MATEMÁTICAS
CCFF
GRADO SUPERIOR

1

Aritmética y Álgebra

Tema 1
Los conjuntos númericos

1. Operaciones en el conjunto de los números reales (R)

1.1. La suma y sus propiedades

Asociativa: (a+b) + c = a + (b+c)

Elemento neutro: es el número 0, ya que a + 0 = 0 + a = a

Elemento simétrico: Dado a, su elemento simétrico, llamado opuesto, es -a, ya que se cumple a + (-a) = (-a) + a = 0

Conmutativa: a+b = b+a

1.2. El producto (o multiplicación) y sus propiedades

Asociativa: (a*b)*c = a*(b*c)

Elemento neutro: es el número 1, ya que 1*a = a*1= a

Elemento simétrico: Dado a ≠ 0, su elemento simétrico, llamado inverso, es a-1 = 1/a, ya que a* (1/a)=1.

Conmutativa: a*b = b*a

Distributiva respecto de la suma: a*(b+c) = a*b + a*c

Relacionado con la multiplicación y la división de número reales se encuentra la **regla de los signos**. Simbólicamente estas reglas se pueden expresar de la siguiente forma:

- (+)*(+) = (+) (+):(+) = (+)
- (-)*(-) = (+) (-):(-) = (+)
- (+)*(-) = (-) (+):(-) = (-)
- (-)*(+) = (-) (-):(+) = (-)

EJERCICIOS RESUELTOS

1. 3-5 = -2
2. 3+2-7 = -2
3. 12-25+1 = -12
4. 12 + 4 - 20 = -4
5. 2 - 3 - (- 4) = -1 + 4 = 3
6. -12 - 4 - 20 = -36
7. 5·(-12 + 4) = 5· (-8) = -40
8. 12+(-4) -2 = 12 - 4 = 8
9. 2-3 + (-4) = -1 - 1 = -2

- 4-2- (-3) – (–1) = 2 + 3 + 1= 6
- 4·(-3) = -12
- -4·(–3) = 12
- -4 (–3) (-3) = -36
- -(-3) (-3) = -9
- -2·3·(-3) = 18
- 4·(4-2) = 4 · 2 = 8
- 3· (-12-2) = 3· (-14) = -42
- -4·(–2-3) - 1 = -4·(-5) - 1 = 20-1 =19
- -2· (–2) - 2· (-2) = 4 + 4 = 8
- –1· (–2)+(–2)·(–3)·(–1) = 2 - 6 = -4
- 3 - 2·5 = 3 - 10 = -7
- 4 - 2·(-5) = 4 + 10
- 2·(-3) - 1 = -6-1 = -7
- -3(-2)(-1) - 6 = -6 - 6 = -12
- -10 - (-2)(-1)(-3) = -10 - (-6) = -10 + 6 = -4
- 10·[3-2·(5-4) -2·(4-2)] =

= 10(3 - 2 - 2·2) = 10(1 – 4) = 10·(–3) = -30

- -3·(-4 +(-2)) = -3·(-4-2) = -3·(–6) = 18
- 6(4+5) -4(5-3) = 6·9 -4·2 = 54-8 = 46
- 3·(4-1-6) -4·(2-3+6) = 3·(-3) -4·5 = -9+20 = 11
- -4·[-3-2·(-5+4) -2·(-4+2)] =

= -4·[-3+2 -2·(-2)] = -4·(-1+2) = -4

1. 6·(4 + 5) - 2·(5 - 3) = 36-4 = 32
2. - 2· (3 - 6) - 5· (6 - 10) = -6+20 = 14
3. 2(- 4 + 1) + 7·(2 - 3) = -6-7 = -13
4. -10(- 1- 5) - (-5 - 3) = 50+8 = 58
5. -6· (12 - 5) - 3· (5 - 3) = -42-6 = -48
6. 7·(6 -(-5)) – 4(5 – 3) = 7·11 -4·2 = 77-8 = 69
7. 2 - 3 - (- 4) = 2-3+4 = 3
8. -5·(-12 + (-4)) = -5·(-16) = -80
9. 6·(4 + 5) - 4·(5 - 3) = 60-8 = 52
10. 10·[3-2·(5-4) -2·(4-2)] = 10·(3-2-4) = 10·(-3) = -30
11. 4·[(3+2) - 5] = 40 = 0

2. VALOR ABSOLUTO

El valor absoluto de un número real es su valor después de quitarle su eventual signo negativo. Si el número es positivo, su valor absoluto es él mismo; mientras que si es negativo, el valor absoluto es el número opuesto. Se nota $|x|$ el valor absoluto de x. Por ejemplo: $|-4{,}5| = 4{,}5$ (se quita su signo negativo) y $|3{,}14|=3{,}14$ (no se modifica).

3. DESCOMPOSICIÓN DE UN NÚMERO EN FACTORES PRIMOS

Llamaremos número primo a aquel número que es divisible por sí mismo y por la unidad. Todo número natural puede escribirse como producto de factores primos, diremos entonces que se ha factorizado. Ejemplo: “Factorizar 180”

180	DIVISO-
90	RES
45	2
15	2
5	3
1	3
	5

Luego : $180 = 2*2*3*2*5 = 2^3*3*5$.

Las **reglas de divisibilidad** son criterios que sirven para saber si un número es divisible por otro sin necesidad de realizar la división.

Divisible significa que al dividirlo por ese número el resultado es una división exacta con resto cero. Por ejemplo, 30 es divisible por 5 porque al dividirlo por 5 el resto es cero 30:5=6.

Las reglas:

Un número es divisible por 2, 3 ó 5 si: **2**

si termina en 0 o en cifra par Ejemplos 50; 192; 24456;

si la suma de sus cifras es múltiplo de tres **3** Ejemplos: 333 (dado que 3+3+3 =9); 9 es un múltiplo de 3; (3x3=9)

5 si termina en 0 o en 5 Ejemplos 35; 70; 1115;

Estas reglas son importantes dado que te facilitan el cálculo de las descomposición de factores que a su vez sirven para reducir y simplificar fracciones.

4. MÁXIMO COMÚN DIVISOR (M. C. D.)

El **MÁXIMO COMÚN DIVISOR** de dos o más números es el número, más grande posible, que permite dividir a esos números.

- Para calcularlo. De los números que vayas a sacar el máximo común divisor, se ponen uno debajo del otro, se sacan todos los divisores de los dos números y el máximo que se repita es el máximo común divisor (M.-C.D.)
- Ejemplo: Sacar el M.C.D. de 20 y 10:

20: 1, 2, 4, 5, **10** y 20

10: 1, 2, 5 y **10** Esto sirve para números pequeños. Pero para números grandes hay otra manera: la **descomposición de factores**.

Forma rápida de calcular el Máximo común Divisor (M.C.D.).

Ejemplo: Sacar el M. C. D. de 40 y 60:

1º Tienes que saber las **reglas divisibilidad**. Haces la **descomposición de factores** poniendo **números primos**. Por ejemplo para 40, en la tabla de abajo, se va descomponiendo en 2, 2, 2 y 5.

40	2	60	2
20	2	30	2
10	2	15	3
5	5	5	5
	1		1

Así, $40=2*2*2*5=2^3*5$, y $60=2*2*3*5=2^2*3*5$.

2º De los resultados, se cogen los números repetidos de menor exponente y se multiplican y ese es el M.C.D. En el ejemplo: **M.C.D** = 2^2*5=4*5=**20.**

5. MÍNIMO COMÚN MÚLTIPLO (m.c.m.)

Antes de nada, veamos el significado de la palabra "múltiplo".

Múltiplos: los múltiplos de un número se obtienen multiplicando dicho número por los números naturales 0, 1, 2, 3, 4, 5 .....

Ejemplo: múltiplos del 7: 7x0=**0**; 7x1=**7**; 7x2=**14**; 7x3=**21**; 7x4=**28**; 7x5=**35** **....** Por lo tanto, son múltiplos del 7: *0, 7, 14, 21, 28, 35, 42, 48, 56, 63, 70, 77, 84, 91, 98, 105, 112, 119, 126, 133, 140, 147, 154, 161, 168...*

Veamos ahora como se calcula entonces el mínimo común múltiplo. En primer lugar escribimos su definición. El mínimo común múltiplo (m. c. m.) de dos o más números es el menor múltiplo común distinto de cero.

Ejemplo: Averiguar el m.c.m. de 20 y 10:

20: **20**, 40, 60, 80...

10: 10, **20**, 30...

20 es el múltiplo menor que es común a ambos números. En consecuencia, m.-c.m.=20.

Ejemplo: Calcular el m. c. m. de 4, 5 y 6.

Se hace la descomposición de factores (que ya la explicamos en el apartado dedicado al máximo común divisor). Lo hacemos de la siguiente forma:

4= $2*2=2^2$
5= 5 6= 2*3

Se toman los factores comunes y no comunes con el mayor exponente y se multiplican: $2^2 * 3 * 5 = 60$. El m.c.m de 4,5 y 6 es 60.

Uno de los usos del m.c.m. es el cálculo de sumas y restas con quebrados (=fracciones). A continuación, dedicaremos un apartado a trabajar con fracciones.

6. Operaciones con fracciones

6.1. Sumar fracciones

Se calcula el m.c.m de los denominadores. Entonces se pone como denominador ese número. A continuación, el numerador de la primera fracción se multiplica por la siguiente operación: (m.c.m./denominador de la primera fracción). Después se realiza la misma operación pero con respecto a numerador y denominador de la segunda fracción. Finalmente, se suman estos números. Ejemplo:

$$\frac{5}{3}+\frac{1}{2}=\frac{5x(6/3)+x(6/2)}{6}=\frac{5x2+1x3}{6}=\frac{10+3}{6}=\frac{13}{6}$$

6.2.Restar fracciones

Lo mismo que la suma de fracciones, pero al final en vez de sumar, se restan. Ejemplo:

$$\frac{5}{3}-\frac{1}{2}=\frac{10-3}{6}=\frac{7}{6}$$

6.3. Multiplicar fracciones

Es muy fácil; se multiplican los numeradores para calcular el nuevo numerador y se multiplican los denominadores para calcular el nuevo denominador. Ejemplo:

$$\frac{5}{3}*\frac{1}{2}=\frac{5}{6}$$

6.4. Dividir fracciones

También muy fáciles de hacer. Debemos usar la vieja regla: "se multiplican en cruz". Es decir, el numerador se calcula multiplicando el primer numerador por el segundo denominador. El denominador se calcula multiplicando el primer denominador por el segundo numerador. Ejemplo:

$$\frac{5}{3} x \frac{1}{2} = \frac{5x2}{3x1} = \frac{10}{3}$$

Ejercicios resueltos

1) $1+\frac{1}{2}=\frac{1\cdot 2}{2}+\frac{1\cdot 1}{2}=\frac{2+1}{2}=\frac{3}{2}$

2) $\frac{3}{5}-6=\frac{3\cdot 1}{5}-\frac{5\cdot 6}{5}=\frac{3-30}{5}=-\frac{27}{5}$

3) $\frac{4}{6}-7=\frac{4\cdot 1}{6}-\frac{7\cdot 6}{6}=\frac{4-42}{6}=\frac{4\cdot 1-7\cdot 6}{6}=-\frac{38}{6}=-\frac{19}{3}$

4) $\frac{1}{4}-\frac{3}{14}=\frac{1\cdot 7}{28}-\frac{3\cdot 2}{28}=\frac{7-6}{28}=\frac{1}{28}$

5) $\frac{1}{2}+\frac{2}{3}-\frac{1}{6}=\frac{1\cdot 3}{6}+\frac{2\cdot 2}{6}-\frac{1\cdot 1}{6}=\frac{3+4-1}{6}=\frac{6}{6}=1$

6) $\frac{1}{2}-3+\frac{5}{3}=\frac{1\cdot 3}{6}-\frac{3\cdot 6}{6}+\frac{5\cdot 2}{6}=\frac{3-18+10}{6}=-\frac{5}{6}$

7) $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}=\frac{1\cdot 6}{6}+\frac{1\cdot 3}{6}+\frac{1\cdot 1}{6}=\frac{6+3+1}{6}=\frac{10}{6}=\frac{5}{3}$

8) $\frac{60}{20}+\frac{1}{10}-\frac{2}{30}=3+\frac{1}{10}-\frac{1}{15}=\frac{3\cdot 30}{30}+\frac{1\cdot 3}{30}-\frac{1\cdot 2}{30}=\frac{90}{30}+\frac{3}{30}-\frac{2}{30}=\frac{90+3-2}{30}=\frac{91}{30}$

9) $\frac{3}{20}+\frac{1}{25}-\frac{11}{60}=\frac{3\cdot 15}{300}+\frac{1\cdot 12}{300}-\frac{11\cdot 5}{300}=\frac{45+12-55}{300}=\frac{2}{300}=\frac{1}{150}$

10) $\frac{14}{15}-\frac{1}{45}+3-\frac{2}{75}=\frac{14}{15}-\frac{1}{45}+3-\frac{2}{75}=\frac{14\cdot 15-5+3\cdot 225-2\cdot 3}{225}=$

$$=\frac{210-5+675-6}{225}==\frac{874}{225}$$

36) $1+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{2}}=1+\dfrac{1}{\dfrac{3}{2}}=1+\dfrac{2}{3}=\dfrac{5}{3}$

37) $1+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{2}:\dfrac{2}{3}}=1+\dfrac{1}{\dfrac{7}{4}}=1+\dfrac{4}{7}=\dfrac{11}{7}$

38) $\dfrac{3-\left[-\dfrac{1}{2}-5\cdot\left(1-\dfrac{1}{2}\right)\right]}{-4+\dfrac{1}{2}}=\dfrac{3-\left[-\dfrac{1}{2}-\dfrac{5}{2}\right]}{-\dfrac{7}{2}}=\dfrac{3-\left[-\dfrac{6}{2}\right]}{-\dfrac{7}{2}}=\dfrac{3+3}{-\dfrac{7}{2}}=\dfrac{6}{-\dfrac{7}{2}}=-\dfrac{12}{7}$

39) $1-\dfrac{\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}}{1-\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{2}{3}}=1-\dfrac{\dfrac{1}{6}}{\dfrac{2}{3}}=1-\dfrac{1}{4}=\dfrac{3}{4}$

46) $\dfrac{\dfrac{(-4)}{2}:\left\{\dfrac{3}{9}\cdot\left[\dfrac{32}{4}-\dfrac{16}{2}:\left(\dfrac{1}{3}-1-\dfrac{3}{2}\right)\right]-1:\dfrac{1}{2}\right\}}{\left(1-\dfrac{1}{2}\right):\dfrac{3}{2}+(-2):\dfrac{1}{2}}=\dfrac{-2:\left\{\dfrac{1}{3}\cdot\left[8-8:\dfrac{13}{6}\right]-2\right\}}{\dfrac{1}{2}:\dfrac{3}{2}-4}=$

$=\dfrac{-2:\left\{\dfrac{1}{3}\cdot\left[8-\dfrac{64}{13}\right]-2\right\}}{\dfrac{1}{3}-4}=\dfrac{-2:\left\{\dfrac{13}{3}-2\right\}}{-\dfrac{11}{3}}=\dfrac{2:\dfrac{7}{3}}{\dfrac{11}{3}}=\dfrac{\dfrac{6}{7}}{\dfrac{11}{3}}=\dfrac{18}{77}$

7. SACAR FACTOR COMÚN

Sacar factor común consiste en extraer el monomio que se repite en todos los términos. Ejemplos:

$15X^3 + 3X^2 - 12X = 3X(5X^2 + X - 4)$
$4x^3 - 12x^2 + 6x = 2x\ (\underline{4x^3} - \underline{12x^2} + \underline{6x})$ 2x
2x 2x

En otras palabras, se busca el máximo factor común y dividimos cada término del polinomio por el máximo factor común. En el caso anterior, el resultado es el siguiente: $4x^3 - 12x^2 + 6x = 2x\ (2x^2 - 6x + 3)$

Otro ejemplo. Simplificar la expresión $6x^5 - 8x^4 - 10x^3$

El máximo factor común entre los coeficientes numéricos es 2. La variable x se repite en todos los términos y al exponente menor que aparece es 3. Por lo tanto el máximo factor común es:

$$6x^5 - 8x^4 - 10x^3 = 2x^3\left(\frac{6x^5}{2x^3} - \frac{8x^4}{2x^3} - \frac{10x^3}{2x^3}\right)$$

$$= 2x^3\ (3x^2 - 4x - 5)$$

El paso de división es opcional y lo podemos hacer mentalmente.

Otro ejemplo. Simplificar la expresión $3x^2 - 9x$. El máximo factor

común es 3x y dividiendo por este obtenemos:

$$3x^2 - 9x = 3x (x - 3)$$

8. Productos notables

Existen algunos productos, que por su continuo uso en álgebra y en cálculo, conviene **MEMORIZAR**. Estos productos son:

8.1. Binomio al cuadrado.

$(a + b)^2 = (a + b)(a + b) = a^2 + ab + ab + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$(a - b)^2 = (a - b)(a - b) = a^2 - a\ \ -ba\ \ +bb^2 = a^2 - 2a\ \ +bb^2$ En

resumen:

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a - b)^2 = a^2 - 2a\ \ +bb$$

8.2. Suma por diferencia de dos cantidades.

$(a + b)(a - b) = a^2 - ab + ab - b^{2\,2}$
$= a^2 - b$

En resumen

$$\boxed{(a + b)(a - b) = a^2 - b^2}$$

9**. PROPIEDADES DE LAS POTENCIAS Y LOS RADICALES**

Aquí se muestran algunas de las propiedades más interesantes.

a) $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$

b) $a^m : a^n = \dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$

c) $\left(a^m\right)^n = a^{m \cdot n}$

d) $a^p \cdot b^p = (a \cdot b)^p$

e) $\left(a^p \cdot b^q\right)^m = a^{p \cdot m} \cdot b^{q \cdot m}$

f) $a^0 = 1$

g) $a^1 = a$

h) $a^{-1} = \dfrac{1}{a}$

i) $a^{-b} = \dfrac{1}{a^b}$

j) $\left(\dfrac{a}{b}\right)^{-1} = \dfrac{1}{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{b}{a}$

k) $\left(\dfrac{a}{b}\right)^{-n} = \dfrac{1}{\left(\dfrac{a}{b}\right)^n} = \left(\dfrac{b}{a}\right)^n$

l) $\sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}}$

m) $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$

n) $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a^p}} = \left(\left(a^p\right)^{\frac{1}{m}}\right)^{\frac{1}{n}} = a^{\frac{p}{mn}}$

o) $\sqrt[n]{a^m} \cdot \sqrt[p]{a^q} = a^{\frac{m}{n}} \cdot a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[nq]{a^{mq+np}} = \sqrt[nq]{a^{mq} \cdot a^{np}}$

EJERCICIOS RESUELTOS

a) $2^4 \cdot 2^2 = 2^{4+2} = 2^6$

b) $3 \cdot 3^2 \cdot 3^6 = 3^{1+2+6} = 3^9$

c) $2^4 \cdot 2^{-2} = 2^{4+(-2)} = 2^{4-2} = 2^2$

d) $2^{-4} \cdot 2^{-2} = 2^{-4+(-2)} = 2^{-4-2} = 2^{-6} = \dfrac{1}{2^6}$

e) $2^{-1} \cdot 2^3 \cdot 2^{-2} = 2^{-1+3+(-2)} = 2^{-1+3-2} = 2^0 = 1$

a) $5^3 : 5^2 = 5^{3-2} = 5^1 = 5$

b) $11^3 : 11^{-3} = 11^{3-(-3)} = 11^{3+3} = 11^6$

c) $\dfrac{2^2}{2^{-3}} = 2^{2-3} = 2^{-1} = \dfrac{1}{2}$

d) $7^{-8} : 7^3 = 7^{-8+3} = 7^{-5} = \dfrac{1}{7^5}$

e) $\dfrac{2^2 : 2^{-3}}{2^{-3}} = \dfrac{2^{2-(-3)}}{2^{-3}} = \dfrac{2^{2+3}}{2^{-3}} = \dfrac{2^5}{2^{-3}} = 2^{5-(-3)} = 2^{5+3} = 2^8$

f) $\left(3^5 : 3^{-2}\right) : 3^{-4} = 3^{5-(-2)} : 3^{-4} = 3^{5+2} : 3^{-4} = 3^7 : 3^{-4} = 3^{7-(-4)} = 3^{7+4} = 3^{11}$

a) $\left(3^4\right)^2 = 3^{4 \cdot 2} = 3^8$

b) $\left(2^{-3}\right)^{-3} = 2^{-3 \cdot (-3)} = 2^9$

c) $\left[\left(3^{-3}\right)^{-2}\right]^{-2} = 3^{-3 \cdot (-2) \cdot (-2)} = 3^{6 \cdot (-2)} = 3^{-12}$

d) $\left(3^4\right)^0 = 3^{4 \cdot 0} = 3^0 = 1$

e) $\left\{\left[\left(3^3\right)^{-1}\right]^{-2}\right\}^{-2} = 3^{3 \cdot (-1) \cdot (-2) \cdot (-1)} = 3^{3 \cdot (-1) \cdot (-2) \cdot (-1)} = 3^{-6} = \dfrac{1}{3^6}$

a) $\dfrac{\left(5^2\right)^3}{\left(5^3\right)^7} = \dfrac{5^{2\cdot 3}}{5^{3\cdot 7}} = \dfrac{5^6}{5^{21}} = 5^{6-21} = 5^{-15} = \dfrac{1}{5^{15}}$

b) $\left(3^2\right)^3 : \left(3^3\right)^3 = 5^{2\cdot 3} : 5^{3\cdot 3} = 3^6 : 3^9 = 3^{6-9} = 3^{-3} = \dfrac{1}{3^3}$

c) $\dfrac{\left(3^2\right)^5 \cdot 3^3}{\left(3^3\right)^2} = \dfrac{3^{2\cdot 5} \cdot 3^3}{3^{3\cdot 2}} = \dfrac{3^{10} \cdot 3^3}{3^6} = \dfrac{3^{10+3}}{3^6} = \dfrac{3^{13}}{3^6} = 3^{13-6} = 3^7$

d) $\dfrac{\left(5^{-2} \cdot 5^{-3}\right)^{-1} : 5^2}{5^3 : \left(\left(5^2\right)^2\right)^{-1}} = \dfrac{\left(5^{-2+(-3)}\right)^{-1} : 5^2}{5^3 : 5^{2\cdot 2\cdot(-1)}} = \dfrac{\left(5^{-2-3}\right)^{-1} : 5^2}{5^3 : 5^{-4}} = \dfrac{5^{(-5)(-1)} : 5^2}{5^{3-(-4)}} = \dfrac{5^5 : 5^2}{5^{3+4}} = \dfrac{5^{5-2}}{5^7} = \dfrac{5^3}{5^7}$

$= 5^{-4} = \dfrac{1}{5^4}$

e) $\dfrac{\left(2^{-2}\right)^{-3} : \left(2^{-3}\right)^2}{\left(2^{-3}\right)^{-1} \cdot \left(2^{-1}\right)^{-2}} = \dfrac{2^{-2\cdot(-3)} : 2^{-3\cdot 2}}{2^{-3\cdot(-1)} \cdot 2^{-1\cdot(-2)}} = \dfrac{2^6 : 2^{-6}}{2^3 \cdot 2^2} = \dfrac{2^{6-(-6)}}{2^{3+2}} = \dfrac{2^{6+6}}{2^5} = \dfrac{2^{12}}{2^5} = 2^{12-5} = 2^7$

2

Polinomios

Tema 2
Polinomios

Los **polinomios** de una variable son expresiones algebraicas en las que aparecen unos números determinados, llamados **coeficientes**, relacionados con una variable mediante las operaciones elementales de suma, diferencia y multiplicación. Es decir, un polinomio, **P**, con coeficientes reales es una expresión de la forma

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

donde $a_{0'}, a_1, \ldots, a_n \in \Re$.

