A_i$ son "i" sucesos disjuntos (incompatibles)
   $P(A_1 U A_2 U A_3 U \ldots\ldots U A_i) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) + \ldots\ldots\ldots\ldots + P(A_i)$
   Es decir la probabilidad de que ocurra la unión de "i" sucesos incompatibles es la suma de las probabilidades individuales. Si la unión de estos conjuntos Aj forman el espacio muestral entonces la suma de las probabilidades es "1"
   Ejemplo: La probabilidad de sacar en un dado "par" o sacar "número par" es la suma de las probabilidades individuales de dichos sucesos.
   REGLA DE LAPLACE
   La probabilidad de un suceso de un experimento aleatorio con resultados equiprobables se puede calcular como el cociente entre los casos o resultados favorables a A entre los casos o resultados posibles del experimento aleatorio.
4. Si A y B son sucesos cualesquiera P(AUB) = P(A) + P(B) - P(A∩B)
   Es decir la probabilidad de que ocurra la unión de dos sucesos es la suma de las probabilidades individuales menos la probabilidad de la intersección.
   Ejemplo:

<table>
<tr>
<td>
</td>
<td>P(AUB) = P(A) + P(B) - P(A∩B)

Ejemplo:
A: el estudiante es mujer
B: el estudiante fuma
AUB: el estudiante es mujer o fuma
A∩B: el estudiante es mujer y fuma</td>
</tr>
<tr>
<td>
</td>
<td>Unión de conjuntos disjuntos (otra forma de expresar la unión)

E = (A∩B´) U (A∩B) U (A´∩B) U (A´∩B´)

P(E)= P(A∩B´)+P(A∩B)+P(A´∩B)+P(A´∩B´) = 1
Ejemplo:
A∩B´: el estudiante es mujer y no fuma
A∩B: el estudiante es mujer y fuma
A´∩B: el estudiante no es mujer y fuma
A´∩B´: el estudiante no es mujer y no fuma</td>
</tr>
</table>

3. PROBABILIDAD CONDICIONADA.

En muchos problemas de probabilidad hay que calcula la probabilidad de un suceso B sabiendo que ha ocurrido el suceso A. Esta información adicional restringe el espacio muestral E, a un nuevo espacio muestral A, con lo que podemos definir la probabilidad de B condicionada a A, P(B/A) de la siguiente manera:

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

Donde:
P (B/A) es la probabilidad de que se dé el suceso B condicionada a que se haya dado el suceso A.
P (B ∩ A) es la probabilidad del suceso simultáneo de A y de B
P (A) es la probabilidad a priori del suceso A

Ejemplo 1: se tira un dado y sabemos que la probabilidad de que salga un 2 es 1/6 (probabilidad a priori). Si incorporamos nueva información (por ejemplo, alguien nos dice que el resultado ha sido un número par) entonces la probabilidad de que el resultado sea el 2 ya no es 1/6.
P (B/A) es la probabilidad de que salga el número 2 (suceso B) condicionada a que haya salido un número par (suceso A).
P (B ∩A) es la probabilidad de que salga el dos y número par.
P (A) es la probabilidad a priori de que salga un número par.
Por lo tanto: P (B ∩A) = 1/6, P (A) = ½, P (B/A) = (1/6) / (1/2) = 1/3
Luego, la probabilidad de que salga el número 2, si ya sabemos que ha salido un número par, es de 1/3 (mayor que su probabilidad a priori de 1/6).

Ejemplo 2: En un estudio sanitario se ha llegado a la conclusión de que la probabilidad de que una persona sufra problemas coronarios (suceso B) es el 0,10 (probabilidad a priori). Además, la probabilidad de que una persona sufra problemas de obesidad (suceso A) es el 0,25 y la probabilidad de que una persona sufra a la vez problemas de obesidad y coronarios (suceso intersección de A y B) es del 0,05. Calcular la probabilidad de que una persona sufra problemas coronarios si está obesa (probabilidad condicionada P(B/A)).
P (B ∩A) = 0,05, P (A) = 0,25, P (B/A) = 0,05 / 0,25 = 0,20
Por lo tanto, la probabilidad condicionada es superior a la probabilidad a priori. No siempre esto es así, a veces la probabilidad condicionada es igual a la probabilidad a priori o menor.
Por ejemplo: probabilidad de que al tirar un dado salga el número 2, condicionada a que haya salido un número impar. La probabilidad condicionada es en este caso cero, frente a una probabilidad a priori de 1/6.

Ejemplo 3:
Estudiamos el suceso A (porcentaje de varones mayores de 40 años casados) y el suceso B (varones mayores de 40 años con más de 2 hijos) y obtenemos la siguiente información:
Un 35% de los varones mayores de 40 años están casados.
De los varones mayores de 40 años y casados, un 30% tienen más de 2 hijos (suceso B condicionado al suceso A).
Calcular la probabilidad de que un varón mayor de 40 años esté casado y tenga más de 2 hijos (suceso intersección de A y B).
Por lo tanto:
P (A) = 0,35
P (B/A) = 0,30
P (A ∩ B) = 0,35 * 0,30 = 0,105
Es decir, un 10,5% de los varones mayores de 40 años están casados y tienen más de 2 hijos.

Ejemplo 4:
Estudiamos el suceso A (alumnos que hablan inglés) y el suceso B (alumnos que hablan alemán) y obtenemos la siguiente información:
Un 50% de los alumnos hablan inglés.
De los alumnos que hablan inglés, un 20% hablan también alemán (suceso B condicionado al suceso A).
Calcular la probabilidad de que un alumno hable inglés y alemán
(suceso intersección de A y B).
Por lo tanto:
P (A) = 0,50
P (B/A) = 0,20

$P(A \cap B) = 0{,}50 * 0{,}20 = 0{,}10$
Es decir, un 10% de los alumnos hablan inglés y alemán.

SUCESOS INDEPENDIENTES

Dos sucesos son independientes entre sí, si la ocurrencia de uno de ellos no afecta para nada a la ocurrencia del otro:
Ejemplo: el suceso estatura de los alumnos de una clase y el color del pelo son independientes: el que un alumno sea más o menos alto no va a influir en el color de su cabello, ni viceversa.
Para que dos sucesos sean independientes tienen que verificar al menos una de las siguientes condiciones:
$P(B/A) = P(B)$ es decir, que la probabilidad de que se dé el suceso B, condicionada a que previamente se haya dado el suceso A, es exactamente igual a la probabilidad de B.
Ejemplo: la probabilidad de que al tirar una moneda salga cara (suceso B), condicionada a que haga buen tiempo (suceso A), es igual a la propia probabilidad del suceso B.
$P(A/B) = P(A)$ es decir, que la probabilidad de que se dé el suceso A, condicionada a que previamente se haya dado el suceso B, es exactamente igual a la probabilidad de A.
Ejemplo: la probabilidad de que haga buen tiempo (suceso A), condicionada a que al tirar una moneda salga cara (suceso B), es igual a la propia probabilidad del suceso A.
Si el suceso A es independiente del suceso B, entonces el suceso B también es independiente del suceso A.
De donde se deduce que si dos sucesos son independientes tenemos que:

REGLA DEL PRODUCTO

$P(A \cap B) = P(A) * P(B)$ es decir, la probabilidad de que se de el suceso conjunto A y B es exactamente igual a la probabilidad del suceso A multiplicada por la probabilidad del suceso B.
Ejemplo: la probabilidad de que haga buen tiempo (suceso A) y salga cara al tirar una moneda (suceso B), es igual a la probabilidad del suceso A multiplicada por la probabilidad del suceso B

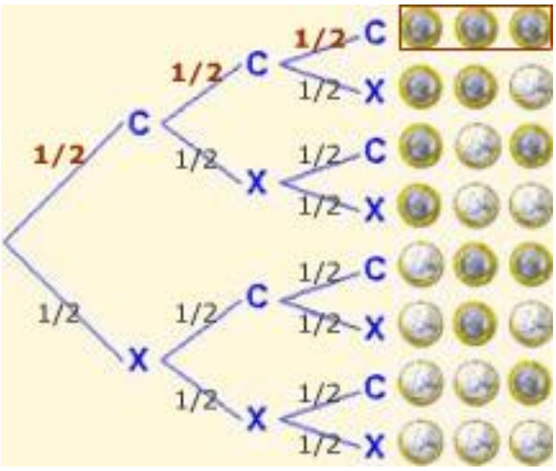
<u>Ejemplo 1º:</u>
Analicemos dos sucesos:
Suceso A: la probabilidad de que haga buen tiempo es del 0,4
Suceso B: la probabilidad de tener un accidente es del 0,1
Suceso intersección: la probabilidad de que haga buen tiempo y tener un accidente es del 0,08
Veamos si se cumple alguna de las condiciones señaladas:
$P(B/A) = P(A \cap B) / P(A) = 0{,}08 / 0{,}4 = 0{,}2$ (que no es igual a $P(B)$)
$P(A/B) = P(A \cap B) / P(B) = 0{,}08 / 0{,}6 = 0{,}133$ (que no es igual a $P(A)$)
$P(A \cap B) = 0{,}08$ (que no es igual a $P(A)$ multiplicado por $P(B)$)
Por lo tanto, no se cumple ninguna de las tres condiciones señaladas por lo que estos dos sucesos no son independientes, sino que existe algún grado de dependencia entre ellos.