Algunos de los coeficientes $a_0, a_1, \ldots, a_n$ pueden ser igual a cero. Si suponemos que $a_n \neq 0$ diremos que n es el grado del polinomio. Es decir, se llama **grado** de un polinomio al exponente de la potencia máxima con coeficiente distinto de cero. Escribiremos grad(P)=n, si $a_n \neq 0$, además, dicho coeficiente a_n recibe el nombre de **coeficiente principal** de **P**.

Los polinomios se suelen representar por letras tales como **P, Q, S** o bien si se especifica la variable por **P(x), Q(x), S(x).**

Ejemplo 1.

a) *Los números reales se pueden considerar como polinomios de grado cero. Es decir, P(x)=6, representa al polinomio P(x)=3x*^{0}

b) *Los polinomios de grado uno son de la forma P(x)=* a_1x+a_0 *con* $a_1 \neq 0$*, y también reciben el nombre de polinomios lineales. Un caso particular p(x)=5x-1.*

c) *Los polinomios de segundo grado son de la forma* $P(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$ *reciben el nombre de polinomio cuadrático. Por ejemplo p(x)=3x*^{2}*+x+7.*

Operaciones con polinomios

Suma y diferencia de polinomios. Dados dos polinomios P(x) y Q(x), escritos de la siguiente forma

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

$$Q(x) = b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \ldots + b_1 x + b_0$$

donde si grad(Q)=m<n=grad(P), entonces $b_n = b_{n-1} = \ldots = b_{m+1} = 0.$

Definimos la suma de dichos polinomios Py Q como el polinomio

$$S(x) = (P+Q)(x) = (a_n + b_n)x^n + (a_{n-1} + b_{n-1})x^{n-1} + \ldots + (a_0 + b_0)$$

Análogamente se define la diferencia como el polinomio

$$D(x) = (P-Q)(x) = (a_n - b_n)x^n + (a_{n-1} - b_{n-1})x^{n-1} + \ldots + (a_0 - b_0)$$

b) Producto de polinomios. El producto de P y Q es el polinomio $P \cdot Q$ cuyos coeficientes vienen dadas por

$$c_k = a_0 b_k + a_1 b_{k-1} + \ldots + a_k b_0, \qquad 0 \le k \le grad(P) + grad(Q)$$

Ejemplo 2.

$$\begin{array}{rrrrr}
 & 2x^3 & -3x^2 & & +1 \\
 & & & 2x & -3 \\
\hline
 & -6x^3 & +9x^2 & & -3 \\
4x^4 & -6x^3 & & +2x & \\
\hline
4x^4 & -12x^3 & +9x^2 & +2x & -3
\end{array}$$

1. **División Euclídea de polinomios.** De manera similar a la división de números enteros tenemos el siguiente resultado para polinomios: dados dos polinomios P y S, con $S \neq 0$, existen dos polinomios Q y R, tales que

$$P = SQ + R, \qquad grad(R) < grad(S).$$

Llamaremos al polinomio Q cociente de la división de P por S y diremos que R es el resto de dicha división. Además, los polinomios Q y R son únicos

Ejemplo 3.

$$\begin{array}{rrrr|l}
 & 4x^3 & -3x^2 & \qquad +3 & x^2 - x + 1 \\
\cline{5-5}
 & -4x^3 & +4x^2 & -4x \qquad & 4x+1 \\
\cline{1-4}
\backslash & & x^2 & -4x+3 & \\
 & & -x^2 & +x \;-1 & \\
\cline{1-4}
 & & \backslash & -3x+2 &
\end{array}$$

2. **Regla de Ruffini.**

En el apartado anterior hemos visto la división de polinomios, en general, pero uno de los casos más importantes de la división de polinomios es el que tiene por divisor un binomio del tipo x - a, siendo "a" un número entero; por ejemplo (x - 1), (x + 2), etc. Además de realizarse la división por el método general expuesto en el apartado anterior, se puede realizar usando la regla de Ruffini en la que se procede de la siguiente forma: en primer lugar se deben colocar todos los coeficientes del dividendo ordenados de mayor a menor grado y si falta el de algún grado intermedio colocar un 0. A continuación:

- Se "baja" el primer coeficiente del dividendo.

- Se multiplica "a" por el coeficiente bajado y se coloca el resultado debajo del segundo coeficiente (el signo de a será positivo si el divisor es del tipo (x-a) y negativo si el divisor es del tipo (x+a).

- Se suma el segundo coeficiente con el resultado anterior.

- Se continúa el proceso hasta terminar con los coeficientes.

Los números de la fila inferior obtenida son los coeficientes del cociente (de un grado menor al dividendo) excepto el último número que es el valor del resto.

Ejemplo 4. $(2x^2 + 3x^3 + -2x + x^4 + 4) : (x - 2)$

Primero se ordena el dividiendo $(x^4 + 3x^3 + 2x^2 - 2x + 4)$. *A continuación, se escriben sólo los coeficientes con sus signos. El término independiente del divisor (x-2) se pone a la izquierda con el signo cambiado y se procede.*

	1	3	2	-2	4
2		2	10	24	44
	1	5	12	22	48

Es decir, el cociente es $x^3 + 5x^2 + 12x + 22$ *y el resto 48.*

12. **Resolución de ecuaciones polinómicas.** En este apartado vamos a tratar la resolución de ecuaciones polinómicas de grado menor ó igual a tres. Para ello, en primer lugar vamos a ver el siguiente teorema:

Teorema del resto:

" El resto de la división de un polinomio P(x) entre un binomio de la forma (x - a), es igual al valor numérico del polinomio cuando x toma el valor "a" que podemos expresar como P(a) "

Ejercicio 1- Calcula el valor numérico del polinomio $x^3 + 6x^2 - 3x - 4$ en los casos: x = 0 ; x = -2 ; x = 1. Realiza la división del polinomio por el binomio del tipo (x - a) adecuado, comprobando que el resto de la división coincide con el valor numérico calculado antes.

1. Factorización de polinomios

Una aplicación muy importante de la división de polinomios es la factorización de polinomios, y en concreto conseguir factores del tipo (x-a).

Ejemplo 5. *Si se realiza el producto (x-2)·(x+3) se obtiene el polinomio $x^2 + x - 6$, por lo que puede expresarse dicho polinomio como producto de factores: $x^2 + x - 6 = (x-2) \cdot (x+3)$*

Conseguir, cuando sea posible, expresar un polinomio como producto de binomios de primer grado, en principio del tipo del ejemplo, o al menos algún binomio de ese tipo, es lo que se denomina "factorizar el polinomio".

Para conseguir factores del tipo mencionado (x - a), bastará encontrar valores de "a" para los que la división, que se efectúa por la regla de Ruffini, sea exacta, o sea que el resto sea 0 y aplicar que:

"***Dividendo = divisor · cociente + resto***" o D = d · c + r, con lo que quedaría D = d · c que en términos de polinomios con la variable x, se puede expresar: D(x) = d(x) · c(x) obteniéndose ya el polinomio dividendo descompuesto en dos factores.

Habrás podido observar que en todos los casos en los que el valor numérico ha sido 0, la división del polinomio por "x - a" es exacta (teorema del resto).

Si has probado bien, habrás encontrado que el valor numérico era 0 para x = 1 (a = 1) y para x = -2 . ¿cuál es el cociente para a = 1?

Ejercicio 2- *Dado el polinomio $2x^3 + x^2 - 5x + 2$, encontrar valores de "a" para los que el valor numérico del polinomio sea 0.*

Habrás podido observar que en todos los casos en los que el valor numérico ha sido 0, la división del polinomio por "x - a" es exacta (teorema del resto).

Si has probado bien, habrás encontrado que el valor numérico era 0 para x = 1 (a = 1) y para x = -2 . ¿cuál es el cociente para a = 1?.

Nota**: **Una regla muy útil: Los valores de "x = a" enteros, para los que el valor numérico de un polinomio es cero, son siempre divisores del término independiente del polinomio.

Con esta regla es más fácil buscar los valores de "a". Así en el ejercicio anterior sólo pueden ser 1, -1, 2 y -2.

Ejemplo 6. *El polinomio siguiente se factoriza:*

$2x^3 + x^2 - 5x + 2 = (x - 1)(x + 2)(2x - 1)$

Por tanto, el valor numérico de dicho polinomio para x = 1 y x = -2 es 0, es decir, si escribimos la ecuación:

$2x^3 + x^2 - 5x + 2 = 0$, sabemos que dos soluciones de la misma son x = 1 y x = -2.

Estos valores de x se llaman "raices del polinomio", que son por tanto soluciones de la ecuación P(x) = 0.

De la ecuación: $2x^3 + x^2 - 5x + 2 = (x - 1)(x + 2)(2x - 1) = 0$ se obtiene, además de las dos soluciones anteriores, la solución 2x - 1 = 0 ; x = 1/2 = 0.5.

1. RESUMEN

1. Operaciones con polinomios

1. Dados dos polinomios P(x) y Q(x), escritos de la siguiente forma

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 \text{ , } Q(x) = b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \ldots + b_1 x + b_0 \text{ .}$$

$$S(x)=(P+Q)(x)=(a_n+b_n)x^n+(a_{n-1}+b_{n-1})x^{n-1}+\ldots+(a_0+b_0)$$

$$D(x)=(P-Q)(x)=(a_n-b_n)x^n+(a_{n-1}-b_{n-1})x^{n-1}+\ldots+(a_0-b_0)$$

2. $P \cdot Q$ cuyos coeficientes vienen dadas por

$$c_k=a_0b_k+a_1b_{k-1}+\ldots+a_kb_0, \quad 0 \le k \le grad(P)+grad(Q)$$

3. Dados dos polinomios P y S, con $S \neq 0$, existen dos polinomios Q y R, tales que

$$P=SQ+R, \quad grad(R)<grad(S).$$

Llamaremos al polinomio Q cociente de la división de P por S y diremos que R es el resto de dicha división. Además, los polinomios Q y R son únicos

2. **Dado un polinomio P(x) las siguientes afirmaciones son equivalentes:**

- El valor numérico para x = a es 0 o sea P(a) = 0

- La división del polinomio P(x) entre el binomio (x - a) es exacta

- (x - a) es un factor del polinomio: P(x) = (x - a) C(x), siendo C (x) el cociente de P(x) : (x-a)

- La ecuación P(x) = 0 tiene una solución para x = a.

3. **Teorema del resto:** ***" El resto de la división de un polinomio P(x) entre un binomio de la forma (x - a), es igual al valor numérico del polinomio cuando x toma el valor "a" que podemos expresar como P(a) "***

4. ***: Los valores de "x = a" enteros, para los que el valor numérico de un polinomio es cero, son siempre divisores del término independiente del polinomio.***

7. ACTIVIDADES

a) Dados los polinomios $P(x)=x^2+x+1$, Q(x)=x2-1, $R(x)=2x^2+5x-1$ y $S(x)=x^3+x^2+1$. Calcular: S(x)+P(x), R(x)-S(x), P(x)Q(x), R(x)S(x).

b) Efectuar las siguientes divisiones entre polinomios:

1. $(x^3+x^2-1):(x-1)$

2. $(x^6+3x^4-x^3+6x^2-3x+2):(x^4+x^3+2x^2-x+1)$

3. $(3x^5+2x^4+7x^3+2x-3):(x^2)$

3) Determina el polinomio y el resto aplicando la regla de Ruffini de las divisiones:

$$a)\ \left(x^4 - 2x^2 + 3x^3 - 1\right) : (\mathrm{x} + 2) \qquad \mathrm{b)}\left(4x^3 - 2x + 1\right) : (\mathrm{x} - \frac{1}{2})$$

c) Factorizar los siguientes polinomios

- $x^3 + 2x^2 - x - 2$
- $x^3 + 2x^2 + x$
- $3x^5 + 2x^4 + 7x^3 + 2x - 3$
- $x^3 + x^2 - x - 1$
- $x^3 + 2x^2 + x$
- $x^3 - 2x^2 + 2x - 4$
- $2x^3 - 2x^2 + x - 1$
- $9x^2 - 25$
- $x^2 - 6x + 9$
- $9x^4 + 6x^2 + 1$

d) Calcular el valor de m para que el resto de la división del polinomio $x^3 + mx^2 - 2x + m$ entre x-1 sea 1.

<u>Más Ejercicios:</u>

(1) Dados los polinomios:

A: $x^3 + 5x^2 - 8x + 2$
B: $2x^3 - 7x^2 + 1$
C: $4x^4 + x^3 + x^2 - x + 1$

Calcular:

1. **A + B – 2C**
2. **A – B/5**
3. **A x B**
4. **C : A**
5. **C : B**

Solución:

a) Lo haremos por partes. Primero puede ser la suma de A + B

$(x^3 + 5x^2 – 8x + 2) + (2x^3 – 7x^2 + 1) = x^3 + 2x^3 + 5x^2 – 7x^2 – 8x + 2 + 1 =$

$= 3x^3 – 2x^2 – 8x +3$

Multiplico el polinomio C por 2

$2 \cdot (4x^4 + x^3 + x^2 – x + 1) = 8x^4 + 2x^3 + 2x^2 – 2x + 2$

Resto al resultado de A + B, el resultado de 2C

$A + B – 2C = 3x^3 – 2x^2 – 8x +3 – (8x^4 + 2x^3 + 2x^2 – 2x + 2)$

Me fijo que 2C tiene delante un signo menos que me va a cambiar los signos de dentro del paréntesis

$A + B – 2C = 3x^3 – 2x^2 – 8x +3 – 8x^4 - 2x^3 - 2x^2 + 2x - 2 =$

$= - 8x^4 + x^3 -4x^2 - 6 x + 1$

b) primero dividiremos B por 5

$(2x^3 – 7x^2 + 1) / 5 = (2/5) x^3 – (7/5) x^2 + 1/5$

se lo restaremos a A

$(x^3 + 5x^2 – 8x + 2) – ((2/5) x^3 – (7/5) x^2 + 1/5) = (1 –2/5)x^3 + (5+7/5)x^2 – 8x + (2–1/5)=$

$= 3/5 x^3 + 32/5 x^2 – 8x + 9/5$

c) A x B tenemos que multiplicar todos los términos

			$+ x^3$	$+ 5x^2$	$- 8x$	$+ 2$
			$+ 2x^3$	$- 7x^2$		$+ 1$
			$+ x^3$	$+ 5x^2$	$- 8x$	$+ 2$
	$- 7x^5$	$- 35 x^4$	$+ 56x^3$	$- 14 x^2$		
$+ 2x^6$	$+ 10x^5$	$- 16 x^4$	$+ 4x^3$			
$+ 2x^6$	$+ 3 x^5$	$- 51 x^4$	$+ 61 x^3$	$- 9 x^2$	$- 8x$	$+ 2$

1. C : A

Solución:

$4x^4$	$+ x^3$	$+ x^2$	$- x$	$+1$	x^3	$+5x^2$	$-8x$	$+2$
$-4x^4$	$-20 x^3$	$+32x^2$	$-8x$		$4x$	-19		
	$-19 x^3$	$+33x^2$	$-9x$	$+1$				

$+19x^3$	$+95x^2$	$-152x$	$+38$
	$+128x^2$	$-161x$	$+39$

el resultado dará de cociente $4x - 19$ y de resto $+128x^2 - 161x + 39$

e) C : B

$4x^4$	$+x^3$	$+x^2$	$-x$	$+1$	$+2x^3$	$-7x^2$	$+1$
$\cancel{-4x^4}$	$+14x^3$		$-2x$		$+2x$	$+(15/2)$	
	$+15x^3$	$+x^2$	$-3x$	$+1$			
	$\cancel{-15x^3}$	$105/2x^2$		$-(15/2)$			
		$107/2x^2$	$-3x$	$-13/2$			

el cociente será igual a $2x + (15/2)$ y el resto igual a $(107/2)x^2 - 3x - (13/2)$

(2) Hallar el valor de k para que la división entre ($2x^4 + x^3 + x + k$) y ($2x^2 + x - 2$) sea exacta.

Solución:
Realizamos la división

$\cancel{+2x^4}$	$\cancel{+x^3}$	$+0x^2$	$+x$	$+k$	$+2x^2$	$+x$	-2
$\cancel{-2x^4}$	$\cancel{-x^3}$	$+2x^2$			$+x^2$	$+1$	
		$\cancel{+2x^2}$	$\cancel{+x}$	$+k$			
		$\cancel{-2x^2}$	$\cancel{-x}$	$+2$			

Para que de exacta la suma de $k + 2$ tiene que ser igual a cero
$k + 2 = 0$ luego $k = -2$

(3) Hallar, utilizando la regla de Ruffini, el cociente y el resto en las divisiones siguientes:

10. **$(x^5 - 3x^4 - 2x + 7) : (x + 2)$**
11. **$(x^7 - x^4 + 1) : (x - 1)$**

Solución

Para hacer la división por Ruffini, colocamos los coeficientes, y cuando falte algún término ponemos un cero

1. **$(x^5 - 3x^4 - 2x + 7) : (x + 2)$**

	+ 1	- 3	0	0	-2	+ 7
- 2		- 2	+ 10	- 20	+ 40	- 76
	+ 1	- 5	+ 10	- 20	+ 38	- 69

La solución será colocar los coeficientes a las respectivas x pero con un grado menor y el último termino es el resto

$(x^5 - 3x^4 - 2x + 7) : (x + 2) = x^4 - 5x^3 + 10x^2 - 20x + 38$ y de resto -69

a) **$(x^7 - x^4 + 1) : (x - 1)$**

	+ 1	+ 0	+ 0	- 1	0	0	0	+1
+ 1		+ 1	+ 1	+ 1	0	0	0	0
	+ 1	+ 1	+ 1	0	0	0	0	+1

$(x^7 - x^4 + 1) : (x - 1) = x^6 + x^5 + x^4$ y de resto +1

(4) Obtener el valor de h para que la división entre $(x^3 + 2x^2 + hx)$ y $(x + 3)$ sea exacta.