<u>Ejemplo 2º:</u>
Analicemos dos sucesos:
Suceso A: la probabilidad de que haga buen tiempo es del 0,4
Suceso B: la probabilidad de salir cara al lanzar una moneda es del 0,5
Suceso intersección: la probabilidad de que haga buen tiempo y que salga cara es 0,2
Veamos si se cumple alguna de las condiciones señaladas:
$P(B/A) = P(A \cap B) / P(A) = 0{,}2 / 0{,}4 = 0{,}5$ (igual que $P(B)$)
$P(A/B) = P(A \cap B) / P(B) = 0{,}2 / 0{,}6 = 0{,}4$ (igual que $P(A)$)
$P(A \cap B) = 0{,}2$ (igual a $P(A)$ multiplicado por $P(B)$)
Por lo tanto, estos dos sucesos sí son independientes.

EXPERIMENTO COMPUESTO

Un experimento compuesto es aquel que consta de dos o más experimentos aleatorios simples.
Cuando un experimento o suceso aleatorio sigue un modelo dinámico, es decir, cuando se puede a su vez dividir en subexperimentos, que se realizan consecutivamente en el tiempo, se puede estudiar como modelo aleatorio multidimensional, o bien, como un modelo de aleatorio de experimentos simples, estudiando según el resultado que ocurra tras cada experimento simple, y los posibles resultados del siguiente experimento.

Es decir, si tiramos un dado, o una moneda, son experimentos aleatorios simples, pero si realizamos el experimento de tirar un dado y posteriormente una moneda, estamos realizando un experimento compuesto.
En los experimentos compuestos es conveniente usar el llamado diagrama en árbol para encontrar el espacio muestral del mismo.
La probabilidad de un suceso en un experimento compuesto se calcula a partir de las probabilidades de los experimentos simples que lo forman.
Por ejemplo el experimento de lanzar tres monedas puede considerarse compuesto del experimento simple de lanzar una moneda tres veces seguidas.



Podemos construir el espacio muestral mediante un diagrama de árbol, como se vio anteriormente, y consta de 8 elementos:
E = {CCC, CCX, CXC, CXX, XCC, XCX, XXC, XXX}
Así la probabilidad de obtener tres caras es:
P(CCC) = 1/8
Pero se llega al mismo resultado si se multiplica la probabilidad de obtener cara en cada uno de los tres lanzamientos:
$P(C_1)\cdot P(C_2)\cdot P(C_3) = (1/2)\cdot(1/2)\cdot(1/2) = 1/8$

Observa en el diagrama que cada rama del camino lleva a un resultado, la probabilidad de cada resultado es la de cada camino, y en cada uno se calcula multiplicando las probabilidades de las ramas que lo componen.
Como veremos a continuación, la probabilidad de un "camino" en un diagrama de árbol, es igual al producto de las probabilidades de las ramas de dicho camino.

PROBABILIDAD COMPUESTA
Regla de la Multiplicación
Del concepto de probabilidad condicional, obtenemos una fórmula para hallar la probabilidad de la intersección (o producto) de los eventos A y B.

$$P[A \cap B] = P[B]\ P[A|B] = P[AB] \quad P(B) > 0$$

y también

$$P[A \cap B] = P[A]\ P[B|A] = P[AB] \quad P(A) > 0$$

Este resultado en probabilidades se denomina REGLA DE LA MULTIPLICACION o probabilidad de la intersección, (o probabilidad conjunta); expresa la probabilidad de que ocurran los eventos A y B.

Ejemplo 1 : Una caja contiene 5 bolas blancas y 6 negras; se extrae 2 bolas, ¿cuál es la probabilidad que las dos resulten blancas
PRIMERA FORMA. Se extraen las bolas una a una, sin reposición.
Sean los eventos:
A1 : "La primera bola resulta blanca"
A2: "La segunda bola resulta blanca"
E: "Las dos bolas resulten blancas"
La probabilidad pedida es del evento $E = A_1 \cap A_2 = A_1 A_2$
E, es la intersección de los dos eventos y la ocurrencia de A1 influye en la de A2, o sea

$$P[E] = P[A_1 A_2] = P[A_1]\ P[A_2 | A_1]$$

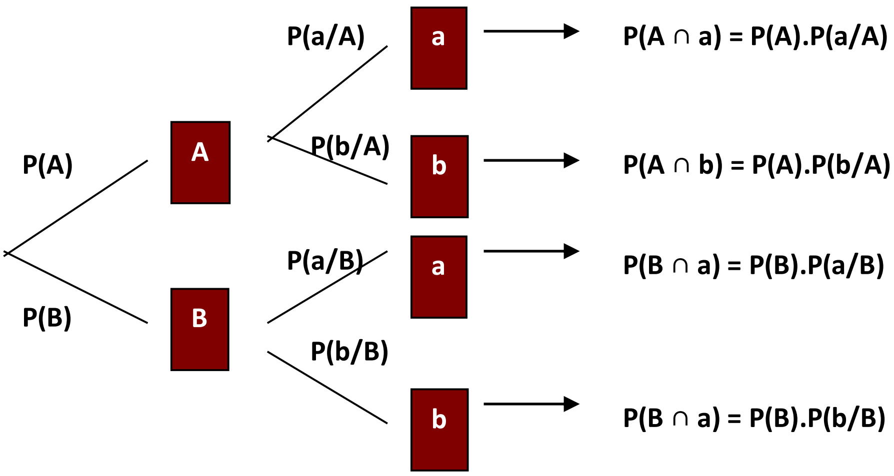
En la urna hay 11 bolas de las cuales 5 son blancas, entonces $P[A_1] = \frac{5}{11}$

Después de la ocurrencia del evento A_1, queda 10 bolas de las cuales 4 son blancas, luego

$$P[A_2|A_1] = \frac{4}{10} \quad \text{por lo tanto}$$

$$P[E] = P[A_1]\ P[A_2\,|\,A_1] = \frac{5}{11} x \frac{4}{10} = \frac{2}{11}$$

DIAGRAMA DE ÁRBOL



Teorema de las Probabilidades Totales:

P(a) = P[(A∩a)U(B∩a)] = P(A∩a) + P(B∩b) = P(A).P(a/A) + P(B).P(a/B)

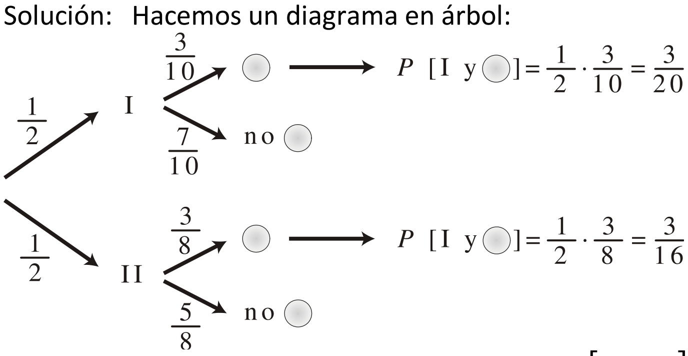
Si un SUCESO se verifica en varias ramas del árbol, la probabilidad de ese suceso es la suma de las probabilidades de cada una de estas ramas.

<u>EJEMPLO</u>

Tenemos dos urnas: la primera tiene 3 bolas rojas, 3 blancas y 4 negras; la segunda tiene 4 bolas rojas, 3 blancas y 1 negra. Elegimos una urna al azar y extraemos una bola.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que la bola extraída sea blanca?
b) Sabiendo que la bola extraída fue blanca, ¿cuál es la probabilidad de que fuera de la primera urna?