Solución:

Al ser el divisor del tipo $(x \pm a)$ lo podemos realizar por Ruffini. En este caso hay que darse cuenta de que hay que poner el término independiente que vale 0

	+ 1	+ 2	+ h	+ 0
- 3		- 3	+ 3	-9 - 3h

	+ 1	- 1	+3 + h	-9 – 3h

El resto debe de ser igual a cero luego

- 9 – 3h = 0; - 3h = 9 ; h = - 9/3 ; h = -3

(5) Resolver las ecuaciones siguientes:

- **$2x^2 – 3x + 1 = 0$**

Solución:

Se trata de una ecuación de segundo grado que se resuelve por medio de la fórmula

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

para la ecuación que nos dan, los valores serán a=2; b = -3; c= +1

sustituyendo en la fórmula

$$x = \frac{+3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \cdot 2 \cdot 1}}{2 \cdot 1} = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{2} = \frac{3 \pm 1}{}; \quad x_1 = \frac{3+1}{4} = \frac{4}{4} = 1$$

$$x_2 = \frac{3-1}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

para estar seguros, lo que haríamos sería sustituir los valores que hemos hallado en la ecuación inicial

- $\frac{\mathrm{x}}{\mathrm{x-1}} + \frac{\mathrm{2x}}{\mathrm{x+1}} = 3$

Solución:

La manera que encuentro mas sencilla para eliminar los denominadores es multiplicando toda la ecuación por el producto de los denominadores

$$(x-1)(x+1)\frac{x}{x-1}+(x-1)(x+1)\frac{2x}{x+1}=(x-1)(x+1)\cdot 3$$

eliminamos los denominadores

$$(x+1)x+(x-1)2x=(x-1)(x+1)\cdot 3$$

realizamos las multiplicaciones

$$x^2+x+2x^2-2x=3x^2-3$$

$3x^2-x=3x^2-3$; eliminamos y cambiamos el signo a toda la ecuación multipli-cando por -1

x = 3

para asegurarnos sustituiremos este valor en al ecuación inicial

- $\mathbf{2x^3 - 7x^2 + 2x + 3 = 0}$

Solución:

esta es una ecuación de tercer grado. Para poder realizarla lo que haremos es dividirla por Ruffini por uno de los divisores del término independiente. El motivo es:

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = (a_1x^2 + b_1 x + c_1) \cdot (x \pm a_2) = 0$$

Como vemos, una ecuación de 3º grado se puede transformar en una de segundo multiplicada por una de primero. Para que este producto sea cero, uno de los factores tiene que ser igual a cero

$$a_1x^2 + b_1 x + c_1 = 0$$
$$x \pm a_2 = 0$$

Dividimos la primera ecuación por los divisores del término independiente que es 3 y sus divisores son ± 1 y ± 3

	+ 2	- 7	+ 2	+ 3
+1		+ 2	- 5	- 3
	+ 2	- 5	- 3	0

Si no me diera exacto con + 1 probaría con -1 y luego con +3 y – 3 hasta que diera exacto. Como da exacto quiere decir que $x - 1 = 0$, luego una solución es $x_1 = +1$

lo que me queda es una ecuación de segundo grado que se resuelve por medio de la fórmula conocida

$$\mathbf{2x^3 - 7x^2 + 2x + 3 = (2x^2 - 5x - 3) \cdot (x - 1) = 0}$$

$2x^2 - 5x - 3 = 0;$ $\quad x = \dfrac{5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-3)}}{2 \cdot 2} = \dfrac{5 \pm \sqrt{25+24}}{4} = \dfrac{5 \pm \sqrt{49}}{4} = \dfrac{5 \pm 7}{4};$

$$x_2 = \frac{5+7}{4} = \frac{12}{4} = 3; \qquad x_3 = \frac{5-7}{4} = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2}$$

- $\dfrac{x^2 - 1}{3} + (x-2)^2 = \dfrac{x^2 + 2}{2}$

Solución:

Lo primero que se me ocurre es quitar los denominadores, multiplicando toda la ecuación por el producto de los denominadores

$$3\cdot 2\cdot\frac{x^2-1}{3}+3\cdot 2\cdot(x-2)^2=3\cdot 2\cdot\frac{x^2+2}{2};\qquad 2\cdot(x^2-1)+6\cdot(x^2-4x+4)=3\cdot(x^2+2)$$

$$2x^2-2+6x^2-24x+24=3x^2+6;\qquad 2x^2+6x^2-3x^2-24x-2+24-6=0$$

$5x^2 - 24x + 16 = 0$; una ecuación de segundo grado

$$x=\frac{24\pm\sqrt{24^2-4\cdot 5\cdot 16}}{2\cdot 5}=\frac{24\pm\sqrt{576-320}}{10}=\frac{24\pm\sqrt{256}}{10}=\frac{24\pm 16}{10}$$

$$x_1=\frac{24+16}{10}=\frac{40}{10}=4;\qquad x_2=\frac{24-16}{10}=\frac{8}{10}=\frac{4}{5}$$

8. EJERCICIOS DE AUTOCOMPROBACIÓN

1. Calcular la suma y la diferencia de los polinomios:

   $P(x)=4x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 2x + 5$ y $Q(X)= 5x^3 - x^2 + 2x$

2. Calcula el producto de los polinomios:

   $P(x)= - 2x^3 + 3x^2 - 2x + 5$ y $Q(x)=x + 1$

3. Calcular el cociente y el resto de las siguientes divisiones:

   1. $(2x^3 +3x -1) : (x+2)$
   2. $(5x^4 +3x^2 -6x^3 -x +5) : (x + x^2 + 1)$

4. Hallar el valor de a para que (-1) sea un cero del polinomio

   $$P(x)= x^4 -2x^3 +3ax -2$$

5. ¿Qué valor ha de tomar a para para que (x-1) sea un factor del polinomio

   $P(x)= x^4 -3ax^3 +2x^2 +3$?.

6. Descomponer factorialmente el polinomio $x^3 -7x + 6$
7. Descomponer factorialmente el polinomio $3x^2 +x-2$
8. Descomponer factorialmente el polinomio $x^2 -5x +6$
9. Descomponer en factores el siguiente polinomio $3x^2 -10x + 3$

9. SOLUCIONES A LOS EJERCICIOS DE AUTOEVALUACIÓN

- $S(x)= 4x^4 + 3x^3 + 2x^2 +5$; $D(x)= 4x^4 - 7x^3 + 4x^2 - 4x + 5$
- $M(x)= - 2x^4 + x^3+ x^2 +3x + 5$
- 1) cociente: $2x^2 -4x +11$ resto -23 ; 2) cociente: $5x^2 -11x +9$ resto: $x-4$
- $a = \frac{1}{3}$
- $a= 2$
- $(x-1)(x-2)(x+3)$
- $(x+1)(3x-2)$
- $(x-2)(x-3)$
- $(x-3)(3x-1)$

3

Ecuaciones

Tema 3
Ecuaciones

1. Ecuaciones de primer y segundo grado con una incógnita

1.1. Ecuaciones de primer grado con una incógnita

Se denomina **ecuación** a toda igualdad que sólo es cierta para algunos valores de las variables. En este caso, las variables se llaman **incógnitas** y, cada sumando, **término de la ecuación**. Los términos numéricos se denominan **términos independientes**.

Al valor de la variable (o los valores de las variables) para el cual es cierta la igualdad se le llama **solución** de una ecuación. Ésta puede ser única, pueden ser varias o incluso puede que la ecuación no tenga solución. En este caso concreto a la ecuación la llamaremos **ecuación imposible**.

1.1.1. Resolución de ecuaciones de primer grado con una incógnita

Resolver una ecuación es hallar el valor de la incógnita:

$$x + 12 = 46$$

En esta igualdad, $x + 12$ está en el **primer miembro** (a la izquierda del signo =), y 46 está en el **segundo miembro** (a la derecha del signo =). Nuestro objetivo es aislar la ***x***, es decir, dejarla **sola** en alguno de los miembros. En este caso, tenemos que trasponer el 12.

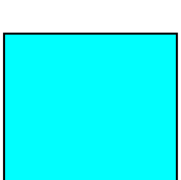
$$x + 12 - 12 = 46 - 12$$

$$x = 46 - 12, \text{ de donde } x = 34$$

Para simplificar el proceso, podemos generalizar diciendo que, para despejar (dejar sola) la ***x***, podemos trasponer los términos que la acompañan pasándolos al otro miembro haciendo la operación contraria. (Si estaba sumando, pasa restando; si estaba restando, pasa sumando; si estaba multiplicando, pasa dividiendo; si estaba dividiendo, pasa multiplicando).

Ejemplo:

El perímetro de un cuadrado es 12 m. ¿Cuánto mide cada uno de los lados?



$$4 \cdot x = 12;\ x = \frac{12}{4};\ x = 3$$

Solución: Cada lado mide 3 m.

Es importante que, una vez resuelta la ecuación, compruebes el resultado. Esto se hace sustituyendo la ***x*** por el valor que has hallado y comprobando que se mantiene la igualdad. En este caso:

$$4 \cdot 3 = 12$$

1.1.2. Resolución de ecuaciones más complejas

A veces nos encontramos ecuaciones donde la incógnita nos aparece repetida y en ambos miembros:

Método de resolver ecuaciones de primer grado con una incógnita

1. Quitar paréntesis. Si no los hay, pasar al paso 2.
2. Quitar denominadores. Si al quitar denominadores aparecen paréntesis, volver al paso 1. Si no hay denominadores, pasar al paso 3.
3. Agrupar en un miembro los términos con **x** y en el otro los que no la tengan.
4. Simplificar.

Ejemplo:

$$6x + 5 – 3x = 15 – 2x$$

Cuando nos encontremos una ecuación de este tipo, es conveniente agrupar en un miembro los términos con ***x*** y en el otro los que no la tengan.

$$6x – 3x + 2x = 15 – 5;\ 5x = 10$$

$$x = \frac{10}{5}\text{, de donde } x = 2$$

En las ecuaciones donde aparecen fracciones, lo primero que hemos de procurar es eliminarlos. Esto lo haremos reduciendo todos los términos a común denominador.

Ejemplo:

$$\frac{x}{2} + \frac{x}{5} - 6 = 8;\ \frac{5x}{10} + \frac{2x}{10} - \frac{60}{10} = \frac{80}{10}$$

Prescindiendo de los denominadores:

$$5x + 2x – 60 = 80$$

Y ya podemos resolver trasponiendo términos:

$$5x + 2x = 80 + 60;\ 7x = 140$$

$$x = \frac{140}{7}\text{, de donde } x = 20$$

De igual manera se aplica este método si hemos de despejar fórmulas matemáticas. Por ejemplo, si tenemos que despejar el radio, ***r***, en la fórmula de la superficie del círculo:

$$S = \pi \cdot r^2;\ r^2 = \frac{S}{\pi};\ r = \sqrt{\frac{S}{\pi}}$$

1.1.3. Aplicación a la resolución de problemas

No existe una receta única que nos conduzca a un final feliz en la resolución de un problema, aunque te vamos a facilitar un procedimiento que, junto con la práctica, te lo va a allanar bastante.

Procedimiento para resolver un problema

1. Lee atentamente el enunciado del problema hasta comprenderlo.
2. Elige adecuadamente la incógnita.
3. Traduce el enunciado del problema a lenguaje algebraico.
4. Resuelve la ecuación obtenida.
5. Comprueba la solución en la ecuación.
6. Da una respuesta al problema.

1.1.3.1 Problemas de tipo aritmético

La suma de tres números impares consecutivos es 1.845. Determina de qué números se trata.

Planteamiento:

Un número impar se puede escribir así:

$$2x + 1$$

Tengo que considerar que sean consecutivos. Los números impares consecutivos a **2x + 1** serán:

$$2x + 1 + 2 = \mathbf{2x + 3} \text{ y } 2x + 3 + 2 = \mathbf{2x + 5}$$

La suma de los tres ha de ser 1.845

$$\mathbf{(2x + 1) + (2x + 3) + (2x + 5) = 1.845}$$

Resolvemos la ecuación:

$$\mathbf{6x + 9 = 1.845;\ x = 306}$$

Solución:

Primer número: $2 \cdot 306 + 1 =$ **613**
Segundo número: $2 \cdot 306 + 3 =$ **615**
Tercer número: $2 \cdot 306 + 5 =$ **617**

Comprobación:

Son todos impares y su suma es 1.845.

1.1.3.2. Problemas de edades

Un hombre de 40 años tiene un hijo de 10 años. ¿Cuántos años han de transcurrir para que la edad del padre sea el doble que la del hijo?

Planteamiento:

Sea $\boldsymbol{a}$ el número de años que deben transcurrir. Entonces el padre tendrá $40 + a$ años y el hijo $10 + a$ años.

Nos dicen que la edad del padre será doble que la del hijo, por tanto:

$$\mathbf{40 + \boldsymbol{a} = 2(10 + a)}$$

Resolvemos la ecuación:

$$\mathbf{40 + \boldsymbol{a} = 20 + 2\boldsymbol{a};\ \boldsymbol{a} = 20\ años}$$

Solución:

El padre tendrá $40 + 20 = 60$ años.

El hijo tendrá $10 + 20 = 30$ años.

Comprobación:

$$60 = 2 \cdot 30$$

1.1.3.3. Problemas de mezclas

¿Cuántos litros de vino de 3 euros/l hay que mezclar con 40 litros de vino de 2 euros/l para obtener vino a 2'75 euros/l?

Planteamiento:

Designemos por ***x*** la cantidad de litros de vino que hemos de mezclar. Su valor será $3x$ euros. El valor de los 40 litros de vino a 2 euros por litro es:

$$40 \cdot 2 = 80 \text{ euros.}$$

En total tendremos $x + 40$ litros que deseamos vender a 2'75 euros el litro y cuyo importe es:

$$(x + 40)\ 2'75 \text{ euros}$$

Resolvemos la ecuación:

$$\mathbf{3x + 40 \cdot 2 = (x + 40)\ 2'75}$$

<u>Solución</u>:

x = 120 litros de vino de 3 € por litro

<u>Comprobación</u>:

$$3 \cdot 120 + 40 \cdot 2 = (120 + 40) \cdot 2'75$$

1.1.3.4. Problemas geométricos

El perímetro de un triángulo isósceles mide 15 cm. Calcula la longitud de sus lados sabiendo que el lado desigual mide la mitad de cada uno de los otros dos.

<u>Planteamiento</u>:

Un dibujo como el que aparece en el margen nos podría aclarar el problema. Recuerda que un triángulo isósceles tiene dos lados iguales. Si llamamos ***x*** al lado desigual, los otros miden **2*x*** cada uno (el doble).

El perímetro es la suma de todos los lados:

$$\mathbf{x + 2x + 2x = 15}$$

Tengo que considerar que sean consecutivos. Vendrán dados por:

Resolvemos la ecuación:

$$\mathbf{5x = 15;\ x = \frac{15}{2};\ x = 3}$$

Solución:

x = 3, por lo que un lado mide 3 cm y cada uno de los otros dos miden 6 cm.

Comprobación:

Si sumamos los tres lados obtenemos el perímetro: 3 + 6 + 6 = 15.

1.1.3.5. Problemas de móviles con el mismo sentido

Un tren de mercancías parte desde Madrid hacia Sevilla a las siete de la mañana a una velocidad constante de 50 km/h. A las once de la mañana parte desde la misma estación el AVE hacia Sevilla a una velocidad constante de 220 km/h. ¿Cuánto tiempo tardará el AVE en alcanzar al mercancías y a qué distancia de Madrid lo alcanzará? La distancia entre Madrid y Sevilla es de 471 kilómetros.

Planteamiento:

Como la velocidad es constante, cada móvil habrá recorrido en un tiempo t un espacio $v \cdot t$. Cuando el AVE alcance al mercancías ambos habrán recorrido el mismo espacio, el AVE en un tiempo t y el mercancías, como ha salido cuatro horas antes, en un tiempo $t + 4$.

El espacio recorrido por el AVE en t horas será:

$$\mathbf{e_1 = 220}\boldsymbol{t}$$

El espacio recorrido por el mercancías en t + 4 horas será:

$$\mathbf{e_2 = 50\ (}\boldsymbol{t}\mathbf{ + 4)}$$

Como ambos habrán recorrido el mismo espacio, resulta:

$$\mathbf{220 \cdot} \boldsymbol{t} \mathbf{= 50 \cdot (}\boldsymbol{t}\mathbf{ + 4)}$$

Solución:

$$t = \frac{20}{17} \text{ horas, es decir, 1h 10m 35'3s.}$$

Calculamos la distancia recorrida sustituyendo en una de las expresiones de tiempo.

$$e_1 = 220 \cdot \frac{20}{17} = 258'82 \text{ km de Madrid}$$

Comprobación:

Calculamos la distancia recorrida por el otro tren. Si coincide, es que el AVE alcanza al mercancías en ese instante:

$$e_2 = 50\left(\frac{20}{17} + 4\right) = 258'82 \text{ km.}$$

1.1.3.6. Problemas de móviles con sentido contrario

A las 9 de la mañana parte un AVE desde Madrid en sentido Sevilla a una velocidad constante de 200 km/h. Una hora más tarde parte un mercancías desde Sevilla en dirección Madrid a una velocidad constante de 60 km/h. ¿A qué hora se encuentran y a qué distancia de los puntos de salida? La distancia entre Madrid y Sevilla es de 471 kilómetros.

Planteamiento:

Desde que sale el AVE hasta que se encuentra con el mercancías habrá estado un tiempo t andando y habrá recorrido un espacio $e_1 = 200 \cdot t$.

De igual manera, el mercancías habrá andado durante un tiempo $t - 1$ y recorrido un espacio $e_2 = 60\ (t - 1)$ hasta que se encuentre con el AVE. Lógicamente, la suma de los dos espacios es la distancia entre ambas ciudades: $e_1 + e_2 = 471$

Solución:

Así que: $\mathbf{200}\boldsymbol{t} \mathbf{+ 60\ (}\boldsymbol{t} \mathbf{- 1) = 471}$

Resolviendo la ecuación tenemos: $t = 531 / 260$ horas, es decir, 2h 2m 32'3s. Para saber a qué distancia de ambas ciudades se produce el encuentro basta calcular los valores numéricos de e_1 y de e_2 una vez que sabemos el valor t.

Comprobación:

La suma de ambas distancias ha de ser igual a 471 km.

1.1.3.7. Problemas de trabajadores, grifos,…

Un grifo llena un depósito en 3 horas y otro grifo lo hace en 4 horas. ¿Cuánto tiempo tardarán en llenarlo los dos a la vez?

Planteamiento:

Llamemos x al tiempo que tardarán ambos grifos en llenar el depósito y veamos la parte del depósito que llena cada uno en una hora.

Como el primero tarda 3 horas en llenarlo, en 1 hora llenará la tercera parte (1/3) del depósito; el segundo llenará 1/4 del depósito en una hora, y los dos juntos, en una hora, habrán llenado los 1/x del depósito.

Por lo tanto:

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{4}=\frac{1}{x}$$

<u>Solución</u>:

$x = \frac{12}{7}$ horas, es decir, 1h 42m 51'43s.

1.2. Ecuaciones de segundo grado

Una **ecuación de segundo grado** con una incógnita es de la forma:

$\mathbf{a}x^2 + \mathbf{b}x + \mathbf{c} = \mathbf{0}$, siendo a ≠ 0.

La ***x*** recibe el nombre de **incógnita**.

Las letras **a**, **b**, **c** las llamamos **coeficientes**.

<u>1.2.1. Número de soluciones de una ecuación de segundo grado</u>

El número de soluciones de una ecuación de este tipo puede ser dos, una o ninguna.

<u>1.2.2. Resolución de ecuaciones de segundo grado</u>

Resolver una ecuación consiste en utilizar un procedimiento para encontrar sus soluciones. Como la resolución de este tipo de ecuaciones tiene cierta dificultad vamos a distinguir diversos casos:

1.2.2.1. Ecuaciones de la forma: $ax^2 + c = 0$

Se soluciona despejando x^2 y extrayendo la raíz cuadrada:

Ejemplo:

$$2x^2 - 8 = 0;\ 2x^2 = 8;\ x^2 = 4;$$

$$x = \pm\sqrt{4};\ x = 2 \text{ y } x = -2$$

1.2.2.2. Ecuaciones $ax^2 + bx = 0$

Para resolver este tipo de ecuaciones en primer lugar debemos sacar factor común ***x***:

$$x\,(ax + b) = 0$$

Este producto es cero cuando uno de los dos factores es cero:

$$x = 0 ;$$

$$ax + b = 0 \rightarrow x = 0$$

En el caso en que la ecuación tenga la forma $(x + p)(x + q) = 0$, podremos obtener las raíces teniendo en cuenta que cada factor puede ser nulo. Por tanto las soluciones son: $\boldsymbol{x = -p}$ y $\boldsymbol{x = -q}$

Ejemplos:

$$3x^2 - 4x = 0;\ x(3x - 4) = 0;\ x = 0 \text{ ó } x = 4/3$$

$$(x - 3)(x + 7) = 0;\ x = 3 \text{ y } x = -7$$

1.2.3. Fórmula general para resolver ecuaciones de segundo grado

Vamos a utilizar el método de completar cuadrados en la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$, para obtener la fórmula que nos permita obtener directamente sus soluciones.

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

1.2.4. Ecuaciones bicuadradas

Son ecuaciones de la forma $ax^4 + bx^2 + c = 0$ y para resolverlas necesitamos realizar el cambio $\boldsymbol{x^2 = t}$. De este modo convertimos la ecuación bicuadrada en una ecuación de segundo grado que sabemos resolver: $at^2 + bt + c = 0$.

El número de soluciones de la ecuación bicuadrada puede ser 4, 2 ó 0. Veamos todo lo descrito con un ejemplo:

$$x^4 - 3x^2 - 4 = 0$$

$$\text{Cambio } x^2 = t \Rightarrow t^2 - 3t - 4 = 0$$

Resolvemos la ecuación de segundo grado: $t_1 = 4$ y $t_2 = -1$

Deshacer el cambio:

$$\text{Si } t_1 = 4 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm\sqrt{4} = \pm 2$$

$$\text{Si } t_2 = -1 \Rightarrow x^2 = -1 \Rightarrow \text{No tiene solución.}$$

Las soluciones de la bicuadrada son: $\mathbf{x_1 = 2}$ y $\mathbf{x_2 = -2}$.

2. Ecuaciones polinómicas con raíces enteras

Son ecuaciones formadas por polinomios cuyas soluciones son números enteros.

Ejemplo:

$$x^2 + 2x - 3 = 0$$

Como veis, el primer término es un polinomio. Si hallamos sus raíces por factorización, tenemos

$$(x + 3)(x - 1) = 0$$

por lo tanto, para que esa igualdad se cumpla se requiere que cada uno de los paréntesis sea cero, o ambos sean cero. Así, o bien

$x + 3 = 0$

$\mathbf{x = -3}$

o bien

$x - 1 = 0$

$\mathbf{x = 1}$

Como veis, $x = 1$ y $x = -3$ son ambas soluciones para la ecuación, y además las dos pertenecen a los enteros.

Para comprobar que cada uno de los valores de *x* es solución a la ecuación, reemplazamos su valor en la misma y vemos que la igualdad se cumpla:

Para $x = 1$:

$x^2 + 2x - 3 = 0$
$1^2 + 2(1) - 3 = 0$
$1 + 2 - 3 = 0$
$0 = 0$

Para $x = -3$:

$x^2 + 2x - 3 = 0$
$(-3)^2 + 2(-3) - 3 = 0$
$9 - 6 - 3 = 0$
$0 = 0$

Las dos soluciones satisfacen la ecuación.

3. Ecuaciones irracionales sencillas

3.1. Ecuaciones irracionales con una sola raíz

Las ecuaciones irracionales son aquellas que tienen la incógnita bajo el signo de la raíz cuadrada: $\sqrt{x-1}+3=x$. La forma de resolverlas es:

1) Dejar en un miembro de la igualdad todas las raíces y en el otro miembro lo demás.

2) Reducir términos.

3) Elevar al cuadrado los dos miembros de la igualdad

4) Hay que comprobar las soluciones que hemos obtenido ya que no todas pueden ser ciertas.

Ejemplo:

$$\sqrt{x-1}+3=x\text{; }\sqrt{x-1}=x-3\text{;}$$

$$\left(\sqrt{x-1}\right)^2=(x-3)^2\text{; }x-1=x^2+9-6x\text{;}$$

$$x^2-7x+10=0 \Rightarrow x_1=2 \text{ y } x_2=5$$

<u>Comprobemos las soluciones</u>:

$$\sqrt{2-1}+3=4\neq 2 \Rightarrow \text{No es solución.}$$

$$\sqrt{5-1}+3=5 \Rightarrow \text{Sí es solución.}$$

3.2. Resolución de problemas

<u>3.2.1. Problemas aritméticos</u>

El cuadrado del doble de un número es 1.024. ¿Cuál es este número?

$(2x)^2 = 1024 \Rightarrow 4x^2 = 1.024 \Rightarrow x^2 = 256 \Rightarrow x = \pm\sqrt{256} \Rightarrow x = \pm 16$

NOTA: ¡Cuidado: salen dos soluciones!

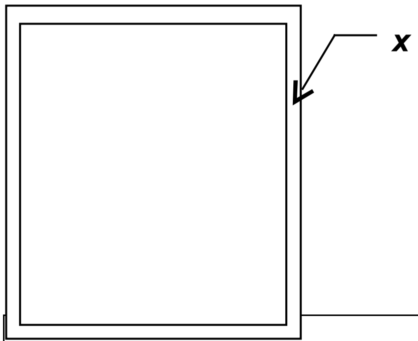
3.2.2. Problemas de edades

Dentro de tres años mi edad será el cuadrado de la tercera parte de la edad que tenía hace 25 años. ¿Cuántos años tengo?

$$x+3=\left(\frac{x-25}{3}\right)^2 \Rightarrow x = 46 \text{ años tengo ahora}$$

3.2.3. Problemas geométricos

Para empotrar un espejo antiguo de 90 x 60 cm en el cuarto de baño, los alicatadores me han dejado un hueco rectangular de 8.800 cm². ¿De qué anchura debe ser la cenefa que compre para enmarcarlo?



$$(2x+90)\cdot(2x+60)=8800 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 4x^2+300x-3400=0 \Rightarrow x=\pm 10 \Rightarrow$$

La anchura debe ser de 10 cm.

4. Ecuaciones exponenciales y logarítmicas sencillas

4.1. Ecuaciones exponenciales

Se llama **ecuación exponencial** a aquella en la que la incógnita aparece como **exponente**. Un ejemplo de ecuación exponencial sería $a^x = b$.

Para resolver estas ecuaciones se suelen utilizar dos métodos alternativos:

- **Igualación de la base**: consiste en aplicar las propiedades de las potencias para lograr que en los dos miembros de la ecuación aparezca una misma base elevada a distintos exponentes:

  $$A^x = A^y.$$

  En tales condiciones, la resolución de la ecuación proseguiría a partir de la igualdad x = y.

- **Cambio de variable**: consiste en sustituir todas las potencias que figuran en la ecuación por potencias de una nueva variable, convirtiendo la ecuación original en otra más fácil de resolver.

$$2^{2x} - 3 \cdot 2^x - 4 = 0 \overset{t=2^x}{\Leftrightarrow} t^2 - 3t - 4 = 0$$

luego se *deshace* el cambio de variable.

Por otra parte, un sistema de ecuaciones se denomina exponencial cuando en alguna de sus ecuaciones la incógnita aparece como exponente. Para la resolución de **sistemas de ecuaciones exponenciales** se aplican también, según convenga, los métodos de igualación de la base y de cambio de variable.

4.2. Ecuaciones logarítmicas

Ecuaciones logarítmicas son aquéllas en las que la incógnita figura en un logaritmo.

Ejemplos de ecuaciones logarítmicas son los siguientes:

a) $\log x + \log 20 = 2$

b) $2 \log x = \log (4x - 12)$

Para resolver una ecuación logarítmica se aplican las propiedades de los logaritmos. Además, se debe expresar la ecuación dada en la forma $\log E = \log E'$. De esta ecuación se pasa a la ecuación $E = E'$, por ser inyectiva[1] la función logarítmica, es decir:

$$\log E = \log E' \rightarrow E = E'$$

Esta relación indica que, en una función logarítmica, los números positivos y sus logaritmos se corresponden de forma única (uno a uno).

[1] Una función es **inyectiva** si a cada elemento de un conjunto *A* le corresponde un solo valor tal que, en el conjunto A no puede haber dos o más elementos que tengan la misma imagen.

4

Sistemas de Ecuaciones

Tema 5

Llamamos **sistema de ecuaciones** a un conjunto cualquiera de ecuaciones que deben verificarse para unos mismos valores de las incógnitas. Por ejemplo las ecuaciones:

$3x^2 - 2x + 3y = y - 1$

$2y - 3y^2 = 3x + 4$ formarían un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas

El conjunto de ecuaciones:

$$\begin{array}{l} x + y + z = 4 \\ 3x - 2y - z = 4 \\ x + 3y - 5z = -1 \end{array}$$

formarían un sistema **de tres ecuaciones con tres incógnitas.**

Se llama **grado del sistema de ecuaciones** al mayor exponente al que se encuentre elevada alguna incógnita del sistema.

El primer ejemplo planteado es un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas de segundo grado. Sin embargo, el ejemplo anterior es un sistema de tres ecuaciones de grado uno o lineales con tres incógnitas.

El sistema de ecuaciones $\begin{array}{l} x + y = -2 \\ 2x - y = 0 \end{array}$ es de primer grado con dos incógnitas

Cuando el sistema de ecuaciones es de **primer grado** y además **no aparecen términos con las incógnitas multiplicadas entre sí** (tipo x.y) se dice que es un ***sistema de ecuaciones lineales***.

Es con este tipo de sistemas y para el caso de dos y tres incógnitas, con los que vamos a trabajar en este tema.

2. Resolución de sistemas y sistemas equivalentes.

Resolver un sistema de ecuaciones consiste en hallar unos valores que, sustituidos en la incógnitas, transforman las ecuaciones en identidades, es decir, se satisfacen todas y cada una de las ecuaciones que forman el sistema.

Soluciones de un sistema son los grupos de valores de las incógnitas que verifican al mismo tiempo todas las ecuaciones.

Ejemplo: Los sistemas

$$\begin{array}{l} 5x - y = 3 \\ x + y = 3 \end{array} \quad y \quad \begin{array}{l} 3x + 2y = 7 \\ 5x - 3y = -1 \end{array}$$

son equivalentes ya que tienen las mismas soluciones: x=1, y=2

3. Clasificación de los sistemas de ecuaciones

Según las soluciones, los sistemas se clasifican en: compatibles e incompatibles.

Un sistema de ecuaciones lineales es

6. **compatible** cuando es posible hallar unos valores de las incógnitas que satisfagan al mismo tiempo a todas y cada una de las ecuaciones que componen el sistema. A su vez, los sistemas de ecuaciones lineales compatibles los podemos clasificar en sistema lineal **compatible determinado,** tiene un número determinado de soluciones; **compatible indeterminado** cuando tiene un número infinito de soluciones.
7. **Incompatible** cuando no es posible hallar unos valores de las incógnitas que verifiquen al mismo tiempo a todas las ecuaciones que componen el sistema. En este caso se dice también que el sistema es imposible o que no tiene solución.

Ejemplos:

El sistema $\begin{matrix} 3x - y = 7 \\ x + y = 9 \end{matrix}$ es compatible determinado, ya que no admite más soluciones que: x=4; y=5.

Sin embargo, el sistema $\begin{matrix} 2x - 4y = 6 \\ 3x - 6y = 9 \end{matrix}$ es compatible indeterminado, ya que tiene infinitas soluciones x=5 y=1; x=6 y=3/2; x=7 y=2; ...

Por otra parte, el sistema $\begin{matrix} 6x - 2y = 7 \\ 3x - y = 4 \end{matrix}$ es incompatible ya que no existe ninguna solución que satisfaga al mismo tiempo las dos ecuaciones.

4. Métodos de resolución de sistemas con dos incógnitas.

Para resolver un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas, normalmente, es necesario transformar el sistema dado en otro equivalente, en cuyas ecuaciones no figura más que una incógnita. Existen tres métodos de resolución para estos sistemas: sustitución, igualación y reducción. Vamos a estudiar dichos métodos a partir del siguiente ejemplo: $\begin{cases} 2x + y = 0 \\ x + y = -1 \end{cases}$

- **Método de sustitución:**
  1. Se despeja una incógnita en una ecuación, por ejemplo la y en la primera: **y = -2x**
  2. Se sustituye dicho valor en la segunda: **x - 2x = -1**

3.Se resuelve esta ecuación: -x = -1 ; **x = 1**

4.Con este valor se halla el de la otra incógnita (paso 1)**:** **y = -2**

- **Método de igualación:**

1.Despejamos una incógnita de la primera ecuación: **y=-2x**

2. Despejamos la misma incógnita de la otra ecuación: **y=-1-x**

3. Igualamos las expresiones obtenidas: **-2x=-1-x**

4. Se resuelve esta ecuación **-2x+x=-1; -x=-1; x=1**

 1. Ahora se sustituye el valor obtenido en cualquiera de las dos primeras ecuaciones y se obtiene el valor de la otra incógnita: **y=-2**

- **Método de reducción**

13. Se consigue que al sumar o restar ambas ecuaciones, miembro a miembro se elimine una incógnita. Para ello se simplifica todo lo posible y se multiplica, si es necesario alguna ecuación por algún número. En este caso se pueden restar directamente una ecuación de la otra y se elimina la y : **1ª - 2ª** : **x = 1**

14. Se resuelve la ecuación resultante. En este caso ya lo está ya que hemos obtenido directamente la solución para la **x**: **x = 1**

15. Se sustituye esta solución en una de las dos ecuaciones y se resuelve hallando la otra incógnita. En este caso, sustituyendo x = 1 en cualquiera de las dos ecuaciones se obtiene fácilmente **y = -2.**

- **Resolución de sistemas lineales con tres incógnitas**

Para resolver un sistema de ecuaciones con tres incógnitas, al igual que en el apartado anterior, es necesario transformar el sistema dado en otro equivalente, en dos de cuyas ecuaciones no aparezcan más que dos incógnitas. Se calculan éstas y sustituyendo los valores obtenidos en la tercera, se deduce el valor de la incógnita restante.

El método más recomendable de los ya dados es el de reducción.

Ejemplo: sea el sistema $\left.\begin{array}{r} 3x-2y+6z=11 \\ x+y-2z=3 \\ 4x-2y+z=9 \end{array}\right\}$ multiplicamos la segunda ecuación por 3 y la sumamos a la primera

$$\begin{array}{r} 3x-2y+6z=11 \\ \underline{3x+3y-6z=9} \\ 6x \quad +y \qquad =20 \end{array}$$

multiplicamos la tercera por 2 y la sumamos a la segunda

$$\begin{array}{rcl} x + y - 2z &=& 3 \\ 8x - 4y + 2z &=& 18 \\ \hline 9x \quad - 3y \quad &=& 21 \end{array}$$

Resolvemos el sistema resultante:

$$\left.\begin{array}{r} 6x + y = 20 \\ 9x - 3y = 21 \end{array}\right\}$$

Resultando: x=3; y=2, sustituimos los valores de x e y en cualquiera de las ecuaciones iniciales, por ejemplo la 2ª : 3+2-2z=3 resultando z=1.

- **Casos especiales**

1. Sistemas incompatibles

Si intentas resolver el siguiente sistema de ecuaciones: $\begin{cases} x + 1 = y - 2 \\ y + 2 = x - 3 \end{cases}$.

Por ejemplo por reducción, llegarás a una expresión como **0 = -8** o algo parecido. ¿Qué significa?. Desde luego eso no es cierto. Por consiguiente, eso significa que el sistema de ecuaciones: ***no tiene solución.***

2. Sistemas compatibles indeterminados

Si resuelves ahora el siguiente sistema de ecuaciones: $\begin{cases} x - 3 = y + 1 \\ 2x - 2y = 8 \end{cases}$, por ejemplo por sustitución, ahora habrás llegado a la expresión **0 = 0** u **otro número = el mismo número**. ¿Qué significa ahora?. La igualdad que has obtenido es cierta pero se te han eliminado la **x** y la **y**. ¿Cuál es la solución?. Si la igualdad es cierta seguro ¿lo será para cualquier valor de **x** o de **y**?.

Para calcular en estos casos las soluciones se hallan numéricamente dando valores a ***x*** o ***y*** en cualquiera de las dos ecuaciones (son las dos la misma) y obteniendo los correspondientes de la otra incógnita. Por ejemplo en la primera ecuación:

x - 3 = y + 1, podemos obtener para y = 0, x = 4; para y = 2, x = 6; para y = -3, x = 1; etc, todas ellas soluciones.

- **Problemas de aplicación**

Muchos problemas que se resuelven mediante ecuaciones pueden necesitar más de una incógnita y dar lugar por tanto a un sistema de ecuaciones. Por ejemplo:

Problema: Encuentra dos números sabiendo que la mitad de su suma es 5 y el doble de su diferencia es 8.

Planteamiento: Números: x e y.

Ecuaciones: $(x + y) / 2 = 5$

$2(x - y) = 8$

d) RESUMEN

Clasificación de los sistemas en función de las soluciones:

- **Compatibles:** tienen solución
  - **Determinados:** número finito de soluciones
  - **Indeterminados:** infinitas soluciones
- **Incompatibles:** no tienen solución

Métodos de resolución para sistemas con dos incógnitas:

Método de sustitución: se despeja una incógnita de una ecuación y se sustituye en la otra.

Método de igualación: en ambas ecuaciones se despeja la misma incógnita y se igualan las expresiones.

Método de reducción: se multiplica una ecuación por un número y se le suma a la otra de forma que una de las incógnitas desaparezca.

Métodos de resolución para sistemas con tres incógnitas: Se transforma el sistema en otro equivalente, de forma que en dos ecuaciones sólo aparezcan dos incógnitas, para dicha operación se recomienda el método de reducción. Finalmente se sustituyen los valores obtenidos en la tercera obteniendo así el valor de la incógnita restante.

6.ACTIVIDADES

1. En una lucha entre moscas y arañas intervienen 42 cabezas y 276 patas. ¿Cuántos luchadores había de cada clase? (Recuerda que una mosca tiene 6 patas y una araña 8 patas).

2. En la granja se han envasado 300 litros de leche en 120 botellas de dos y cinco litros. ¿Cuántas botellas de cada clase se han utilizado?.

3. Al comenzar los estudios de Bachillerato se les hace un test a los estudiantes con 30 cuestiones sobre Matemáticas. Por cada cuestión contestada correctamente se le dan 5 puntos y por cada cuestión incorrecta o no contestada se le quitan 2 puntos. Un alumno obtuvo en total 94 puntos. ¿Cuántas cuestiones respondió correctamente?

4. Un número consta de dos cifras cuya suma es 9. Si se invierte el orden de las cifras el resultado es igual al número dado más 9 unidades. Halla dicho número.

5. Al preguntar en mi familia cuántos hijos son, yo respondo que tengo tantas hermanas como hermanos y mi hermana mayor responde que tiene doble número de hermanos que de hermanas. ¿Cuántos hijos e hijas somos?

6. Mi tío le dijo a su hija. "Hoy tu edad es 1/5 de la mía y hace 7 años no era más que 1/7". ¿Qué edad tienen mi tío y su hija?

7. Un rectángulo tiene un perímetro de 392 metros. Calcula sus dimensiones sabiendo que mide 52 metros más de largo que de ancho.

8. Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} 3x+2y+z=4 \\ x-y+3z=2 \\ 2x+y-z=1 \end{cases} \qquad \begin{cases} 3x+2y+z=4 \\ x-y+3z=1 \end{cases}$$

8. EJERCICIOS DE AUTOCOMPROBACIÓN

1) Hallar dos números tales que su suma sea 90 y su cociente 9.

2) Halla dos números tales que su suma sea 77 y que, al dividir el mayor por el menor, dé 3 de cociente y 5 de resto.

3) Halla una fracción que resulte equivalente a ¼ si se añade una unidad al numerador, y equivalente a 1/5 si se añade una unidad al denominador.

4) Tres ciudades A, B y C, están dispuestas en los vértices de un triángulo. Si se va de A a B pasando por C, se recorren 27 km. Si se va de B a C, pasando por A, 35 km. Y de A a C por B, 32 km. Hallar la distancia entre cada dos ciudades.

EJERCICIOS DE AUTOEVALUACIÓN

(6) Resolver, aplicando el método que se desee, los siguientes sistemas de ecuaciones lineales:

a) $\begin{cases} 10(x-2)+2y=4 \\ x+3(x-y)=2 \end{cases}$

Solución:

Quitamos los paréntesis

10x – 20 + 2y = 4

x + 3x – 3y = 2

10 x + 2 y = 24

4 x – 3 y = 2 yo prefiero el sistema de reducción. Para ello multiplico la ecuación superior por 3 y la inferior por 2 con el fin de que los coeficientes de la y sean iguales y al sumarlos ordenadamente se me anulen

30 x + 6 y = 72

8 x – 6 y = 4

38 x = 76; x = 76 / 38 = 2 ; y = 2

b) $\begin{cases} \dfrac{x}{4}+\dfrac{y}{5}=7 \\ \dfrac{x}{3}-\dfrac{y}{4}=-1 \end{cases}$

Solución:

elimino los denominadores multiplicando por el producto

$4 \cdot 5 \cdot \frac{x}{4} + 4 \cdot 5 \cdot \frac{y}{5} = 4 \cdot 5 \cdot 7$; 5x + 4y = 140

$3 \cdot 4 \cdot \frac{x}{3} - 3 \cdot 4 \cdot \frac{y}{4} = 3 \cdot 4 \cdot (-1)$; 4x - 3y = -12

elimino las y multiplicando por los coeficientes respectivos

15x + 12 y = 420

16x – 12 y = - 48

31x = 372

x = 372 / 31 = 12; y = 20

c) $\begin{cases} x+y+z=2 \\ x-y+z=6 \\ x-y-z=0 \end{cases}$

Solución:
Voy a eliminar la y entre la primera y la segunda y luego haré lo mismo con la primera y la tercera

$$\begin{array}{l} x + y + z = 2 \\ \underline{x - y + z = 6} \\ 2x \quad\quad + 2z = 8 \quad (4) \end{array}$$

$$\begin{array}{l} x + y + z = 2 \\ \underline{x - y - z = 0} \\ 2x \quad\quad\quad = 2 \end{array}$$

el valor de x será 1

sustituimos en (4) y obtendremos que z = 3;
sustituyendo en cualquiera de las otras obtendremos que el valor de y = -2

d) $\begin{cases} 4x-2z=3 \\ 3x+y=1 \\ 10y-2z=-21 \end{cases}$

Solución:
despejamos de la segunda ecuación el valor de y

y = -3x +1; sustituimos este valor en la tercera ecuación

10·(-3x + 1) – 2z = -21; -30x + 10 – 2z = -21; -30x – 2z = -31

(1) $\underline{\quad 4x \;-\; 2z \;=\; 3}$

Cambiamos el signo de la ecuación de arriba y sumamos

$30x + 2z = 31$
$\underline{4x - 2z = 3}$
$34x = 34$;   luego $x = 1$, el valor de $y = -2$, y el valor de $z = \frac{1}{2}$.