Solución: Hacemos un diagrama en árbol:



$$a)\ P[B] = \frac{3}{20} + \frac{3}{16} = \frac{27}{80} \qquad b)\ P[I/B] = \frac{P[I\ \ y\ \ B]}{P[B]} = \frac{3/20}{27/80} = \frac{4}{9}$$

TABLA DE CONTINGENCIA

	A	B	
a	P(A∩a)	P(B∩a)	P(a)
b	P(A∩b)	P(B∩b)	P(b)

	P(A)	P(B)	1

Las PROBABILIDADES CONDICIONADAS se calculan por la definición: P(A/a) = P(A∩a) / P(a)

EJEMPLO

En un viaje organizado por Europa para 120 personas, 48 de los que van saben hablar inglés, 36 saben hablar francés, y 12 de ellos hablan los dos idiomas.

Escogemos uno de los viajeros al azar.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que hable alguno de los dos idiomas?
b) ¿Cuál es la probabilidad de que hable francés, sabiendo que habla inglés?
c) ¿Cuál es la probabilidad de que solo hable francés?

Solución: Vamos a organizar los datos en una tabla, completando los que faltan:

	HABLAN FRANCÉS	NO HABLAN FRANCÉS	
HABLAN INGLÉS	12	36	48
NO HABLAN INGLES	24	48	72
	36	84	120

Llamamos I a "Habla ingles", F a "Habla francés".

a) Tenemos que hallar P[I ∪ F]:

$$P[I \cup F] = P[I] + P[F] - P[I \cap F] = \frac{48+36-12}{120} = \frac{72}{120} = \frac{3}{5} = 0{,}6$$

$$\text{b) } P[F/I] = \frac{12}{48} = \frac{1}{4} = 0{,}25$$

$$\text{c) } P[F \cap \text{no } I] = \frac{24}{120} = \frac{1}{5} = 0{,}2$$

EJERCICIOS RESUELTOS

7. En una bolsa hay bolas iguales de tres colores: 3 blancas, 4 verdes y 5 rojas; si se saca una bola y se mira el color, halla la probabilidad de que:

(Se muestran las soluciones tras las preguntas)

(En total, 3+4+5=12 bolas)

- Sea blanca $\rightarrow P(blanca) = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$
- Sea verde $\rightarrow P(verde) = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$
- Sea roja $\rightarrow P(roja) = \frac{5}{12}$

(Obviamente, la probabilidad de que sea o blanca, o verde o roja ha de ser 1; lo comprobamos: $((blanca) + P(verde) + P(roja) = \frac{1}{4} + \frac{1}{3} + \frac{5}{12} = \frac{3+4+5}{12} = \frac{12}{12} = 1$

- No sea verde $\rightarrow$

$$P(no\ verde) = P(\overline{verde}) = 1 - P(blanca\ o\ roja) = 1 - \left(\frac{1}{4} + \frac{5}{12}\right) = \frac{12-3-5}{12} = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}$$

8. Si lanzamos simultáneamente 2 monedas al aire, calcula la probabilidad de:

(Se muestran las soluciones tras las preguntas)

- Sacar dos caras $\rightarrow P(2caras) = P(cara) \cdot P(cara) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$
- Sacar dos cruces $\rightarrow P(2cruces) = P(cruz) \cdot P(cruz) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$
- Sacar cara en una moneda y cruz en la otra

$$P(1cara\&1cruz) = P(cara\ y\ cruz) + P(crux\ y\ cara) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

9. Una caja contiene 10 bolas, 7 blancas y 3 negras. Si se sacan 2 bolas al azar, escribe el espacio muestral y calcula la probabilidad de: *(Se muestran las soluciones tras las preguntas)*

→ E = {BB, BN, NN, NB}

– Los dos sean del mismo color, con reemplazamiento (se devuelve a la caja la bola que hemos sacado)

$\rightarrow P(BB) = \frac{7}{10} \cdot \frac{7}{10} = \frac{49}{100}$

$\rightarrow P(NN) = \frac{3}{10} \cdot \frac{3}{10} = \frac{9}{10}$

– Las dos sean del mismo color, sin reemplazamiento (no devolvemos a la caja la que hemos sacado)

$\rightarrow P(BB) = \frac{7}{10} \cdot \frac{6}{9} = \frac{7 \cdot 3 \cdot 2}{5 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3} = \frac{7}{15}$

$\rightarrow P(NN) = \frac{3}{10} \cdot \frac{2}{9} = \frac{3 \cdot 2}{5 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3} = \frac{1}{15}$

---

10. Se extrae una bola de urna que tiene 4 bolas verdes, 5 blancas y 5 negras; halla la probabilidad de que al sacar una bola: *(Se muestran las soluciones tras las preguntas)*

– Sea verde o blanca $\rightarrow P(V \cup B) = P(V) + P(B) = \frac{4}{14} + \frac{5}{14} = \frac{9}{14}$

– No sea blanca $\rightarrow P(\bar{B}) = 1 - P(B) = 1 - \frac{5}{14} = \frac{10}{14} = \frac{5}{7}$

---

11. Ana y Miguel, dos alumnos de 3º de la ESO, tienen respectivamente 1/2 y 1/5 de probabilidades de suspender un examen de Lengua. La probabilidad de que ambos suspendan simultáneamente el examen es de un 1/10. ¿Cuál es la probabilidad de que al menos uno de ellos suspenda el examen?

<u>***SOLUCIÓN:***</u>

$$P(ana \cup miguel) = P(ana) + p(miguel) - P(ana \cap miguel) = \frac{1}{2} + \frac{1}{5} - \frac{1}{10} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$$

---

12. Lanzamos simultáneamente dos dados cúbicos; calcula la probabilidad de: *(Se muestran las soluciones tras las preguntas)*

– Dos unos $\rightarrow P(uno) \cdot P(uno) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{36} = 6^{-2}$

– Dos números distintos de uno →

$P(\overline{uno}) \cdot P(\overline{uno}) = \left(1 - \frac{1}{6}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{6}\right) = \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} = \frac{25}{36}$

---

14. Se ha probado experimentalmente que la probabilidad de que una moneda trucada caiga *cara* es 0,35. Si lanzamos simultáneamente dos monedas trucadas de este tipo, ¿cuál es la probabilidad de que, al menos una de ellas, caiga *cara*?

<u>***SOLUCIÓN:***</u>

$$P(cara1 \cup cara2) = P(cara1) + P(cara2) - P(cara1 \cap cara2) =$$
$$= 0.35 + 0.35 - 0.35 \cdot 0.35 = 0.5775$$

---

17. Acuden a una cena 28 hombres y 32 mujeres; de postre, han comido flan 16 hombres y 20 mujeres; el resto han comido tarta. Si elegimos al azar uno de los comensales, calcula la probabilidad de que:

- sea hombre
- haya comido tarta
- sea hombre y haya comido flan

– ***SOLUCIÓN:***

Lo primero, confeccionamos la tabla de doble entrada:

	flan	tarta	total
hombre	16	12	28
mujer	20	12	32
total	36	24	***60***

$$P(hombre) = \frac{28}{60} = \frac{7}{15} = 0.46$$

$$P(tarta) = \frac{24}{60} = \frac{2}{5} = 0.4$$

$$P(hombre\ y\ flan) = \frac{16}{60} = \frac{4}{15} = 0.27$$

OTROS

Ejercicio nº 1.-

Dos personas eligen al azar, cada una de ellas, un número del 0 al 9. ¿Cuál es la probabilidad de que las dos personas no piensen el mismo número?

Solución: Para calcular la probabilidad, suponemos que el primero ya ha elegido número. La pregunta es: ¿cuál es la probabilidad de que el segundo elija el mismo número?

$$P = \frac{10}{100} = \frac{1}{10} = 0{,}1$$

Por tanto, la probabilidad de que no piensen el mismo número será:

$$1 - \frac{1}{10} = \frac{9}{10} = 0{,}9$$

Ejercicio nº 2.-

En un viaje organizado por Europa para 120 personas, 48 de los que van saben hablar inglés, 36 saben hablar francés, y 12 de ellos hablan los dos idiomas.

Escogemos uno de los viajeros al azar.

A ¿Cuál es la probabilidad de que hable alguno de los dos idiomas?

B ¿Cuál es la probabilidad de que hable francés, sabiendo que habla inglés?

C ¿Cuál es la probabilidad de que solo hable francés?

Solución: Vamos a organizar los datos en una tabla, completando los que faltan:

	HABLAN FRANCÉS	NO HABLAN FRANCÉS	
HABLAN INGLÉS	12	36	48
NO HABLAN INGLES	24	48	72
	36	84	120

Llamamos I "Habla ingles", F "Habla francés".

a. Tenemos que hallar $P[I \cup F]$:

$$P[I \cup F] = P[I] + P[F] - P[I \cap F] = \frac{48+36-12}{120} = \frac{72}{120} = \frac{3}{5} = 0{,}6$$

b) $P[F/I] = \frac{12}{48} = \frac{1}{4} = 0{,}25$

c) $P[F \cap \text{no}\, I] = \frac{24}{120} = \frac{1}{5} = 0{,}2$

Ejercicio nº 3.-

Una urna, A, contiene 7 bolas numeradas del 1 al 7. En otra urna, B, hay 5 bolas numeradas del 1 al 5. Lanzamos una moneda equilibrada, de forma que, si sale cara, extraemos una bola de la urna A y, si sale cruz, la extraemos de B.

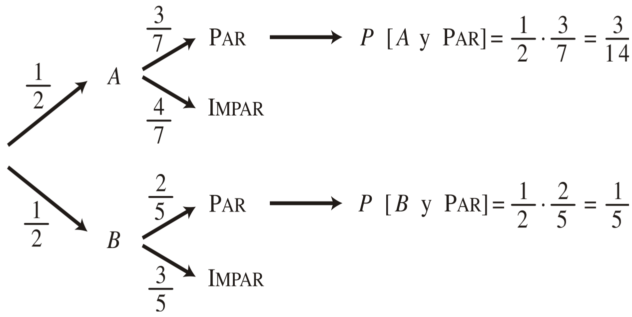
a ¿Cuál es la probabilidad de obtener un número par?

b Sabiendo que salió un número par, ¿cuál es la probabilidad de que fuera de la urna A?

Solución: Hacemos un diagrama en árbol:

$$a)\ P[\text{PAR}] = \frac{3}{14} + \frac{1}{5} = \frac{29}{70}$$

$$b)\ P[A/\text{PAR}] = \frac{P[A \text{ y } \text{PAR}]}{P[\text{PAR}]} = \frac{3/14}{29/70} = \frac{15}{29}$$



Ejercicio nº 4.-

Extraemos dos cartas de una baraja española (de cuarenta cartas). Calcula la probabilidad de que sean:

a) Las dos de oros. b) Una de copas u otra de oros.

c) Al menos una de oros. d) La primera de copas y la segunda de oro.

Solución:

$$a)\ P = \frac{10}{40} \cdot \frac{9}{39} = \frac{3}{52} = 0{,}058 \qquad b)\ P = 2 \cdot \frac{10}{40} \cdot \frac{10}{39} = \frac{5}{39} = 0{,}128$$

$$c)\ P = 1 - P[\text{NINGUNA DE OROS}] = 1 - \frac{30}{40} \cdot \frac{29}{39} = 1 - \frac{29}{52} = \frac{23}{52} = 0{,}442 \qquad d)\ P = \frac{10}{40} \cdot \frac{10}{39} = \frac{5}{78} = 0{,}064$$

Ejercicio nº 5.-

Se hace una encuesta en un grupo de 120 personas, preguntando si les gusta leer y ver la televisión. Los resultados son:

A 32 personas les gusta leer y ver la tele.

A 92 personas les gusta leer.

A 47 personas les gusta ver la tele.

Si elegimos al azar una de esas personas:

A ¿Cuál es la probabilidad de que no le guste ver la tele?

B ¿Cuál es la probabilidad de que le guste leer, sabiendo que le gusta ver la tele?

C ¿Cuál es la probabilidad de que le guste leer?

Solución: Vamos a organizar la información en una tabla de doble entrada, completando los datos que faltan:

	VEN LA TELE	NO VEN LA TELE	
LEEN	32	60	92
NO LEEN	15	13	28
	47	73	120

Llamemos L = "Le gusta leer" y T = "Le gusta ver la tele".

$$a)\ P[\text{no } l] = \frac{73}{120} = 0{,}61 \qquad b)\ P[L/T] = \frac{32}{47} = 0{,}68 \qquad c)\ P[L] = \frac{92}{120} = \frac{23}{30} = 0{,}77$$

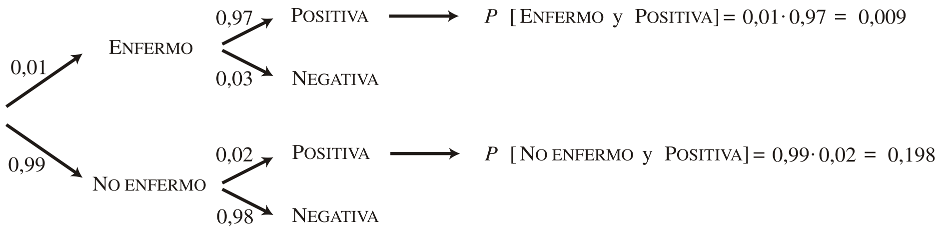
Ejercicio nº 6.-

El 1% de la población de un determinado lugar padece una enfermedad. Para detectar esta enfermedad se realiza una prueba de diagnóstico. Esta prueba da positiva en el 97% de los pacientes que padecen la enfermedad; en el 98% de los individuos que no la padecen da negativa. Si elegimos al azar un individuo de esa población:

A ¿Cuál es la probabilidad de que el individuo dé positivo y padezca la enfermedad?

B Si sabemos que ha dado positiva, ¿cuál es la probabilidad de que padezca la enfermedad?

Solución: Hacemos un diagrama en árbol:



A P[Enfermo y Positiva] ≈ 0,0097

$$b)\ P[\text{ENFERMO}/\text{POSITIVA}] = \frac{P[\text{ENFERMO y POSITIVA}]}{P[\text{POSITIVA}]} = \frac{0{,}0097}{0{,}0097 + 0{,}0198} = \frac{0{,}0097}{0{,}0295} = 0{,}33$$

Ejercicio nº 7.-

En un pueblo hay 100 jóvenes; 40 de los chicos y 35 de las chicas juegan al tenis. El total de chicas en el pueblo es de 45. Si elegimos un joven de esa localidad al azar:
A ¿Cuál es la probabilidad de que sea chico?
B Si sabemos que juega al tenis, ¿cuál es la probabilidad de que sea chica?
C ¿Cuál es la probabilidad de que sea un chico que no juegue al tenis?
Solución: Hacemos una tabla de doble entrada, completando los datos que faltan:

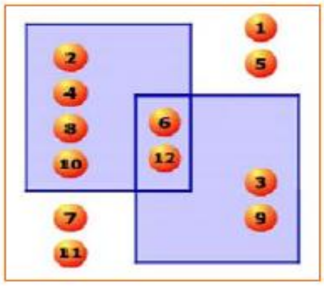
	CHICOS	CHICAS	
JUEGAN AL TENIS	40	35	75
NO JUEGAN AL TENIS	15	10	25
	55	45	100

a) $P[Chico] = \frac{55}{10} = \frac{11}{20} = 0{,}55$ b) $P[Chica/\ Tenis] = \frac{35}{75} = \frac{7}{15} = 0{,}47$ c) $P[Chica \cap\ No\ tenis] = \frac{15}{100} = \frac{3}{20} = 0{,}15$

Revoltijo de esquemas y MÁS EJEMPLOS

A="par" B="múltiplo de 3"
$P(A)=6/12=1/2$ $P(B)=4/12=1/3$
$P(\bar{A})=1/2$ $p(\bar{B})=2/3$

$$P(A \cup B) = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} = \frac{2}{3}$$



EJEMPLO

En una urna hay 3 bolas rojas, 2 bolas blancas y 4 bolas azules. Si extraemos una bola, halla:

a) La probabilidad de que sea roja.
b) La probabilidad de que no sea blanca.
c) La probabilidad de que sea roja o azul.
d) La probabilidad de que sea azul o blanca.

a) Llamamos a los sucesos: R = sacar bola roja, B = sacar bola blanca y A = sacar bola azul.
Aplicando la regla de Laplace, la probabilidad de que la bola que salga sea roja es:

$$P(R) = \frac{\text{número de casos favorables}}{\text{número de casos posibles}} = \frac{3}{10} = 0{,}3$$

b) La probabilidad de que la bola no sea blanca (suceso $\bar{B}$) es:

$$P(\bar{B}) = 1 - P(B) = 1 - \frac{2}{10} = 1 - 0{,}2 = 0{,}8$$

c) La probabilidad de que la bola sea roja o azul es el suceso $R \cup A$.
Como sacar bola roja o azul son sucesos incompatibles (la bola es roja o azul, pero no puede ser roja y azul a la vez), la probabilidad es la suma de ambas probabilidades:

$$P(R \cup A) = P(R) + P(A) = \frac{3}{10} + \frac{4}{10} = \frac{7}{10} = 0{,}7$$

d) Como sacar bola azul o blanca son sucesos incompatibles, la probabilidad pedida es:

$$P(B \cup A) = P(B) + P(A) = \frac{2}{10} + \frac{4}{10} = \frac{6}{10} = 0{,}6$$

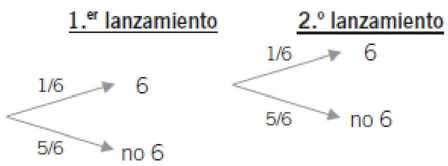
La probabilidad de un experimento compuesto se calcula a partir de las probabilidades de los sucesos simples que lo forman.