Para asegurarnos lo que hacemos es sustituir para ver si se cumplen los valores

(7) Tres amigos suelen ir juntos a una cafetería. Un día tomaron dos cafés y un cortado, por lo que pagaron 4,8 euros; al día siguiente consumieron un café, un cortado y un zumo de naranja y la cuenta fue de 6,3 euros; otro día abonaron 5,1 euros por dos cortados y un café. ¿Cuál es el precio del café, del cortado y del zumo de naranja?

Llamaremos:
x: precio del café
y: precio del cortado
z: precio del zumo de naranja,

Planteamos el problema de la siguiente forma:

$$\begin{cases} 2x + y = 4{,}8 \\ x + y + z = 6{,}3 \\ x + 2y = 5{,}1 \end{cases}$$

Resolviendo adecuadamente, se tiene que:

$x = 1{,}5$ euros
$y = 1{,}8$ euros
$z = 3$ euros.

(8) Repartir 180 euros entre tres personas de forma que la primera de ellas reciba el doble que la segunda y la tercera persona la mitad que las otras dos juntas.

Solución:

Suponemos que la segunda persona ha recibido x euros

la primera recibirá 2x

La tercera recibirá: (x + 2x) / 2

La suma de las tres cantidades será de 180 euros

$2x + x + \frac{(x+2x)}{2} = 180$;   4x + 2x + x + 2x = 360;   9x = 360;   x = 40

La segunda recibe 40 euros, la primera 80 y la tercera 60

(9) Una persona dispone de 10.000 euros. Coloca una parte de este dinero en una cuenta bancaria que le proporciona el 6% de beneficio y el resto lo invierte en bolsa logrando ganar el 10%. ¿Cuánto ha ingresado en el banco y cuánto ha invertido en bolsa si sus beneficios han sido de 720 euros?

Solución:

Si tiene 10.000 euros y coloca una parte en el banco que no conocemos la cantidad, los llamaremos x.

El dinero que le queda serán los 10.000 menos los que ha colocado en el banco, es decir 10.000 –x

Ahora vamos a los beneficios.

El beneficio que le ha dejado el dinero del banco serán el 6% de x, es decir x· $\frac{6}{100}$

El beneficio que obtiene en la bolsa serán: $(10.000 - x) \cdot \frac{10}{100}$

La suma de los dos beneficios valdrá 720 euros

$\frac{6x}{100} + (10.000 - x) \cdot \frac{10}{100} = 720$;

multiplico todo por 100 para quitar los denominadores

$6x+100.000-10x=72.000$; -4x = - 28.000; x=28.000 / 4 = 7.000

Ha invertido 7000 en el banco y 3.000 en la bolsa

(10) Una persona compra en rebajas un televisor, un ordenador portátil y una cámara digital que cuestan 1860 euros. El televisor y la cámara están rebajados el 20% y el portátil el 10%, con lo que se ahorra 268 euros. ¿Cuál es el precio original del ordenador portátil si su precio es el doble que el del televisor?

Solución:
televisor = x
ordenador = y
cámara = z

la suma de los tres productos es igual a 1860 euros

$$x + y + z = 1860 \qquad (1)$$

el precio del ordenador es el doble que el del televisor

$$y = 2x \qquad (2)$$

la rebaja que nos hacen

$$x \cdot \frac{20}{100} + y \cdot \frac{10}{100} + z \cdot \frac{20}{100} = 268 \qquad (3)$$

tengo un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas. Si sustituyo el valor de y obtenido en la (2), en la (1) y (3)

$$x + 2x + z = 1860$$

$$x \cdot \frac{20}{100} + 2x \cdot \frac{10}{100} + z \cdot \frac{20}{100} = 268$$

3x + z = 1.860
40x + 20z = 26.800

multiplicamos por 20 la superior y le cambiamos de signo

60x + 20z = +37.200
-40x - 20z = -26.800
20x = 10.400; x = 10400 / 20 = 520 € el televisor
El ordenador el doble que el televisor y = 2x = 2 · 520 = 1040 € el ordenador
la cámara serán 300 euros

7. EJERCICIOS DE AUTOCOMPROBACIÓN

2. Hallar dos números tales que su suma sea 90 y su cociente 9.
3. Halla dos números tales que su suma sea 77 y que, al dividir el mayor por el menor, dé 3 de cociente y 5 de resto.
4. Halla una fracción que resulte equivalente a ¼ si se añade una unidad al numerador, y equivalente a 1/5 si se añade una unidad al denominador.
5. Tres ciudades A, B y C, están dispuestas en los vértices de un triángulo. Si se va de A a B pasando por C, se recorren 27 km. Si se va de B a C, pasando por A, 35 km. Y de A a C por B, 32 km. Hallar la distancia entre cada dos ciudades.
6. Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones lineales

$$a)\begin{cases} 2x+3y=1 \\ -x+2y=3 \end{cases} \qquad b)\begin{cases} 2x+3y+4z=10 \\ 3x-2y+2z=9 \\ 4x+4y-3z=2 \end{cases}$$

$$c)\begin{cases} x+y+2z=1 \\ 2x-3y-z=3 \\ 3x-2y+z=4 \end{cases} \qquad d)\begin{cases} 2x+y=1 \\ x+2y=3 \end{cases}$$

8. SOLUCIONES A LOS EJERCICIOS DE AUTOEVALUACIÓN

12. X=81; y=9
13. X=59; y=18
14. X=5; y=24
15. Las distancias son: AB=20 km; BC=12 km CA=15 km
16. a) $\begin{cases} x=-1 \\ y=1 \end{cases}$ x=-1; y=1 b) $\begin{cases} x=\dfrac{233}{127} \\ y=-\dfrac{12}{127} \\ z=\dfrac{210}{127} \end{cases}$
17. c) $\begin{cases} x=\dfrac{5}{6}-t \\ -\dfrac{1}{5}-t \\ z=t \end{cases}$ d) $\begin{cases} x=-\dfrac{1}{3} \\ y=\dfrac{5}{3} \end{cases}$

5

Trigonómetria

Tema 5
Trigonometría

1. ÍNDICE

16. **Introducción**
17. **Ángulos**
18. **Sistemas de medición de ángulos**
19. **Funciones trigonométricas de un ángulo**
20. **Teorema de Pitágoras**
21. **Problemas sobre resolución de triángulos rectángulos**

2. INTRODUCCIÓN GENERAL A LA UNIDAD Y ORIENTACIONES PARA EL ESTUDIO

En esta unidad vamos a introducir las razones trigonométricas seno, coseno y tangente de un ángulo. Centraremos nuestros cálculos a las razones trigonométricas de ángulos agudos. Para ello comenzaremos la unidad introduciendo los conceptos básicos relacionados con los ángulos, así como, los dos sistemas básicos de medición de ángulos. Finalmente, introduciremos el teorema de Pitágoras y problemas de aplicación de dicho teorema.

3. OBJETIVOS ESPECÍFICOS

5. Saber calcular las razones trigonométricas de un ángulo agudo.

e) Conocer el enunciado del teorema de Pitágoras.

f) Saber resolver problemas de triángulos rectángulos.

g) Saber aplicar el teorema de Pitágoras a problemas aplicados.

4. DESARROLLO DE LOS CONTENIDOS

e) Introducción

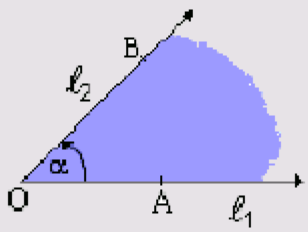
La palabra **trigonometría** proviene del griego **trí** = tres, **gonon** = ángulo y **metria** = medida. Es la parte de la Matemática que nos ayuda a resolver problemas relacionando y haciendo cálculos con las medidas de los lados y los ángulos de un triángulo. En esta Unidad estudiaremos básicamente sólo un sistemas de medición de ángulos, aunque mencionaremos un segundo sistema, para luego introducir las principales funciones trigonométricas: seno, coseno y tangente, observando su relación en los distintos cuadrantes.

Estos recursos nos ayudarán a resolver problemas como el siguiente: ¿Cómo medir el ancho de un río sin cruzarlo?. Supongamos que se tienen aparatos para medir distancias y para medir ángulos pero no se puede cruzar el río. Además la orilla es escarpada y sólo es posible moverse perpendicularmente al río, donde hay un camino. ¿Cómo medir el ancho del río?.

Este y otros problemas similares han podido ser resueltos desde la antigüedad utilizando las relaciones trigonométricas entre los ángulos y los lados de los triángulos. En esta Unidad también recordaremos algunas de ellas.

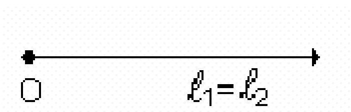
f) Ángulos

Un ***ángulo*** α en el plano es la región determinada por dos semirrectas ℓ_1 y ℓ_2 con origen común O, cuando se hace girar el lado inicial ℓ_1 hasta el lado final ℓ_2 en el sentido contrario al de las agujas del reloj. Este sentido también es llamado ***antihorario***. ℓ_1 se denomina ***lado inicial*** y ℓ_2 ***lado final*** de α y lo denotamos por $\alpha = A\hat{O}B$.

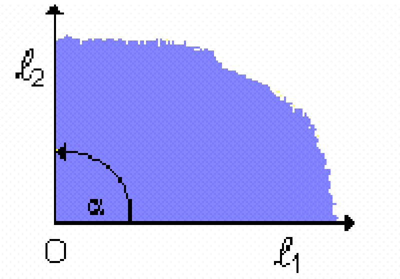


Ejemplo:

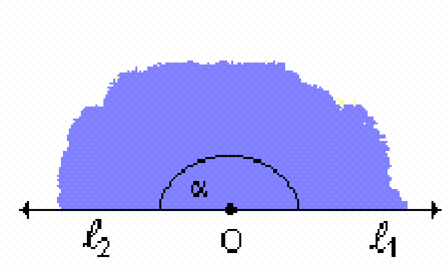
- **Ángulo nulo**



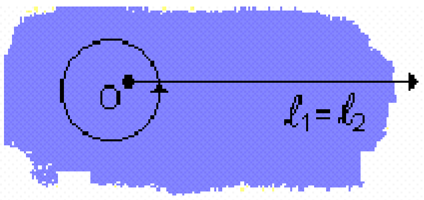
- **Ángulo recto**



- **Ángulo llano**

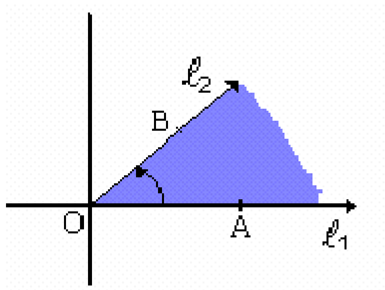


- **Ángulo de 1 giro**

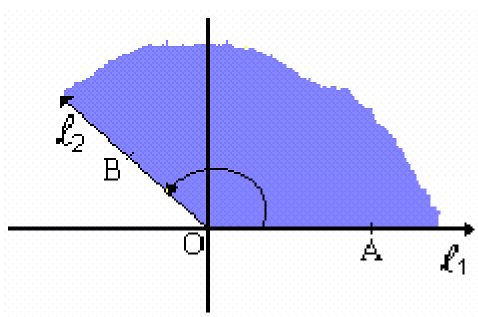


Si colocamos el origen de un ángulo $\alpha = A\hat{O}B$ en el origen de coordenadas y hacemos coincidir el lado inicial l_1 con el semieje positivo de las x, entonces el lado terminal l_2 quedará en algún cuadrante.

l_2 está en el primer cuadrante



l_2 está en el segundo cuadrante



De esta manera, podemos hablar del cuadrante al que pertenece un ángulo α. Por definición, los ángulos ***agudos*** son los que pertenecen al primer cuadrante.

g) Sistemas de medición de ángulos

Para medir la amplitud de un ángulo tenemos diferentes sistemas de medición.

1. Sistema Sexagesimal

El ***sistema sexagesimal*** consiste en tomar como unidad de medida la 90-ava parte de un ángulo recto. Se denomina a dicha unidad ***grado sexagesimal*** y se la denota 1º.

A la 60-ava parte de un grado se la llama ***minuto*** y se la denota 1' ; y la 60-ava parte de un minuto se la denomina ***segundo*** y se denota 1''.

Si se requiere más precisión se consideran décimas, centésimas, etc. de segundo.

Ejemplos:

1) Un ángulo recto mide 90º.

2) Un ángulo llano mide 180º.

3) Expresemos en grados, minutos y segundos el ángulo que mide 30,28º.

En principio separamos la parte entera y la parte decimal de 30,28º

$$30{,}28^\circ = 30^\circ + 0{,}28^\circ$$

Ahora, usando proporcionalidad directa calculamos cuántos minutos son 0,28º.

$$\begin{array}{ccc} 1^\circ & \to & 60' \\ 0.28^\circ & \to & x \\ x & = & 60\cdot 0.28 = 16.80' \end{array}$$

Separando luego la parte entera y la parte decimal de los minutos

$$16.80' = 16' + 0{,}80'$$

Con la regla de tres simple calculamos ahora cuántos segundos son 0,80'

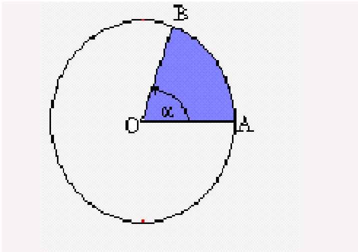
$$\begin{array}{ccc} 1' & \to & 60'' \\ 0.80' & \to & x \\ x & = & 60\cdot 0.80 = 48'' \end{array}$$

Así obtenemos **30,28º = 30º 16' 48''**

2. Sistema radial

Un ***radián*** representa la medida de un ángulo central de una circunferencia, de modo tal que la longitud del arco comprendido sea igual al radio de la circunferencia y se denota por 1 rad.

El siguiente cuadro muestra la correspondencia entre las longitudes de distintos arcos de circunferencia y sus correspondientes ángulos centrales medidos en radianes.

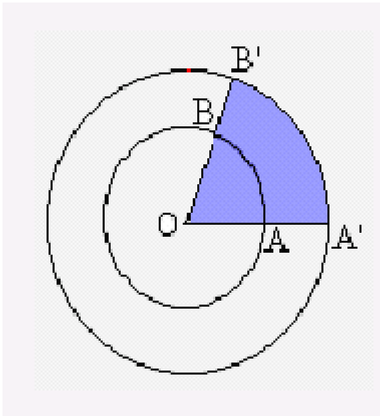


longitud del arco AB = longitud del radio 0A

Longitud del arco		Ángulo central
1 radio	$\leftrightarrow$	1 rad.
2 radios	$\leftrightarrow$	2 rad.
2π radios	$\leftrightarrow$	2π rad.

Se podría llegar a pensar que el valor de un radián depende de la circunferencia elegida para formular la definición. Observemos sin embargo que si el radio de una circunferencia se duplica, su longitud también se duplica.

$$2\,\pi\,(2\,r) = 2\,(2\,\pi\,r)$$

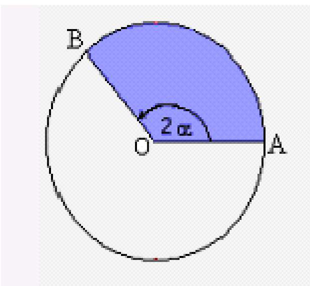


En consecuencia, el arco correspondiente a un ángulo central también se duplica.

Siguiendo este razonamiento, podemos afirmar que nuestra definición no depende de la circunferencia elegida.

3. **Paso de radianes a grados y de grados a radianes**

En símbolos



$$\boxed{360^\circ = 2\,\pi \text{ rad}}$$

Siguiendo la definición, a un ángulo de 2 radianes le corresponderá un arco de circunferencia que mide dos veces el radio.

Longitud del arco	$\leftrightarrow$	Ángulo central
2 radios	$\leftrightarrow$	2 rad.

Como la longitud de la circunferencia es $2\pi r$, el número de radianes de un ángulo de un giro es 2π, ya que es el número de veces que el radio está contenido en la longitud de la circunferencia, es decir,

$$\frac{2\pi r}{r} = 2\pi \ .$$

Longitud del arco	$\leftrightarrow$	Ángulo central
2π radios	$\leftrightarrow$	2π radios

Otras equivalencias entre los dos sistemas son:

$$\boxed{1^{\circ} = \frac{2\ \pi}{360}\text{rad}} \qquad \boxed{1\ \text{rad} = \frac{360}{2\ \pi}}$$

Ejemplos:

- Veamos cuántos radianes son 225º

$$360^{\circ} \ \longrightarrow 2\ \pi\ \text{rad}$$

$$225^{\circ} \ \longrightarrow \frac{2\ \pi\, \text{rad x } 225^{\circ}}{360^{o}} = \frac{5}{4}\ \ \pi\ \ \text{rad}$$

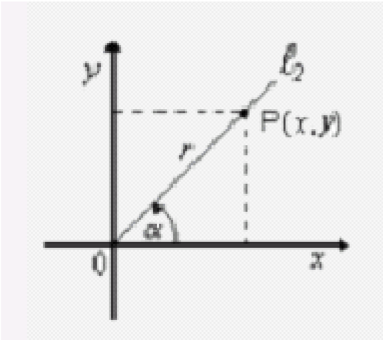
- Veamos cuántos grados son $\frac{\pi}{6}$ radianes

$$2\ \pi\ \text{rad} \longrightarrow 360^{\circ}$$

$$\frac{\pi}{6}\ \text{rad} \longrightarrow \frac{360^{o}\,\frac{\pi}{6}}{2\ \pi} = 30^{\circ}$$

h) Funciones trigonométricas de un ángulo

Si tomamos un ángulo a con lado terminal l_2 y P(x , y) un punto sobre l_2 , la distancia de P al origen es



$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

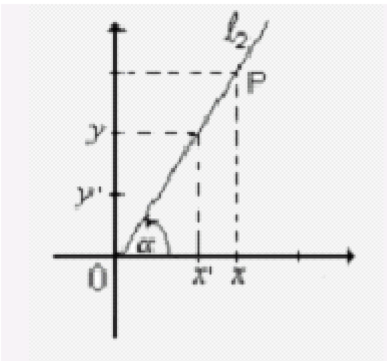
El cociente $\frac{y}{r}$ se llama ***seno de*** α y se denota:

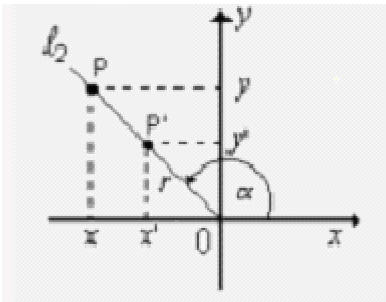
$$\operatorname{sen} \alpha = \frac{y}{r} = \frac{\text{ordenada de P}}{\text{distancia de P al origen}}$$

y el cociente $\frac{x}{r}$ se llama ***coseno de*** α y se denota

$$\cos \alpha = \frac{x}{r} = \frac{\text{abscisa de P}}{\text{distancia de P al origen}}$$

Estos cocientes aparentemente dependen del punto P(x , y) elegido sobre l_2 , pero no es así, pues dependen únicamente del ángulo α. En efecto, si P'(x' , y') es otro punto sobre l_2, observemos las siguientes figuras





$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$r' = \sqrt{x'^2 + y'^2}$$

Como los triángulos rectángulos $X\hat{O}P$ y $X'\hat{O}P'$ donde X = (x , 0) y X' = (x' , 0) son semejantes, los lados son proporcionales, luego:

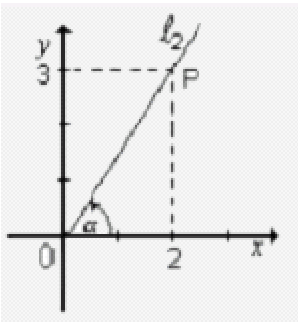
$$\frac{x}{r} = \frac{x'}{r'} \qquad \text{y} \qquad \frac{y}{r} = \frac{y'}{r'}$$

Como cos $\alpha = \frac{x}{r}$ y sen $\alpha = \frac{y}{r}$, las igualdades anteriores muestran que cos α y sen α son independientes del punto elegido sobre la recta.