EJEMPLO

¿Cuál es la probabilidad de sacar dos números 6 al lanzar dos dados de parchís?

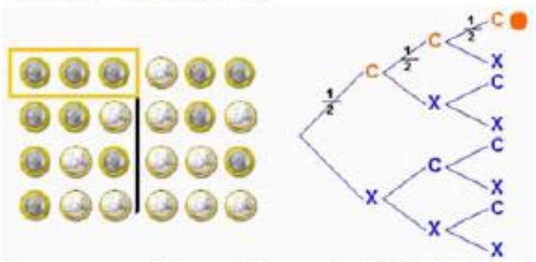
Una forma de resolver el problema es aplicar directamente la regla de Laplace: de las 36 combinaciones posibles que pueden darse al tirar dos dados, únicamente es favorable el suceso (6, 6): $P(6, 6) = \frac{1}{36}$.

Otra manera de resolver los problemas de probabilidades compuestas es construir un diagrama de árbol:



$$P(6, 6) = P(6) \cdot P(6) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$$

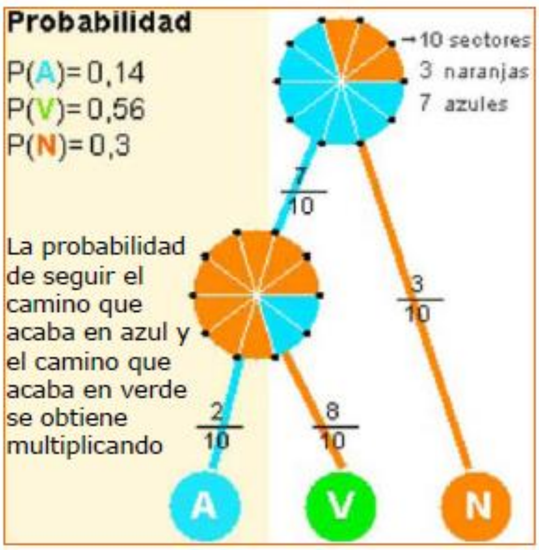
Tiramos una moneda tres veces seguidas, ¿cuál es la probabilidad de obtener tres caras?



8 casos posibles
1 caso favorable

La probabilidad de C en cada moneda 1/2

$$P(CCC) = \frac{1}{8} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}$$



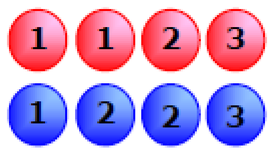
$$P(B/A) = \frac{\text{Casos favorables de B ocurriendo A}}{\text{Casos posibles ocurriendo A}} =$$

$$= \frac{\text{Casos favorables de A y B}}{\text{Casos favorables de A}} =$$

$$= \frac{\boxed{\dfrac{\text{Casos favorables de A y B}}{\text{Casos favorables en total}}}}{\boxed{\dfrac{\text{Casos favorables de A}}{\text{Casos favorables en total}}}} = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

En una urna tenemos bolas rojas y azules numeradas como en la figura. ¿Cuál es la probabilidad de sacar cada número?

P(1)=3/8
P(2)=3/8
P(3)=2/8



Si sabemos que la bola es roja

P(1/R)=2/4 (de 4 rojas hay 2 con 1)
P(1)<P(1/R) se favorecen

P(2/R)=1/4 (de 4 rojas hay 1 con 2)
P(2)>P(2/R) se desfavorecen

P(3/R)=1/4 (de 4 rojas hay 1 con 3)
P(3)=P(3/R) son independientes.

NOMBRE: ____________________ CURSO: __________ FECHA: __________

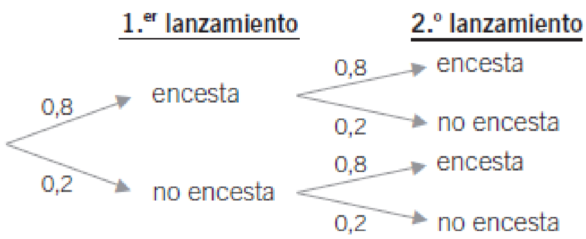
- Un suceso B está condicionado por otro suceso A, y se expresa B/A cuando sabemos que ha ocurrido el suceso A.
- La probabilidad de que ocurra $A \cap B$ es igual a la probabilidad de que ocurra el suceso A, multiplicada por la probabilidad de que ocurra el suceso B condicionado a A.

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B/A)$$

EJEMPLO

El marcador de un partido de baloncesto entre los equipos A y B está en 80-81, a falta de que un jugador del equipo A lance dos tiros libres. Si suele acertar el 80 % de los lanzamientos, ¿cuál será la probabilidad de que enceste los dos tiros y gane A? ¿Y de que falle los dos tiros y gane B? ¿Y de que enceste uno y queden empatados?

Construimos el correspondiente diagrama de árbol:



Para que gane el equipo A es necesario encestar el segundo lanzamiento, siempre que se haya encestado el primero. Esto se expresa así:

$$P(1.^{\circ} \cap 2.^{\circ}) = P(1.^{\circ}) \cdot P(2.^{\circ}/1.^{\circ})$$

Suponemos que la probabilidad de encestar en el 2.º lanzamiento es independiente de lo que haya ocurrido en el 1.er lanzamiento, y vale igual que en el primero, 80 % = 0,8. En este caso resulta que:

$$P(1.^{\circ} \cap 2.^{\circ}) = P(1.^{\circ}) \cdot P(2.^{\circ}/1.^{\circ}) = P(1.^{\circ}) \cdot P(2.^{\circ}) = 0{,}8 \cdot 0{,}8 = 0{,}64$$

Hay un 64 % de probabilidad de que gane el equipo A.

La probabilidad de que falle los dos lanzamientos será:

$$P(\text{no } 1.^{\circ} \cap \text{no } 2.^{\circ}) = P(\text{no } 1.^{\circ}) \cdot P(\text{no } 2.^{\circ}/\text{no } 1.^{\circ}) = P(\text{no } 1.^{\circ}) \cdot P(\text{no } 2.^{\circ}) = 0{,}2 \cdot 0{,}2 = 0{,}04$$

La probabilidad de que falle uno de los dos lanzamientos es:

$$P(\text{sí } 1.^{\circ}/\text{no } 2.^{\circ}) + P(\text{no } 1.^{\circ}/\text{sí } 2.^{\circ}) = 0{,}8 \cdot 0{,}2 + 0{,}2 \cdot 0{,}8 = 0{,}16 + 0{,}16 = 0{,}32$$

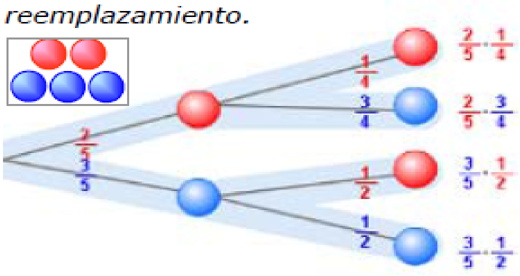
- Dos sucesos A y B son **independientes** si la realización de A no condiciona la probabilidad de B:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B/A) = P(A) \cdot P(B)$$

- Dos sucesos A y B son **dependientes** si la realización de A condiciona la probabilidad de B:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B/A)$$

En una urna hay 2 bolas rojas y 3 azules, extraemos dos bolas sin reemplazamiento.