Las funciones trigonométricas cos α y sen α satisfacen las siguientes relaciones:

$$-1 \leq \text{sen}\,\alpha \leq 1 \quad , \quad -1 \leq \cos\alpha \leq 1$$

$$\boxed{\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1}$$

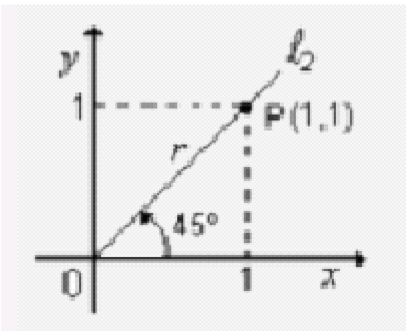


Ejemplo: Sea a el ángulo cuyo lado terminal l_2 pasa por P(2 , 3). Entonces:

$$r = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13}$$

$$\text{sen}\,\alpha = \frac{3}{\sqrt{13}} \quad , \quad \cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{13}}$$

En este ejemplo se han calculado las funciones trigonométricas de un ángulo cuya medida no se conoce. Ahora veremos cómo se pueden calcular los valores de las funciones trigonométricas para los ángulos de 45º y 60º.



Ángulo de 45º.

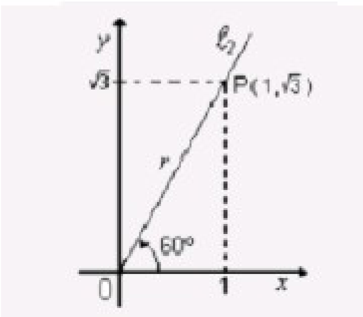
Como

$$r = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

entonces

$$\text{sen}\,45º = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos 45º = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$



Ángulo de 60º

Como

$$r = \sqrt{1^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{4} = 2,$$

entonces

$$\text{sen } 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$$

A partir de las funciones seno y coseno es posible obtener una nueva función llamada la **tangente**

$$\boxed{\text{tg } \alpha = \frac{\text{sen } \alpha}{\cos \alpha}}$$

O sea

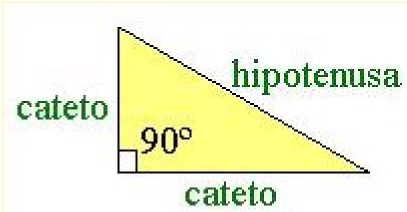
$$\text{tg } \alpha = \frac{\text{sen } \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\frac{y}{r}}{\frac{x}{r}} = \frac{y}{x} = \frac{\text{ordenada de P}}{\text{abscisa de P}}$$

Observa: como no se puede dividir por cero, debemos excluir la tangente de los ángulos de 90º y 270º.

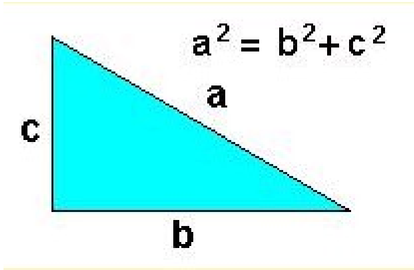
i) Teorema de Pitágoras

En primer lugar deberíamos recordar un par de ideas:

18. La suma de los tres ángulos internos de un triángulo suman 180º.
19. Un ***triángulo rectángulo*** es un triángulo que tiene un ángulo recto, es decir de 90º.
20. En un triángulo rectángulo, el lado más grande recibe el nombre de ***hipotenusa*** y los otros dos lados se llaman ***catetos.***



Teorema de Pitágoras.-***En un triángulo rectángulo, el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos.***

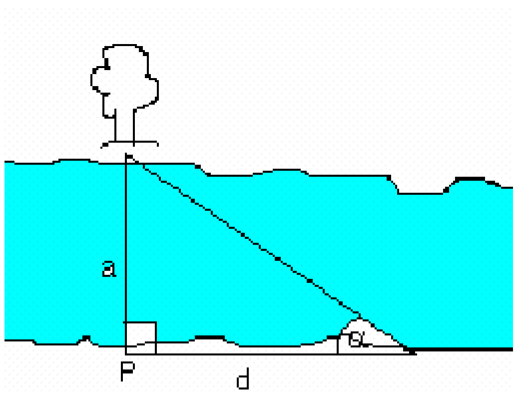


j) Problemas sobre resolución de triángulos rectángulos

Ejemplo 1:*¿Cómo podremos medir el ancho de un río sin cruzarlo?*

Tenemos aparatos para medir distancias y para medir ángulos pero no podemos cruzar el río.

Además la orilla es escarpada y sólo es posible moverse perpendicularmente al río, donde hay un camino. ¿Cómo medir el ancho del río?



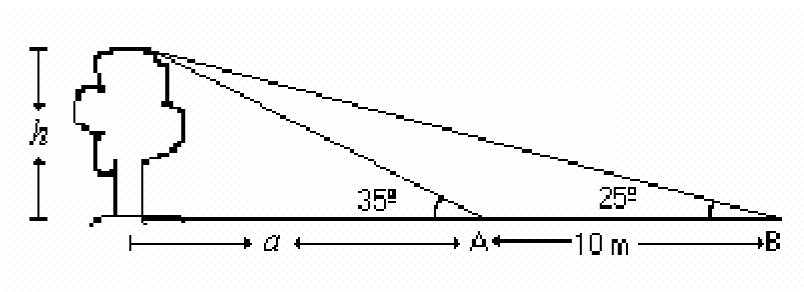
En primer lugar, debemos situarnos frente a algún objeto ubicado en la orilla opuesta que nos sirva de referencia. Desde allí nos movemos a lo largo de la orilla y en dirección perpendicular al árbol una distancia *d*, como muestra la figura. Desde este punto *P* medimos el ángulo a que forma la dirección al árbol con el camino que acabamos de recorrer. Para fijar ideas, supongamos que *d* = 100m. y α = 24º. Como

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{d} = \frac{a}{100}$$

entonces a = 100 tg 24º =100·0,4452 ≅ 44,52 m.

Ejemplo: *Un árbol y un observador se encuentran en orillas opuestas de un río. El observador mide el ángulo que forma su visual con el punto más alto del árbol y obtiene 35 º; retrocede 10 m. y mide el nuevo ángulo, obteniendo un valor de 25 º . ¿Qué altura tiene el árbol?, y ¿ cuál es el ancho del río?*

Llamando *h* a la altura del árbol y *a* el ancho del río, el gráfico muestra los datos del problema



$$\text{tg } 35^{\circ} = \frac{h}{a}$$

$$\text{tg } 25^{\circ} = \frac{h}{a+100}$$

Despejando la variable *h*

$$h = a \text{ tg}35^{\circ}$$

$$h = (a + 100) \text{ tg}25^{\circ}$$

Igualando ambas ecuaciones

$$a \text{ tg}35^{\circ} = a \text{ tg}25^{\circ} + 100 \text{ tg}25^{\circ}$$

$$a \text{ (tg}35^{\circ} \text{ - tg}25^{\circ}) = 100 \text{ tg}25^{\circ}$$

$$a = \frac{100 \text{ tg}25^{\circ}}{\text{tg}35^{\circ} - \text{tg}25^{\circ}} \approx 199{,}36 \text{ m.}$$

Reemplazando en alguna de las ecuaciones anteriores

$$h = a \text{ tg}35^{\circ} \approx 139{,}59 \text{ m.}$$

5. RESUMEN

$$\boxed{360^{\circ} = 2\ \pi \text{ rad}}$$

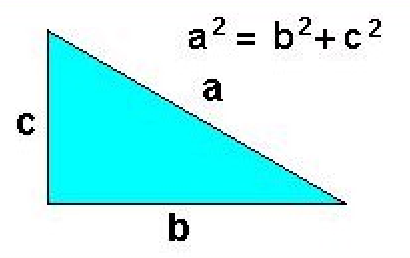
$$\boxed{1^{\circ} = \frac{2\ \pi}{360} \text{rad}} \qquad \boxed{1 \text{ rad} = \frac{360}{2\,\pi}}$$

$$\boxed{\operatorname{sen}\alpha = \frac{y}{r} = \frac{\text{ordenada de P}}{\text{distancia de P al origen}}}$$

$$\boxed{\cos\alpha = \frac{x}{r} = \frac{\text{abscisa de P}}{\text{distancia de P al origen}}}$$

$-1 \leq \operatorname{sen}\alpha \leq 1 \quad , \quad -1 \leq \cos\alpha \leq 1$	$\boxed{\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1}$
$\boxed{\operatorname{tg}\alpha = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}}$	**Observa:** como no se puede dividir por cero, debemos excluir la tangente de los ángulos de 90º y 270º.

Teorema de Pitágoras.-*En un triángulo rectángulo, el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos.*



7. ACTIVIDADES

- ¿A qué cuadrante pertenecen los siguientes ángulos?

  300º, 192º, 93º, 180º 1', 150º, 35º

- Suponiendo que a es la hipotenusa, b y c los catetos de un triángulo rectángulo. Encontrar lo que se pide:

  1).- a = ? si b = 5 c = 8

  2).- b = ? si a =3 c = 10

  3).- c = ? si a = 10 b = 15

  4).- a = ? si b = 7 c = 9

5).- b = ? si a = 6 c = 10

- Expresar en grados, minutos y segundos los ángulos que miden 23,18º , 107,03º
- Calcular sen α , cos α y tg α en los siguientes casos.

  a) b = 5 ; c = 3.

  b) a = 10 ; b = 6.
- Hallar el área de un triángulo rectángulo en el cual un ángulo mide 30º y la hipotenusa mide 4.
- Hallar los ángulos del triángulo rectángulo cuyos catetos miden 30 y 35.
- En un triángulo sabemos que la hipotenusa mide 4 cm y la tangente del ángulo que esta determina con la base es igual a 0,2. Calcular el área de dicho triángulo.
- Un poste de teléfono está sujeto por medio de varios cables que parten del extremo superior. Uno de estos cables está atado a una estaca situada a 5 m del pie del poste y forma con la horizontal un ángulo de 60º. Calcular la altura del poste y la longitud del cable.
- En un triángulo isósceles la altura correspondiente a la base mide el doble que esta. Hallar el valor de sus ángulos.

- Un árbol y un observador se encuentran en orillas opuestas de un río. El observador mide el ángulo que forma su visual con el punto más alto del árbol y obtiene 35º; retrocede 10 metros y mide el nuevo ángulo, obteniendo un resultado de 25º. ¿Qué altura tiene el árbol?.

11. Si los dos catetos de un triángulo rectángulo valen 20 cm. y 25 cm., respectivamente, calcular el valor de la hipotenusa y de los ángulos del triángulo.

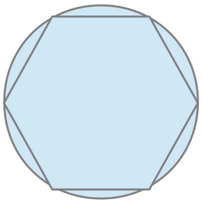
12. Si en un triángulo rectángulo un ángulo vale 60º y su lado opuesto 15 cm., obtenerlos demás elementos del triángulo.

13. Hallar el área de un triángulo rectángulo en el que uno de los catetos vale 10 cm. y su ángulo opuesto 50º.

8. El ángulo que forma la visual de un observador desde un punto determinado con el punto más alto de un poste es de 40º. Si se aleja del poste en línea recta 5 m. el ángulo pasa a ser de 25º. ¿A qué distancia del poste se encontraba el observador al principio

9. Calcular los lados iguales de un triángulo isósceles cuyo lado desigual mide 20 cmy su ángulo opuesto 30º. Hallar el área del triángulo.

10. Hallar el área hexágono y octógono de radio 10 m.

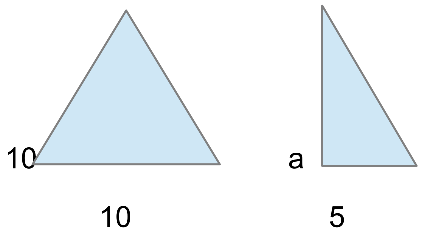


Área del polígono regular es =(per·apt)/2

Hexágono=(6.L·apt)/2

Octónogo=(8.L·apt)/2

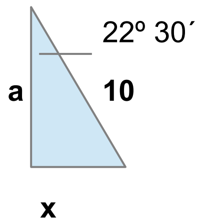
En el hexágono el lado coincide con el radio.



tan 60º =a/5   1,73=a/5   1,73·5=8,65 m=apotema

Área=6·10·8,65/2=259,8 m^2

En el octógono Per=8 lados

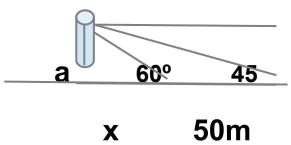


cos 22º30´=a/10=0,923=a/10   9,23 m=a

tan 22º30´=x/a=x/9,23 =0,41   x=0,41·9,23=3,78 m   lado 2·3,78=7,56 m

Área=8·7,56·9,23/2=279,04 m^2

17º Desde dos punto distanciados 50 m en la misma orilla del rio se observa un ángulo bajo dos visuales de 45º y 60º .¿Cual es la anchura del rio?



tan 60=a/x   1,73=a/x

tan 45=a/(x+50)   1=a/(x+50)

a=1,73x

a=x+50   1,73x=x+50   0,73x=50   x=68,5 m

a=1,73· 68,5=118,5 m

8.EJERCICIOS DE AUTOCOMPROBACIÓN

- Suponiendo que a es la hipotenusa, b y c los catetos de un triángulo rectángulo. Encontrar lo que se pide

  18. c = ? si a = 13 b = 10

  19. a = ? si b =2 c = 10

  20. b = ? si a = 5 c = 15

- En un triángulo rectángulo, un ángulo mide 60º y el cateto opuesto mide 3. Hallar su perímetro.
- Calcular la altura de un triángulo isósceles cuyo lado desigual es de 4 metros y el ángulo opuesto es de 60º.

9. SOLUCIONES A LOS EJERCICIOS DE AUTOEVALUACIÓN

5. c= $\sqrt{69}$, a= $\sqrt{96}$, b= $\sqrt{200}$

6. $3\left(1+\sqrt{3}\right)$

3. $2\sqrt{3}$

BIBLIOGRAFÍA

1. Emilio Bujalance y otros. Matemáticas especiales. Editorial Sanz y Torres (1998). 2ª Edición
2. María E. Ballvé y otros. Problemas de matemáticas especiales. Editorial Sanz y Torres (1996). 2ª Edición.
3. José T. Pérez Romero y José A. Jaramillo Sánchez. Matemáticas. Pruebas de acceso a la universidad para mayores de 25 años. Editorial MAD. (2002).
4. http://descartes.cnice.mecd.es/
5. http:www.uoc.edu

6

Geometría

Tema 6

Geometría

1. ÍNDICE

- **Sistemas de referencia y coordenadas puntuales**
- **Distancia entre dos puntos del plano**
- **Coordenadas del punto medio de un segmento**
- **La recta en el plano**
- **Pendiente de la recta**
- **Distintas formas de la ecuación de la recta**
- **Ecuación de la recta conocidos un punto y la pendiente**
- **Ecuación de la recta conocidos dos puntos**
- **Posiciones relativas de dos rectas en el plano**
- **Distancia de un punto a una recta**
- **Distancia entre dos rectas paralelas**

2. INTRODUCCIÓN GENERAL A LA UNIDAD Y ORIENTACIONES PARA EL ESTUDIO

En esta unidad didáctica vamos a introducir la representación gráfica de puntos y rectas en el plano, utilizando como sistema de referencia los ejes cartesianos. Conoceremos las distintas formas de expresar algebraicamente una recta, el concepto de pendiente de una recta, así como, calcular la ecuación de la recta conocido un punto y la pendiente ó conocidos dos puntos. Dadas dos rectas, aprenderemos a conocer sus posiciones relativas, es decir, si son parelelas, coincidentes, si se cortan y en este caso saber si son ó no perpendiculares. Finalmente, también introducimos las fórmulas para calcular la distancia entre dos puntos, un punto y una recta y dos rectas paralelas.

3. OBJETIVOS ESPECÍFICOS

21. Saber representar puntos en el plano
22. Saber representar rectas en el plano
23. Entender el concepto de pendiente de una recta
24. Conocer las distintas formas de representar una recta

25. Saber calcular la ecuación algebraica de la recta a partir de la representación gráfica, dados dos puntos ó un punto y la pendiente

26. Saber calcular la distancia entre dos puntos, entre un punto y una recta y, entre dos rectas paralelas.

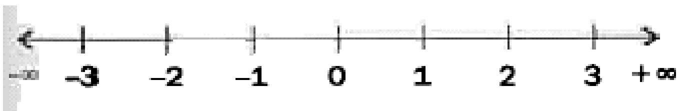
4. DESARROLLO DE LOS CONTENIDOS

22. **Sistemas de referencia y coordenadas puntuales**

Los ejes coordenados son dos rectas perpendiculares donde se representan conjuntos numéricos (en general representaremos números reales).

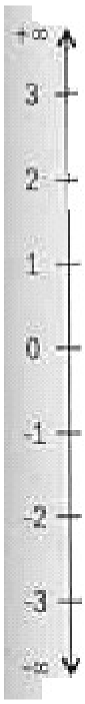
El **eje horizontal** se denomina **eje de abscisas** (eje de las x) y es una recta que tiene un origen en el punto O, el cual determina dos semirrectas, de las que una es positiva (a la derecha de O) y otra negativa (a la izquierda de O).

A cada punto de la recta le corresponde un número



El **eje vertical** se denomina **eje de ordenadas** (eje de las y) y es una recta que tiene un origen en el punto O, el cual determina dos semirrectas; una positiva (del origen hacia arriba) y otra negativa (del origen hacia abajo).

A cada punto de la recta le corresponde un número.



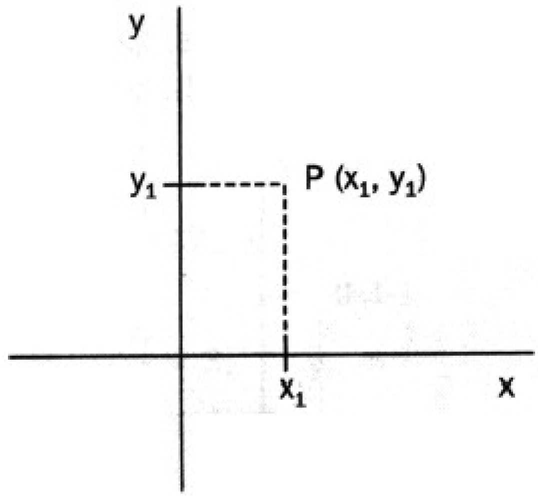
Cuando se consideran los dos ejes conjuntamente estamos ante un sistema de coordenadas cartesianas. Dicho sistema permite representar puntos en el plano.

Cada punto del plano viene determinado por un par de valores ordenados (el primero de abscisas y el segundo de ordenadas).

Para representar un punto en el plano tomamos el valor de la abscisas y levantamos un segmento perpendicular con la medida de la ordenada.

El **plano cartesiano** es el conjunto formado por todos los pares ordenados de números reales. Dicho plano se representa por el símbolo RxR, o por su equivalente R^2.

$$R^2 = \{(x, y) \ / x, y \in R\}$$



Un sistema de ejes cartesianos determina cuatro cuadrantes (ángulos en el plano).

Como se puede observar en la figura, según en qué cuadrante esté situado el punto, los signos de los valores de abscisas y ordenadas serán distintos.

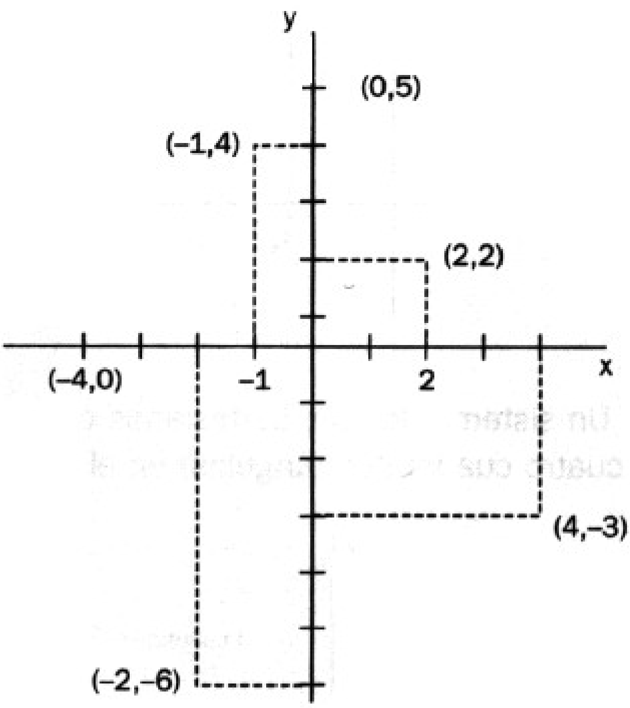
Un sistema de ejes cartesianos permite, por tanto:

a) Dada una serie de pares de valores ordenados, representar los puntos correspondientes en el plano.

b) Dada una serie de puntos representados en el plano determinar una serie de pares de valores correspondientes.

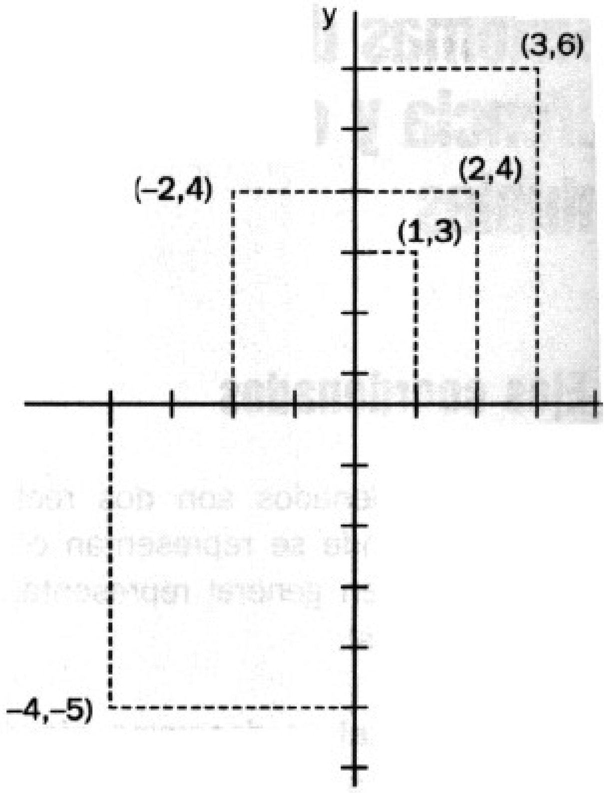
Ejemplos:

1. Representar los puntos: (2,2), (-1,4), (-4,0), (0,5), (4,-3), (-2,-6)

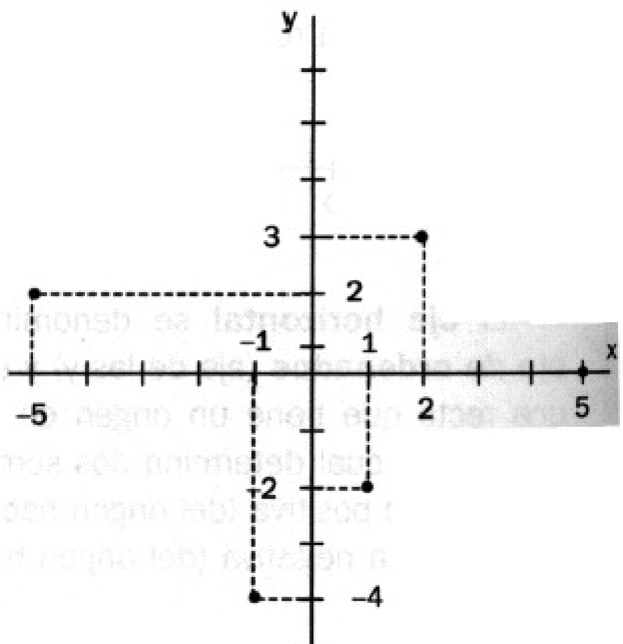


23. Dada la siguiente tabla de valores, representar los puntos.

x	1	2	3	-2	-4
y	3	4	6	4	-5



24. Dada la siguiente gráfica, escribir los pares de valores correspondientes y formar una tabla con ellos.



(–5, 2), (–1, –4), (1, –2), (2, 3),

- **Distancia entre dos puntos del plano**

Sean (x_1, y_1), (x_2, y_2) dos puntos del plano cartesiano. Su distancia viene determnada por la expresión:

$$dist[(x_1, y_1),(x_2, y_2)] = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

Ejemplo:

Hallar la distancia entre los puntos (2,3) y (6,7).

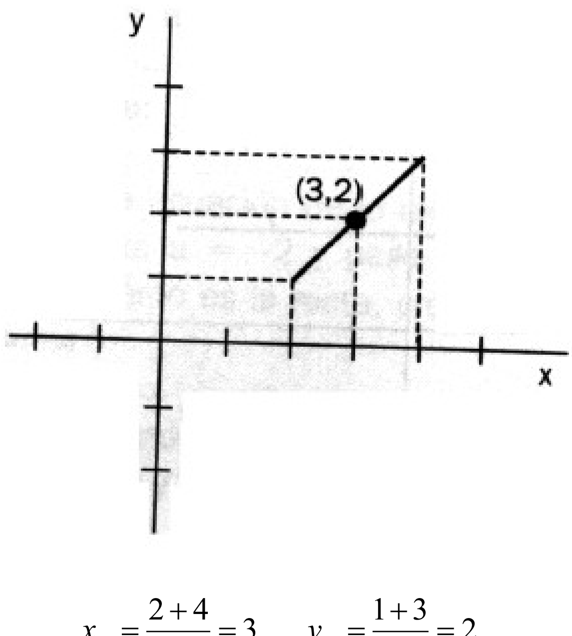
$$dist[(2,3),(6,7)] = \sqrt{(2-6)^2 + (3-7)^2} = \sqrt{4^2 + 4^2} = \sqrt{32}$$

3. **Coordenadas del punto medio de un segmento**

Las coordenadas del punto medio de un segmento (x_m, y_m) cuyos extremos vienen dados por los puntos (x_1, y_1), (x_2, y_2) son:

$$x_m = \frac{x_1 + x_2}{2} \qquad y_m = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

Ejemplo: Hallar las coordenadas del punto medio del segmento cuyos extremos son: (2,1) y (4,3)

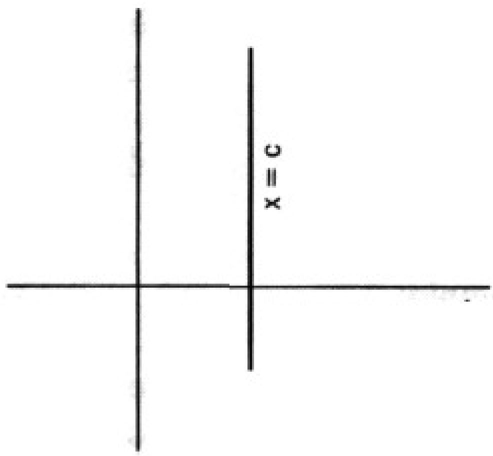


$$x_m = \frac{2+4}{2} = 3 \qquad y_m = \frac{1+3}{2} = 2$$

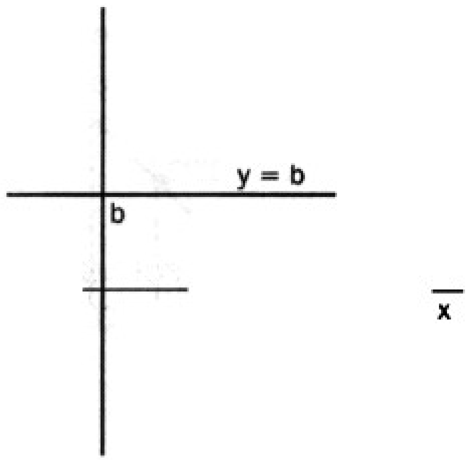
es decir, el punto medio tiene de coordenadas (3,2).

25. **La recta en el plano**

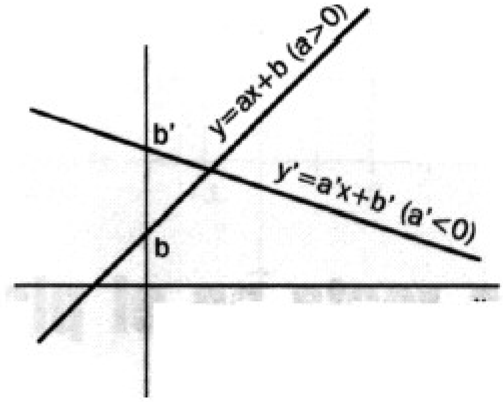
Una recta en el plano puede ser vertical, horizontal u oblicua. Las rectas **verticales** tienen una ecuación de la forma x=cte.



Las rectas **horizontales** tienen una ecuación de la forma y=cte.

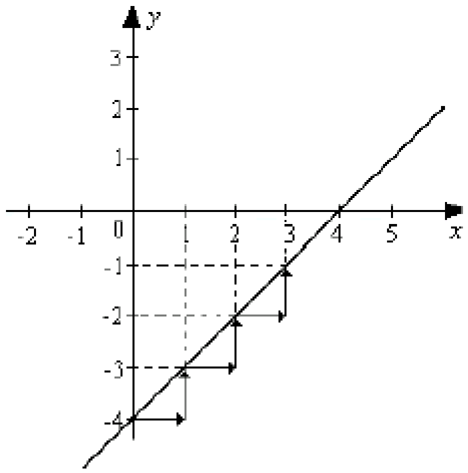


Las rectas oblicuas tienen como ecuación: y=ax+b ($a \neq 0$).

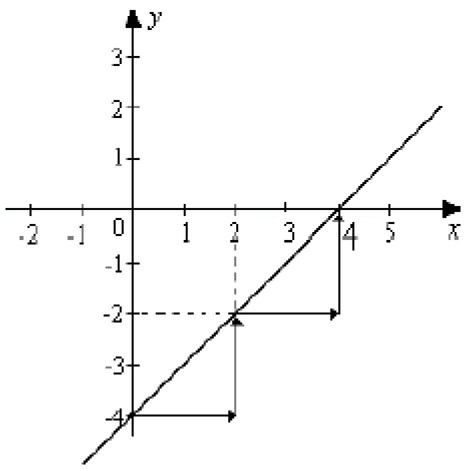


26. **Pendiente de la recta**

a) y=x-4



Cuando la abscisa aumenta 1 unidad, la ordenada también aumenta 1 unidad.

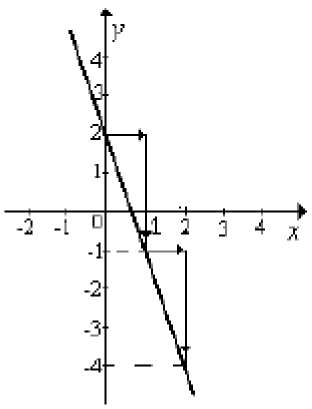


Si la abscisa aumenta 2 unidades, la ordenada aumenta 2 unidades.

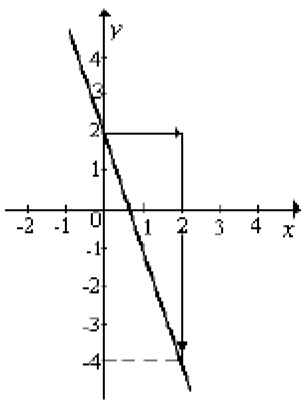
$$\frac{1}{1}=\frac{2}{2}=\frac{3}{3}=1=m$$

Observemos que los cocientes entre la *variación* de la ordenada y la *variación* de la abscisa son constantes e iguales al valor de la pendiente.

b) ***y*** **= - 3** ***x*** **+2**



Cuando la abscisa aumenta 1 unidad, la ordenada disminuye 3 unidades.

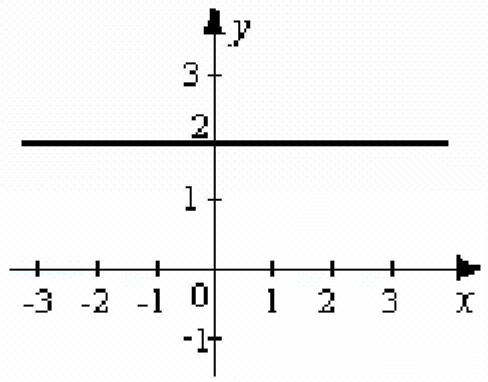


Si la abscisa aumenta 2 unidades, la ordenada disminuye 6 unidades.

$$\frac{-3}{1}=\frac{-6}{2}=\frac{-9}{3}=....=-3=m$$

Nuevamente observamos que los cocientes entre la *variación* de la ordenada y la *variación* de la abscisa son constantes e iguales al valor de la pendiente.

c) $y = 2$



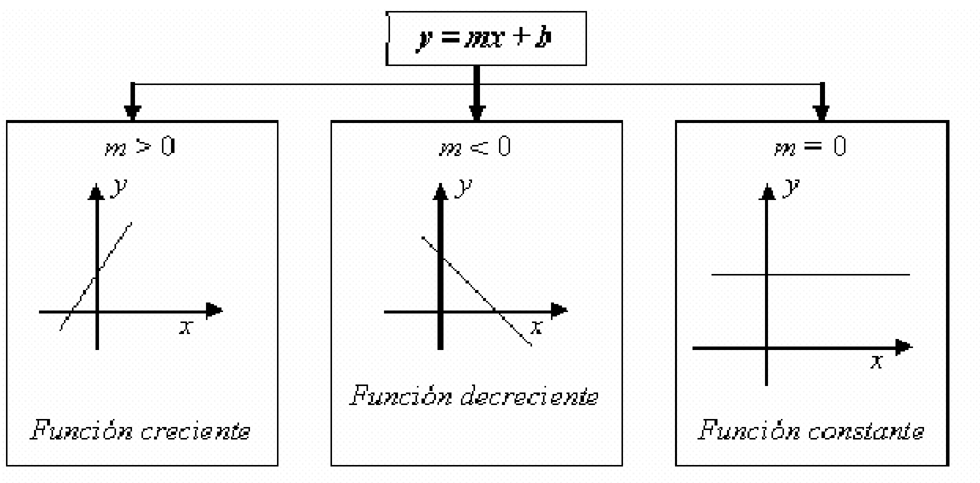
Cuando la abscisa aumenta 1 unidad, la ordenada no aumenta ni disminuye.

Lo mismo ocurre cuando la abscisa aumenta 2, 3, o más unidades.

$$\frac{0}{1} = \frac{0}{2} = \frac{0}{3} = 0 = m$$

En este ejemplo resulta que los cocientes entre la *variación* de la ordenada y la *variación* de la abscisa son constantes e iguales a 0, el valor de la pendiente es *m*.

En el siguiente cuadro se clasifican las rectas según el valor de la pendiente:



Resumiendo

✓ La ***pendiente*** está determinada por el cociente entre la *variación* de *y* y la *variación* de *x*.

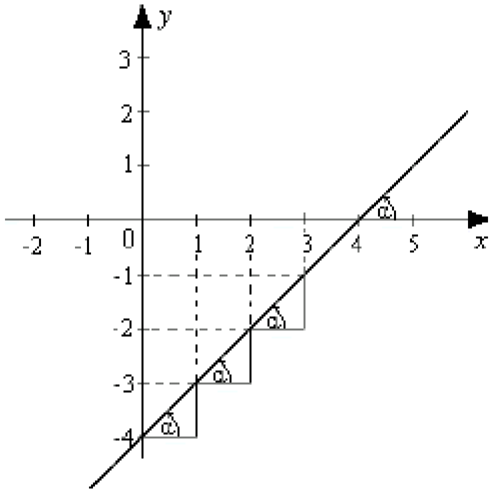
✓ La ***pendiente*** *m* mide la inclinación de la recta respecto del eje *x*. Podemos hallar entonces, a partir de la pendiente, el ángulo α que forma dicha recta con el eje *x* teniendo en cuenta que:

el ángulo de inclinación α*, se mide en sentido contrario a las agujas del reloj, a partir de la dirección positiva del eje x.*

Nota: La función tangente, utilizada en la expresión: $m = tg\alpha$, se estudiará junto con las demás funciones trigonométricas, con más detalle en un próximo capítulo.

Retomando los ejemplos anteriores:

a) $\boldsymbol{y = x - 4}$



$y = x - 4$

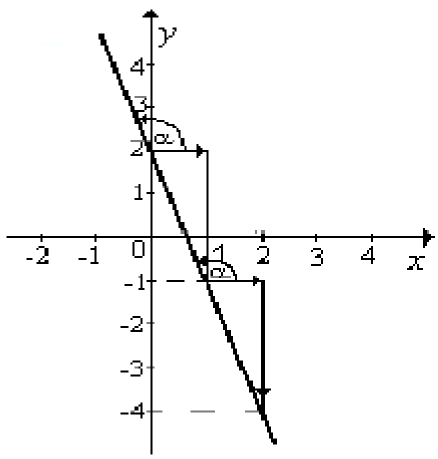
En este ejemplo

$$m = \frac{1}{1} = \text{tg } \alpha$$

Entonces

$$\alpha = 45^{o}$$

b) $\boldsymbol{y = -3\,x + 2}$



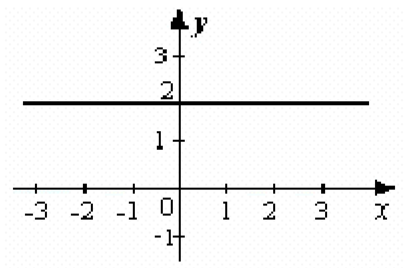
$$m = \frac{-3}{1} = \operatorname{tg} \alpha$$

Entonces

$$\alpha = 108^{o}\ 26'\ 5{,}82''$$

Nota: La función tangente, utilizada en la expresión: *m* = *tg a*, se estudiará junto con las demás funciones trigonométricas, con más detalle en la unidad 6.

c) $\boldsymbol{y = 2}$



$$m = \frac{0}{2} = \operatorname{tg} \alpha$$

entonces

$$\alpha = 0^{o}$$

Retomando los ejemplos anteriores:

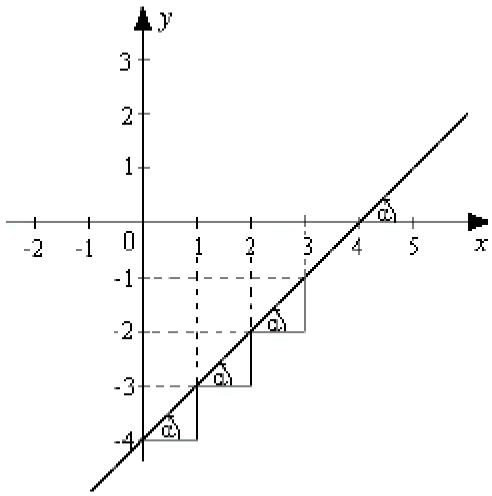
Recuerda: el ángulo de inclinación α , se mide en sentido contrario a las agujas del reloj, a partir de la dirección positiva del eje *x*.

a) $y = x - 4$ en este ejemplo

$$m = \frac{1}{1} = \operatorname{tg} \alpha$$

entonces

$$\alpha = 45^{o}$$



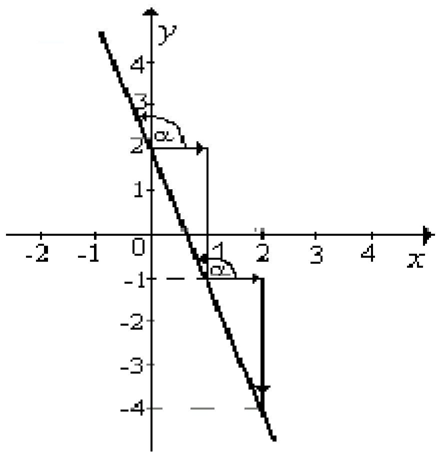
$y = x - 4$

b) $y = -3\,x + 2$

$$m = \frac{-3}{1} = \text{tg } \alpha$$

entonces

$$\alpha = 108º\ 26'\ 5{,}82''$$

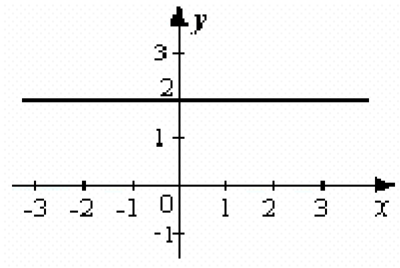


c) $y = 2$

$$m = \frac{0}{2} = \text{tg } \alpha$$

entonces

$$\alpha = 0º$$



27. Distintas formas de la ecuación de la recta

La ecuación de una recta en el plano se puede expresar de distintas formas, entre las cuales consideramos las siguientes:

1. **Forma explícita de la recta.**

$$y = mx + n \text{ ,}$$

donde $m, n \in \mathbb{R}$ son constantes.

Ejemplo:

$$y = \frac{2}{3}x + \frac{8}{3}$$

2. **Forma implícita de la recta**

$$a\,x + b\,y + c = 0$$

a , b , $c \in \mathbb{R}$ constantes.