Suma = 1

Probabilidad de que las dos sean rojas:

$$P(R_1R_2)=P(R_1)\cdot P(R_2/R_1) = \frac{2}{5}\cdot\frac{1}{4}$$

Probabilidad de que las dos sean azules:

$$P(A_1A_2)=P(A_1)\cdot P(A_2/A_1) = \frac{3}{5}\cdot\frac{2}{4}$$

Probabilidad de que sean del mismo color:

$$P(R_1R_2\cup A_1A_2)=\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{4}+\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{4}=\frac{2}{5}$$

Probabilidad de que sean de distinto color:

$$P(R_1A_2\cup R_1A_2)=\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{4}+\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{4}=\frac{3}{5}$$

TABLAS DE CONTINGENCIA 14

NOMBRE: ______________________ CURSO: __________ FECHA: __________

Otra forma de resolver los problemas de probabilidad de sucesos simples y compuestos es a partir de una tabla de contingencia.

EJEMPLO

En una pandilla formada por 12 chicas y 8 chicos, se forman dos grupos, uno para ir al cine y otro para ir al fútbol. Para ir al fútbol se apuntan 2 chicos y 9 chicas. Elegido uno de los 20 amigos al azar:

a) ¿Cuál es la probabilidad de que sea chica?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que sea chica y vaya al fútbol?

c) ¿Y la probabilidad de que sea chico y vaya al cine?

Con los datos del enunciado, construimos una tabla de doble entrada:

	CHICAS	CHICOS	TOTAL
VAN AL FÚTBOL	9	2	11
VAN AL CINE	3	6	9
TOTAL	12	8	20

a) La probabilidad de que sea chica la obtenemos dividiendo el total de chicas (12) entre el total de amigos (40):

$$P\text{ (chica)} = \frac{12}{40} = 0{,}3$$

b) Para hallar la probabilidad de que sea chica y vaya al fútbol, observamos la tabla:

$$P\text{ (chica e ir al fútbol)} = \frac{9}{40} = 0{,}225$$

c) La probabilidad de que sea chico y vaya al cine es:

$$P\text{ (chico e ir al cine)} = \frac{6}{40} = 0{,}15$$

1

En una población, la probabilidad de medir más de 170 centímetros es del 30%, y la de ser aficionado al cine, del 65%.

¿Cuál es la probabilidad de que una persona elegida al azar mida menos de dicha altura y le guste el cine?

$$P(\textit{más bajo de 170} \cap \textit{aficionado al cine}) = \frac{70}{100} \cdot \frac{65}{100} = 0{,}455$$

2

Se extrae una carta de una baraja española y se tira un dado cúbico con las caras numeradas del 1 al 6. Halla la probabilidad de sacar una espada y obtener un número par en el dado.

$$P(\textit{espada y n.° par}) = P(\textit{espada}) \cdot P(\textit{n.° par}) = \frac{10}{40} \cdot \frac{3}{6} = \frac{1}{8}$$

3

En una bolsa se introducen unas tarjetas con los nombres de los alumnos de una clase: 16 chicas y 12 chicos. Se extraen 2 tarjetas al azar. Halla la probabilidad de que sean de 2 chicas:

a) Con devolución de la primera tarjeta.

b) Sin devolución.

a) Con devolución de la tarjeta.

$$P(\textit{2 chicas}) = P(\textit{chica la 1.ª y chica la 2.ª}) = P(\textit{chica la 1.ª}) \cdot P(\textit{chica la 2.ª}) = \frac{16}{28} \cdot \frac{16}{28} = 0{,}3265$$

b) Sin devolución de la tarjeta.

$$P(\textit{2 chicas}) = P(\textit{chica la 1.ª y chica la 2.ª}) = P(\textit{chica la 1.ª}) \cdot P(\textit{chica la 2.ª/chica la 1.ª}) = \frac{16}{28} \cdot \frac{15}{27} = 0{,}3175$$

4

En una caja hay 30 bombones, de los cuales 10 son de almendra, 12 de avellana y el resto de chocolate puro. Si se escoge un bombón al azar, halla:

a) *P*(*que sea de almendra*).

b) *P*(*que no sea de avellana*).

c) *P*(*que sea de almendra o de chocolate puro*).

a) $P(\textit{que sea de almendra}) = \frac{10}{30} = \frac{1}{3}$.

b) $P(\textit{que no sea de avellana}) = \frac{18}{30} = \frac{3}{5}$.

c) $P(\textit{que sea de almendra o de chocolate puro}) = \frac{18}{30} = \frac{3}{5}$.

5

En una determinada ciudad se sabe que, para personas de más de 60 años, la probabilidad de padecer una enfermedad de corazón es 0,15 y la de padecer artrosis es 0,25. También se sabe que la probabilidad de padecer ambas enfermedades es 0,08. Elegida al azar una persona de esa ciudad con más de 60 años, ¿cuál es la probabilidad de que padezca del corazón o de artrosis?

Sea A = "*padecer artrosis*" y C = "*padecer de corazón*".

$$P(A \cup C) = P(A) + P(C) - P(A \cap C) = 0{,}25 + 0{,}15 - 0{,}08 = 0{,}32$$

6

Una urna contiene cuatro bolas blancas numeradas del 1 al 4, tres negras con los números del 5 al 7 y tres rojas con los números del 8 al 10. Si se extrae una bola al azar, calcula las siguientes probabilidades.

a) *P(salir una blanca o un número par)*

b) *P(salir una negra o un número impar)*

c) *P(no salir una blanca o un múltiplo de 3)*

a) $P(\text{salir una blanca o número par}) = P(\text{salir blanca}) + P(\text{salir par}) - P(\text{salir blanca y par}) = \frac{4}{10} + \frac{5}{10} - \frac{2}{10} = \frac{7}{10}$

b) $P(\text{salir negra o número impar}) = P(\text{salir negra}) + P(\text{salir impar}) - P(\text{salir negra e impar}) = \frac{3}{10} + \frac{5}{10} - \frac{2}{10} = \frac{3}{5}$

c) $P(\text{no salir blanca o múltiplo de 3}) = P(\text{no salir blanca}) + P(\text{no salir múltiplo de 3}) - P(\text{no salir blanca ni múltiplo de 3}) =$

$= \frac{6}{10} + \frac{7}{10} - \frac{9}{10} = \frac{4}{10}$

7

Probabilidad de un suceso. Regla de Laplace

15.19 **Se procede a girar la flecha de la ruleta.**

Calcula la probabilidad de los siguientes sucesos.

a) *Salir un número par.*

b) *Salir un número impar y el color rojo.*

c) *Salir un número impar o el color amarillo.*

d) *Salir un número par o el color verde.*

e) *No salir el color rojo.*

Consideramos los sucesos:

P = "salir par" I = "salir impar" A = "salir amarillo" V = "salir verde" R = "salir rojo"

a) $P(P) = \frac{1}{2}$

b) $P(I \cap R) = \frac{1}{4}$

c) $P(I \cup A) = P(I) + P(A) - P(I \cap A) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} = \frac{5}{8}$

d) $P(P \cup V) = P(P) + P(V) - P(A \cap V) = \frac{1}{2} + \frac{3}{8} - \frac{1}{4} = \frac{5}{8}$

e) $P(\overline{R}) = 1 - P(R) = 1 - \frac{3}{8} = \frac{5}{8}$

8

La baraja francesa está compuesta de 54 cartas, de las cuales 2 son comodines y las 52 cartas restantes están repartidas por igual en 4 palos: picas, corazones, tréboles y diamantes. Calcula la probabilidad de los siguientes sucesos del experimento que consiste en extraer al azar una carta de la baraja francesa.

a) *Sacar una pica o una figura.*

b) *Sacar una carta de palo rojo.*

c) *Sacar una carta de palo negro o figura.*

d) *Sacar una carta de palo rojo y menor que 5.*

e) *No sacar un comodín.*

a) $P(P \cup F) = P(P) + P(F) - P(P \cap F) = \frac{13}{54} + \frac{12}{54} - \frac{3}{54} = \frac{22}{54} = \frac{11}{27} \approx 0{,}401$

b) $P(R) = 26\backslash 54 = 0{,}48$

c) $P(N \cup F) = P(N) + P(F) - P(N \cap F) = \frac{26}{54} + \frac{12}{54} - \frac{6}{54} = \frac{32}{54} = 0{,}59$

d) $P(R \cap \text{"menor que 5"}) = \frac{8}{54} = 0{,}15$

e) $P(C) = 1 - P(\overline{C}) = 1 - \frac{2}{54} = \frac{42}{54} = \frac{26}{27}$

9

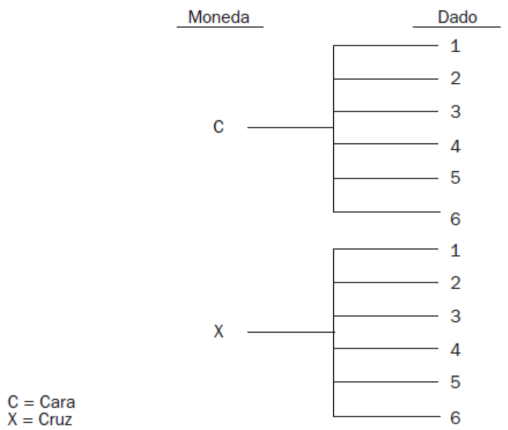
EJERCICIOS PROPUESTOS

1 **Se lanzan una moneda y un dado cúbico con las caras numeradas del 1 al 6.**

a) Forma el diagrama en árbol. ¿Cuántos resultados se obtienen?

b) Calcula la probabilidad de que salgan cara y número par.

a)



Hay 12 resultados posibles.

$E = \{(C, 1); (C, 2); (C, 3); (C, 4); (C, 5); (C, 6); (X, 1); (X, 2); (X, 3); (X, 4); (X, 5); (X, 6)\}$

b) $P(\text{cara y número par}) = P(\text{cara}) \cdot P(\text{número par}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{6} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$

10

En una bolsa se introducen unas tarjetas con los nombres de los alumnos de una clase compuesta por 16 chicas y 12 chicos. Se extraen 2 tarjetas al azar. Halla la probabilidad de que sean 2 chicas:

a) Con devolución de la primera tarjeta.

b) Sin devolución de la primera tarjeta.

$P(1.^\circ \text{ chica } \cap 2.^\circ \text{ chica}) = P(1.^\circ \text{ chica}) \cdot P(2.^\circ \text{ chica}) = \frac{16}{28} \cdot \frac{16}{28} = \frac{256}{784} \approx 0{,}33$

$P(1.^\circ \text{ chica } \cap 2.^\circ \text{ chica}) = P(1.^\circ \text{ chica}) \cdot P(2.^\circ \text{ chica} / 1.^\circ \text{ chica}) = \frac{16}{28} \cdot \frac{15}{27} = \frac{240}{756} \approx 0{,}32$

11

Una caja contiene 15 caramelos de limón y otros 15 de menta. Se extraen 2 caramelos al azar. Halla la probabilidad de que el primero sea de menta y el segundo de limón:

a) Con devolución del primer caramelo.

b) Sin devolución del primer caramelo.

a) $P(1.^\circ \text{ menta y } 2.^\circ \text{ limón}) = P(1.^\circ \text{ menta}) \cdot P(2.^\circ \text{ limón}) = \frac{15}{30} \cdot \frac{15}{30} = \frac{225}{900} = 0{,}25$

b) $P(1.^\circ \text{ menta y } 2.^\circ \text{ limón}) = P(1.^\circ \text{ menta}) \cdot P(2.^\circ \text{ limón} / 1.^\circ \text{ menta}) = \frac{15}{30} \cdot \frac{15}{29} = \frac{225}{870} = 0{,}26$

12

En un control de tráfico fueron multados 10 conductores: siete, por no llevar puesto el cinturón de seguridad, y los otros tres, por circular a mayor velocidad de la permitida. Elegidos al azar dos de los conductores sancionados, calcula la probabilidad de que ambos hayan sido multados por exceso de velocidad.

$P(\text{ambos multados por exceso de velocidad}) = P(1.^\circ \text{ exceso de velocidad}) \cdot P(2.^\circ \text{ exceso de velocidad} / 1.^\circ \text{ exceso de velocidad})$

$= \frac{3}{10} \cdot \frac{2}{9} = \frac{6}{90} = 0{,}07$

13

De un estuche que contiene 5 bolígrafos azules y 6 negros, se sacan sin mirar dos de ellos. Halla la probabilidad de que ambos sean de distinto color.

$P(\text{distinto color}) = P(1.^{\circ}\text{ azul}) \cdot P(2.^{\circ}\text{ negro} / 1.^{\circ}\text{ azul}) + P(1.^{\circ}\text{ negro}) \cdot P(2.^{\circ}\text{ azul} / 1.^{\circ}\text{ negro}) = \frac{5}{11} \cdot \frac{6}{10} + \frac{6}{11} \cdot \frac{5}{10} =$

$= \frac{30}{110} + \frac{30}{110} = \frac{60}{110} \approx 0{,}55$

14

Una bolsa contiene 5 bolas rojas, 10 negras y 12 azules. Se extraen 2 bolas al azar. Calcula la probabilidad de que ambas sean del mismo color.

$P(\text{mismo color}) = P(1.^{a}\text{ roja}) \cdot P(2.^{a}\text{ roja} / 1.^{a}\text{ roja}) + P(1.^{a}\text{ negra}) \cdot P(2.^{a}\text{ negra} / 1.^{a}\text{ negra}) + P(1.^{a}\text{ azul}) + P(2.^{a}\text{ azul} / 1.^{a}\text{ azul}) =$

$= \frac{5}{27} \cdot \frac{4}{26} + \frac{10}{27} \cdot \frac{9}{26} + \frac{12}{27} \cdot \frac{11}{26} = \frac{121}{351} = 0{,}3447$

15

Extraemos sucesivamente cuatro bolas de la urna de la figura. Calcula la probabilidad de obtener la palabra AMOR en los siguientes casos.

a) Devolviendo la bola a la urna después de cada extracción.

b) Sin devolverla.

a) $P(\text{se forme la palabra AMOR}) = P(1.^{a}\text{ A}) \cdot P(2.^{a}\text{ M}) \cdot P(3.^{a}\text{ O}) \cdot P(4.^{a}\text{ R}) =$

$= \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{256} = 0{,}004$

b) $P(\text{se forme la palabra AMOR}) = P(1.^{a}\text{ A}) \cdot P(2.^{a}\text{ M} / 1.^{a}\text{ A}) \cdot$

$\cdot P(3.^{a}\text{ O} / (1.^{a}\text{ A} \cap 2.^{a}\text{ M}) \cdot P(4.^{a}\text{ R} / (1.^{a}\text{ A} \cap 2.^{a}\text{ M} \cap 3.^{a}\text{ O}) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{24} \approx 0{,}04$

16

Experimentos compuestos

Probabilidad condicionada

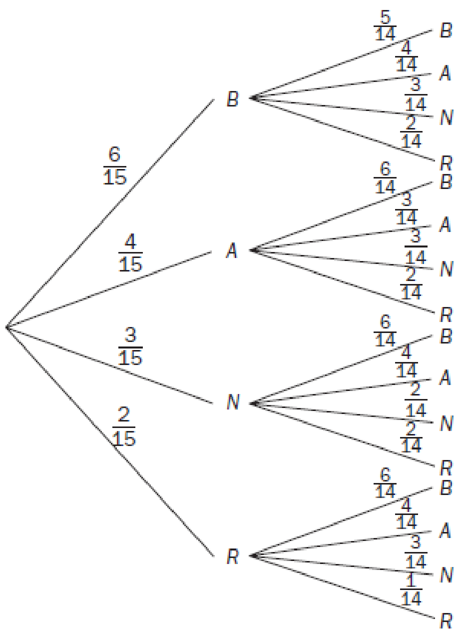
16.12 **En el armario de Luis hay 6 camisetas blancas, 4 azules, 3 negras y 2 rojas. Si saca consecutivamente 2 camisetas, ¿qué tipo de experimento realiza? Dibuja un diagrama en árbol con los resultados posibles y calcula la probabilidad de los siguientes sucesos.**

a) ***Sacar dos camisetas negras.***

b) ***Sacar una camiseta blanca y otra azul.***

c) ***No sacar ninguna camiseta roja.***

El experimento que realiza es aleatorio.



a) $P(N_1 \cap N_2) = P(N_1) \cdot P(N_2 / N_1) = \frac{3}{15} \cdot \frac{2}{14} = \frac{6}{210} \approx 0{,}0286$

b) $P(B \cap A) = P(B) \cdot P(A / B) + P(A) \cdot P(B / A) = \frac{6}{15} \cdot \frac{4}{14} + \frac{4}{15} \cdot$

$\cdot \frac{6}{14} = \frac{48}{210} \approx 0{,}229$

c) $P(\overline{R_1} \cap \overline{R_2}) = P(\overline{R_1}) \cdot P(\overline{R_2} / \overline{R_1}) = \frac{13}{15} \cdot \frac{12}{14} = \frac{156}{210} = 0{,}743$

17

Se ha averiguado experimentalmente que la probabilidad de que cierto tipo de chinchetas caigan con la punta hacia arriba es de 0,35.

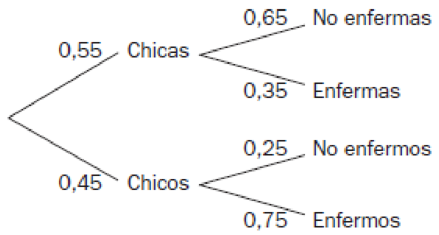
Si se lanzan dos chinchetas, ¿cuál es la probabilidad de que al menos una de ellas caiga con la punta hacia arriba?

$P(1 \cup 2) = P(1) + P(2) - P(1 \cap 2) = 0{,}35 + 0{,}35 - 0{,}35 \cdot 0{,}35 = 0{,}5775$

18

En un centro de enseñanza secundaria, el 55% de los estudiantes matriculados son chicas. Se sabe que el 65% de las alumnas no han estado enfermas durante el curso y que el 25% de los alumnos tampoco.

Si se elige un estudiante al azar, ¿cuál es la probabilidad de que se haya encontrado enfermo? Realiza el diagrama en árbol correspondiente.



$P(enfermo) = 0{,}45 \cdot 0{,}75 + 0{,}55 \cdot 0{,}35 = 0{,}53$

19

Copia y completa la siguiente tabla de contingencia que muestra la distribución de las tres clases de 4.º de ESO de un centro escolar.

	Alumnos	Alumnas	
A	30		
B		60	100
C			78
	100		232

Se escoge un estudiante al azar. Calcula la probabilidad de que:

a) Pertenezca a la clase *A*.

b) Sea una alumna.

c) Sea una alumna y esté en la clase *B*.

d) Pertenezca a la clase *C* sabiendo que es alumna.

e) Sea un alumno sabiendo que pertenece a la clase *A*.

	Alumnos	Alumnas	
A	30	24	54
B	40	60	100
C	30	48	78
	100	132	232

a) $P\,(\textit{pertenezca a la clase A}) = \dfrac{54}{232} \approx 0{,}23$

b) $P\,(\textit{sea alumna}) = \dfrac{132}{232} \approx 0{,}57$

c) $P\,(\textit{sea alumna / pertenezca a la clase B}) = \dfrac{60}{232} \approx 0{,}26$

d) $P\,(\textit{pertenezca a la clase C / sea alumna}) = \dfrac{48}{132} \approx 0{,}36$

e) $P\,(\textit{sea alumno / pertenezca a la clase A}) = \dfrac{30}{54} \approx 0{,}\widehat{5}$

20

Calcula la probabilidad de obtener tres CUATROS al lanzar tres dados.

$$P = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \left(\frac{1}{6}\right)^3 = \frac{1}{216} \approx 0{,}0046$$

Calcula la probabilidad de no obtener NINGÚN SEIS al lanzar cuatro dados. (¿Cuál es la probabilidad de NO SEIS? Repite cuatro veces).

$$P = \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} = \left(\frac{5}{6}\right)^4 = 0{,}48$$

21

Una clase se compone de veinte alumnos y diez alumnas. La mitad de las alumnas y la mitad de los alumnos aprueban las matemáticas. Calcula la probabilidad de que, al elegir una persona al azar, resulte ser:

a) Alumna o que aprueba las matemáticas.

b) Alumno que suspenda las matemáticas.

c) Sabiendo que es alumno, ¿cuál es la probabilidad de que apruebe las matemáticas?

d) ¿Son independientes los sucesos ALUMNO y APRUEBA MATEMÁTICAS?

☛ ***Haz una tabla de contingencia.***

Hacemos la tabla de contingencia:

	ALUMNOS	ALUMNAS	
APRUEBAN MAT.	10	5	15
SUSPENDEN MAT.	10	5	15
	20	10	30

a) $P[\text{alumna} \cup \text{aprueba mat.}] = P[\text{alumna}] + P[\text{aprueba mat.}] -$

$- P[\text{alumna} \cap \text{aprueba mat.}] = \frac{10}{30} + \frac{15}{30} - \frac{5}{30} = \frac{20}{30} = \frac{2}{3}$

b) $P[\text{alumno} \cap \text{suspende mat.}] = \frac{10}{30} = \frac{1}{3}$

c) $P[\text{aprueba mat./alumno}] = \frac{10}{20} = \frac{1}{2}$

d) Hay que ver si:

$$P[\text{alumno} \cap \text{aprueba mat.}] = P[\text{alumno}] \cdot P[\text{aprueba mat.}]$$

Calculamos cada una:

$P[\text{alumno} \cap \text{aprueba mat.}] = \frac{10}{30} = \frac{1}{3}$

$P[\text{alumno}] = \frac{20}{30} = \frac{2}{3}$

$P[\text{aprueba mat.}] = \frac{15}{30} = \frac{1}{2}$

Por tanto, sí son independientes.

22.

Tenemos un dado de 20 caras {1,2,2,3,3,3,4,4,4,4,5,5,5,5,5,6,6,6,6,6} perfectamente equilibrado

a) ¿Cuál es la probabilidad de obtener cada uno de los resultados posibles?

P(1)=1/20=0,05 P(2)=2/20=0,1 P(3)=3/20=0,15

P(4)=4/20=0,2 P(5)=5/20=0,25 P(6)=5/20=0,25

b) P(par)= 11/20 = 0,55 Hay dos 2 y cuatro 4, y cinco 6, 11 pares

c) P(mayor de 3)= 14/20 = 0,70 14 posibles entre 20

d) P(par y mayor de 3)=9/20=0,45 El 4 y el 6 son pares y mayores de 3

e) P(par o mayor de 3)=19/20=0,95 Si sale 2, 4, 5 ó 6

23.

En una bolsa tenemos 7 bolas rojas, 9 bolas azules y 4 verdes. Extraemos una bola, calcula la probabilidad de que

a) No sea roja P(R)=13/20=0,65 Hay 20 bolas, 7 rojas, 13 no rojas

b) Sea roja o azul P(RUA)=16/20=0,8 7+9=16 rojas ó azules

24.

En una urna hay 40 bolas rojas y azules, no sabemos cuántas de cada color,. Para averiguarlo extraemos una bola, miramos el color y la devolvemos a la urna antes de sacar otra. Repetimos el experimento 1000 veces y obtenemos 807 bolas rojas y 193 bolas azules. ¿Cuántas bolas de cada color estimas que hay en la urna?.

P(roja)=0,81 P(azul)=0,19 0,81·40 ≈ 32 rojas 0,19·40 ≈ 8 azules

25

En un grupo, el 40% juega baloncesto y el 60% fútbol, sabiendo que el 85% practica alguno de los dos deportes, ¿qué porcentaje juega a los dos?.

$P(F)=0,60$ $P(B)=0,40$ $P(F \cup B)=0,85$, $P(F \cup B)= P(F)+P(B) - P(F \cap B)$, $0,85=0,60+0,40-P(F \cap B)$ $P(F \cap B)=0,15$ 15%

26.

En una clase el 68% aprueba Lengua y el 66% Matemáticas, si el 43% ha aprobado las dos asignaturas, ¿qué porcentaje no aprueba ninguna de las dos?.

Aprueba al menos una de las dos: $P(L \cup M)= P(L)+P(M) - P(L \cap M) = 0,68+0,61-0,43 = 0,86$

Suspender las dos es el suceso contrario a éste, luego su probabilidad es $1 – 0,86 = 0,14$

El 14% ha suspendido las dos asignaturas.

27.-

En una bolsa tenemos 5 bolas numeradas del 1 al 5. Extraemos dos bolas, a) ¿Cuál es la probabilidad de obtener un 2 y un 3 si no devolvemos las bolas sacadas?. b) ¿Y cuál si las devolvemos?

Sin devolución $P = 1/5 \cdot 1/4 = 0.05$ Con devolución $P = 1/5 \cdot 1/5 = 1/25 = 0.04$

28.

En una caja hay 6 bolas blancas y 4 bolas negras, ¿qué probabilidad hay de que al extraer dos bolas sean las dos blancas?. Hazlo sin devolución y con devolución.

a) Sin devolución: $P(BB) = 6/10 \cdot 5/9 = 30/90 = 1/3$, b) Con devolución: $P(BB) = 6/10 \cdot 6/10 = 36/100 =18/50$