Ejemplo: la misma recta del ejemplo anterior se puede escribir como

$$2\,x - 3\,y + 8 = 0.$$

Observemos que si

$$b = 0 \;\text{ y } a \neq 0,$$

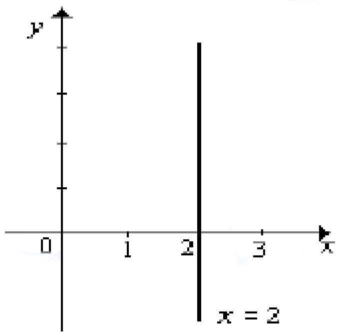
la ecuación implícita de la recta se reduce a

$$a\,x + c = 0,$$

que representa a la recta paralela al eje y.

$$x = -\frac{c}{a}$$

por ejemplo: x = 2 es la ecuación de la recta vertical cuyo gráfico es:



28. **Ecuación de la recta conocidos un punto y la pendiente**

Si conocemos la pendiente (m) y un punto de la recta (x_1,y_1), la ecuación de la recta (también llamada ecuación punto pendiente de la recta) es la siguiente:

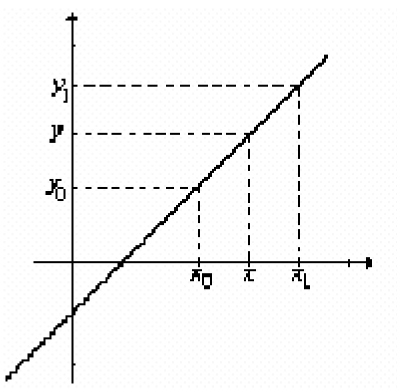
$$y-y_1=m(x-x_1)$$

Ejemplo: Hallar la ecuación de la recta que tiene de pendiente m=-2 y pase por el punto (-3,1). ¿Cómo es la recta creciente o decreciente?.

Sustituyendo los valores en $y-y_1=m(x-x_1)$ tenemos $y-1=-2(x+3)$; $y=1-2(x+3)=1-2x-6$; es decir, $Y=-2x-5$. Como la pendiente m=-2 es menor que cero, la recta es decreciente.

29. **Ecuación de la recta conocidos dos puntos**

Si tenemos como datos dos puntos (x_0, y_0), (x_1, y_1) pertenecientes a una recta, podemos construir la ecuación de la misma.
Observemos que su pendiente es:



$$m = \frac{y-y_0}{x-x_0} = \frac{y_1-y_0}{x_1-x_0}$$

Sabemos que la ecuación punto pendiente del apartado anterior es $y-y_1=m(x-x_1)$

Sustituyendo tenemos:

$$y-y_0=\frac{y_1-y_0}{x_1-x_0}(x-x_0)$$

que es la expresión de la ecuación de la recta que pasa por dos puntos.

Ejemplo: Hallar la ecuación de la recta que pasa por los puntos (2,3) y (1,5). Determinar si es creciente o decreciente.

$x_0=2 \quad y_0=3$
$x_1=1 \quad y_1=5$

$$y-3=\frac{5-3}{1-2}(x-2) \qquad y-3=\frac{2}{-1}(x-2)$$

$$y-3=-2(x-2) \quad y=-2x+7$$

La recta es decreciente ya que la pendiente m=-2 es negativa.

30. **Posiciones de dos rectas en el plano**

Dos rectas en el plano pueden: ser coincidentes, ser paralelas o cortarse en un punto.
En este último caso pueden ser perpendiculares.

1. **Condiciones de paralelismo y perpendicularidad a partir de la ecuación implícita de la recta**

   Dadas dos rectas en forma implícita

$$\left.\begin{array}{l} Ax+By+C=0 \\ A'x+B'y+C'=0 \end{array}\right\}$$

- **Son paralelas si**

$$\frac{A}{A'}=\frac{B}{B'}\neq\frac{C}{C'}$$

Ejemplo:

$$\left.\begin{array}{l} 2x+3y=-4 \\ 6x+9y=2 \end{array}\right\} \frac{2}{6}=\frac{3}{9}\neq-\frac{4}{2}$$

- **Son coincidentes si**

$$\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = \frac{C}{C'}$$

Ejemplo:

$$\left.\begin{array}{l} x + y = 2 \\ 4x + 4y = 8 \end{array}\right\} \frac{1}{4} = \frac{1}{4} = \frac{2}{8}$$

- **Se cortan en un punto si**

$$\frac{A}{A'} \neq \frac{B}{B'}$$

Ejemplo:

$$\left.\begin{array}{l} x + y = 5 \\ 2x + 5y = 19 \end{array}\right\} \frac{1}{2} \neq \frac{1}{5}$$

En este caso pueden ser perpendiculares si

$$-A \cdot A' = B \cdot B'$$

Ejemplo:

$$\left.\begin{array}{l} 2x + 3y = 7 \\ -3x + 2y = 1 \end{array}\right\} -(2)(-3) = (2) \cdot (3)$$

2. **Condiciones de paralelismo y perpendicularidad utilizando las pendientes**

Dos rectas son paralelas si tienen la misma pendiente

$$\left.\begin{array}{l} y = ax + b \\ y' = a'x + b' \end{array}\right\} \text{son paralelas si } a = a'$$

Ejemplo:

$$\left.\begin{array}{l} y = 4x - 5 \\ y = 4x + 7 \end{array}\right\} 4 = 4$$

- **Dos rectas son perpendiculares si** $a = -\frac{1}{a}$

Ejemplo:

$$\left.\begin{array}{l} y = 3x + 9 \\ y = -\frac{1}{3}x + 7 \end{array}\right\} 3 = -\left(\frac{1}{-\frac{1}{3}}\right)$$

31. **Distancia de un punto a una recta**

Sea un punto del plano **P(x_0, y_0)** y una recta dada en forma implícita

$$r \equiv Ax + By + C = 0$$

La distancia del punto **P** a la recta **r** viene dada por la expresión

$$d\,(P,r) = \left|\frac{Ax_0 + By_0 + C}{\sqrt{A^2 + B^2}}\right|$$

Recuerda: que siempre hay que considerar el valor absoluto

Ejemplo:

Hallar la distancia del punto $P(2_1\ -1)$ a la recta $2x - 3y + 1 = 0$

$$d\,(P,r) = \left|\frac{2(2) - 3(-1) + 1}{\sqrt{2^2 + 3^2}}\right| =$$

$$= \left|\frac{8}{\sqrt{13}}\right| = \frac{8}{\sqrt{13}} \text{ Unidades}$$

32. **Distancia entre dos rectas paralelas**

Para hallar la distancia entre dos rectas paralelas se considera un punto cualquiera **P ,** de una de ellas y se calcula la distancia a la otra recta.

$$d(r,r') = d(P,r'),\ \forall\ P \in r$$

Ejemplo: calcular la distancia entre las rectas

$$r \equiv 3x - 4y + 4 = 0$$
$$\text{y}$$
$$r' \equiv 9x - 12y - 4 = 0$$

En primer lugar comprobamos si r y r' son paralelas. Como sabemos la condición de paralelismo cuando tenemos las rectas expresadas con su ecuación implícita viene dada por

$$\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} \neq \frac{C}{C'} \qquad \frac{3}{9} = \frac{4}{12} \neq \frac{-4}{4}$$

Tomamos un punto cualquiera de r

$$x = 0 \Rightarrow 3(0) - 4y = -4;$$
$$-4y = -4;\ y = 1$$

El punto elegido es, por tanto (0,1). Ahora aplicamos la fórmula d(r,r')

$$d(r,r') = d(P,r') =$$

$$= \left|\frac{9(0) - 12(1) - 4}{\sqrt{9^2 + 12^2}}\right| = \left|\frac{-16}{15}\right| = \frac{16}{15} \text{ unidades}$$

7. ACTIVIDADES

h) Representa gráficamente las siguientes rectas

a) $y = -4x + 1$

b) $y = -5$

c) $x + y = 0$

d) $\dfrac{x}{\frac{2}{3}} + \dfrac{y}{\frac{3}{4}} = 1$

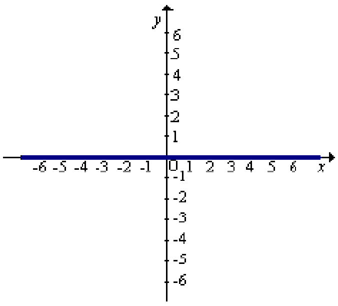
e) $3x - 2y + 1 = 0$

f) $\dfrac{x}{2} + \dfrac{y}{-3} = 1$

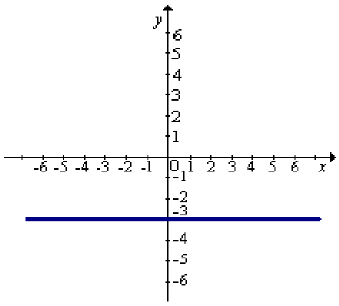
g) $x = -3$

i) Dar la expresión en forma punto pendiente las rectas graficadas a continuación

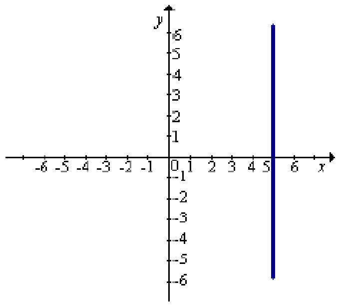
a)



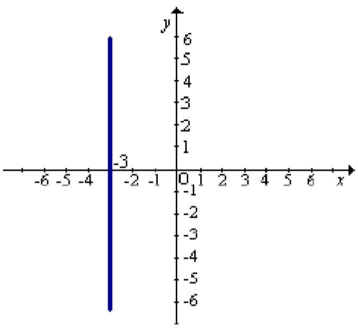
b)



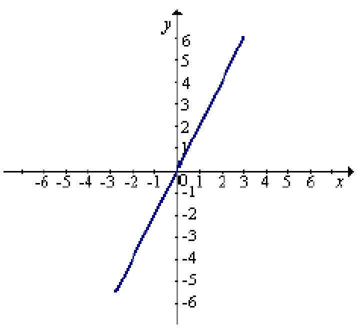
c)



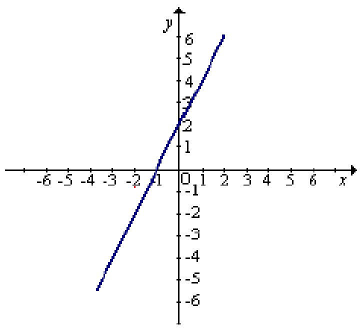
d)



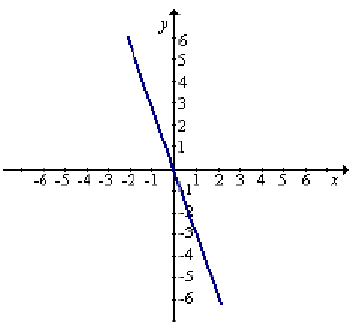
e)



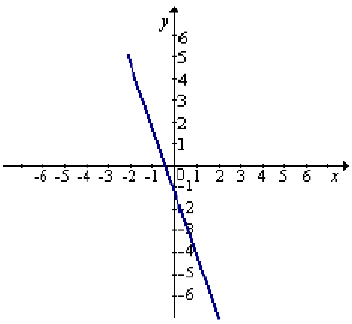
f)



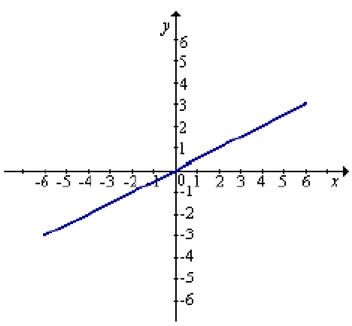
g)



h)



i)



j) Hallar el valor de k en las siguientes ecuaciones a fin de que cada recta pase por el punto indicado:

a) $4x + 3y - k = 0$ A (1 , -2) b) $-k\,x + \frac{y}{2} - 1 = 0$ B (3 , 0)

k) **¿Cuánto debe valer un número real k para que el punto (-1 , 2) se encuentre en la recta k x +7 y - 7 = 0 ?. Graficar.**

l) Escribir la ecuación de la recta que pasa por los puntos:

a) (-2 , -1) y (-4 , -3) b) (3 , 5) y (7 , -2)

c) (6 , -1) y (-2 , 4) d) (1 , -5) y (10 , 11)

m) **Averiguar si los puntos (0 , 2) , (1 , -1) y (-1 , 5) están alineados.**

n) **Hallar la ecuación de la recta que tiene pendiente 5 y pasa por el punto P (-1 , -2).**

o) **Hallar la ecuación de la recta que tiene pendiente** $-\frac{1}{2}$ **y pasa por el punto P (-4 , 7).**

p) **Halla la ecuación de la recta que pasa por el punto (-1,1) y es paralela a la recta que tiene de ecuación y=x+1.**

q) **Halla la ecuación de la recta que pasa por el punto (0,1) y es perpendicular a la recta -3x+2x+1=0.**

r) **Hallar la distancia entre los puntos (1,0) y (-3,4).**

s) **Hallar la distancia entre las rectas 2x-3y=3 y 6x-9y=4.**

MAS EJERCICIOS

(1).- Representa en una gráfica los puntos P1 (2,3), P2 (5,2), P3 (-2,-3), P4 (1,-3), P5 (-4, 2) , P6 (0,1),P7 (-3,0), P8 (0,0)

(2).- Halla la tabla de valores y dibuja la gráfica de la ecuación de la recta x = 2y

(3).- Halla la tabla de valores y dibuja la gráfica de la ecuación de la recta 2x – y = 1

(4).- Halla la tabla de valores y dibuja la gráfica de la ecuación de la recta - x – y = -1

(5).- Halla la tabla de valores y dibuja en una misma gráfica las ecuaciones de las rectas. Saca alguna conclusión una vez dibujadas
x + y = 2
x + y = 4
x + y = 5

(6).- Halla la tabla de valores y dibuja en una misma gráfica las ecuaciones de las rectas. Saca alguna conclusión una vez dibujadas
x - y = 2
x - 2y = 2

x - 6y = 2

(7).- Halla gráficamente el valor de la x e y en el sistema de ecuaciones
x + 2y = 16
x - y = 1

(8).- Halla gráficamente el valor de la x e y en el sistema de ecuaciones
2x + 3y = 35
2x - y = 15

(9).- Halla gráficamente el valor de la x e y en el sistema de ecuaciones
x + y = 5
2x - 3y = 5

(10).- Hallar la distancia entre los puntos (3,5) y (1,4)

(11).- Hallar la distancia entre el punto (-3,4) y la recta 2x + 3y =4

(12).- Calcula el valor de a para que la distancia del punto P(a,2) a la recta 3x + 4y – 2 =0 sea igual a 1

8. EJERCICIOS DE AUTOCOMPROBACIÓN

- **k) Representar la recta y=4. ¿Qué pendiente tiene?**
- **l) Dada la ecuación de la recta y=5x+4, ponerla en forma implícita.**
- **m) Dada la ecuación de la recta 2x+3y=5, ponerla en forma explícita.**
- **n) Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto (3,-5) y tiene pendiente m=3**
- **o) Hallar la ecuación de la recta que pasa por los puntos (-1,2) y (2,-3). ¿Es creciente o decreciente?.**
- **p) Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto (2,-3) y es paralela a la recta que tiene de ecuación y=2x+1.**
- **q) Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto (-1,4) y es perpendicular a la recta -3x+y-2=0.**
- **r) Hallar la distancia entre los puntos (4,2) y (1,3).**
- **s) Hallar la distancia entre las rectas 2x-3y=3 y 6x-9y=4**

9. SOLUCIONES A LOS EJERCICIOS DE AUTOEVALUACIÓN

6. m=0

7. y-5x-4=0

8. $y=-\frac{2}{3}x+\frac{5}{3}$

9. y=3x-4

10. $y=-\frac{5}{3}x+\frac{1}{3}$

11. y=2x-7

12. $y=-\frac{1}{3}x+\frac{11}{3}$

13. $\sqrt{10}$

14. 0.46

7

Funciones operaciones con funciones

Tema 7
Expresión gráfica de funciones, operaciones con funciones

1. ÍNDICE

1. ÍNDICE

2. INTRODUCCIÓN GENERAL A LA UNIDAD Y ORIENTACIONES PARA EL ESTUDIO

El concepto de **función** es el mejor objeto que los matemáticos han podido inventar para expresar el cambio que se produce en las cosas al pasar el tiempo.

En esta unidad didáctica comenzaremos con los aspectos básicos de las funciones tales como: identificar cuándo una relación entre dos conjuntos es una función, visualizar una función a través de distintos métodos, obtener información de esa representación y reconocer ciertos conjuntos asociados a las funciones tales como el dominio y la imagen. Así como propiedades y operaciones básicas de las funciones.

Haremos hincapié en que una función puede representarse de diferentes modos: mediante una ecuación, con una gráfica, o con palabras.

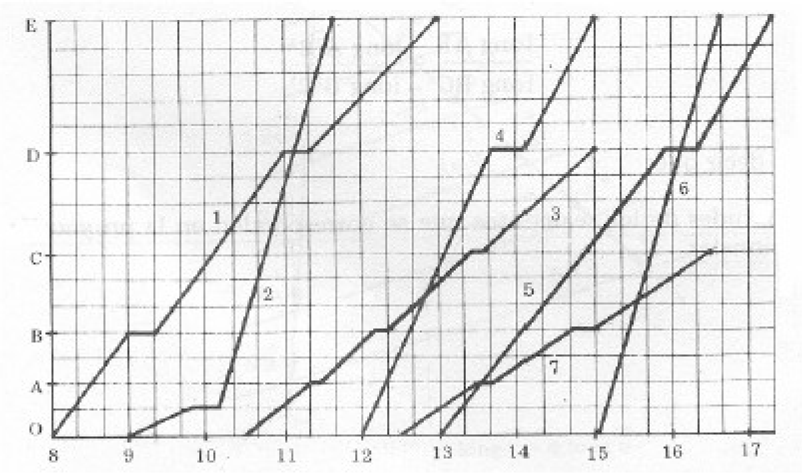
3. OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- Comprender el concepto de función
- Saber determinar el dominio y el recorrido de una función cualquiera
- Reconocer gráficas que provienen de funciones

4. DESARROLLO DE LOS CONTENIDOS

- **Introducción**

La construcción y lectura de gráficos son necesidades imprescindibles en el mundo actual. No es posible comprender un diario si no se tiene idea de cómo interpretar un gráfico. Como primer acercamiento observemos el siguiente gráfico que contiene información simple de leer. En las empresas ferroviarias se utilizan diagramas similares a estos para programar la señalización a lo largo de la vía férrea.



En el eje vertical se han marcado los puntos O, A, B, C, D, y E que son estaciones ferroviarias. En el eje horizontal se ha representado el tiempo medido en horas.

Cada línea quebrada indica la posición del tren, cuyo número está marcado sobre la misma, en función del tiempo. Observemos que algunos trenes no llegan a la última estación y algunos no paran en ciertas estaciones.

Veamos algunas preguntas que podemos hacer para interpretar el gráfico:

1) ¿A qué hora sale el tren nº 2?

2) ¿A qué hora llega a la estación E el tren nº 4?

3) ¿Cuánto tiempo transcurre entre la salida del tren nº 3 y el nº 4?

4) ¿Cuánto tarda el tren nº 1 en ir de la estación O a la estación B?

5) ¿Cuánto tiempo el tren nº 1 está detenido en la estación B?

6) ¿Cuánto tiempo transcurre en la estación D desde la partida del tren nº 1 hasta que pasa el tren nº 6?

7) ¿Hasta donde llega el tren nº 3?

8) ¿A qué hora y en qué lugar se cruzan los trenes nº 1 y nº 2?

9) Si un pasajero llega a la estación O a las 12:30 hs. y quiere llegar a la estación E, ¿qué opciones tiene?

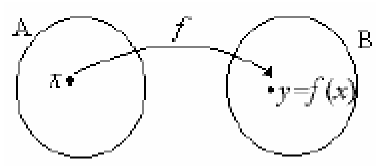
10) Si un pasajero llega a la estación O a las 10 hs. y toma el tren nº 3, ¿cómo hace para llegar a la estación E?. ¿A qué hora llega?. ¿Qué le hubiera convenido hacer para llegar antes?

11) ¿Es siempre la misma la velocidad del tren nº 2?. ¿Y la del tren nº 1?. ¿En qué lugar es mayor?

Desde un punto de vista informal, una **función** es una regla que permite asignar a cada uno de los elementos “x” de un conjunto “A” un único elemento “y” de otro conjunto “B”. A diario tenemos ejemplos de estas asignaciones: el médico dosifica un antibiótico en función del peso del bebé, nos cobran el pasaje en función de la distancia recorrida, la distancia recorrida es función de la velocidad alcanzada, etc.

- **Concepto de función**

Sean *A* y *B* dos subconjuntos de R. Cuando existe una relación entre las variables, *x* e *y*, donde $x \in A$ e $y \in B$, en la que a *cada* valor de la ***variable independiente*** *x* le corresponde un *único* valor de la ***variable dependiente*** *y,* diremos que dicha relación es una ***función***.



$f : A \to B$

Diremos que y es la ***imagen*** de x por la función f. En símbolos:

$$y = f(x)$$

A lo largo de este curso trataremos especialmente las funciones que tienen por dominio y recorrido el conjunto de números reales **R,** es decir, A = B. Aunque en muchos casos los dominios o recorridos de funciones sólo son subconjuntos de R. A las funciones de este tipo las llamaremos funciones reales de variable real.

Al conjunto formado por todos los valores que toma la variable independiente *x* lo denominamos ***dominio*** de la función y lo denotamos *Dom f.*

Al conjunto formado por todos los valores que toma la variable dependiente *y* tales que *y* = *f* (*x*) para algún $x \in A$, lo denominamos ***imagen*** de la función y lo denotamos *Im f.*

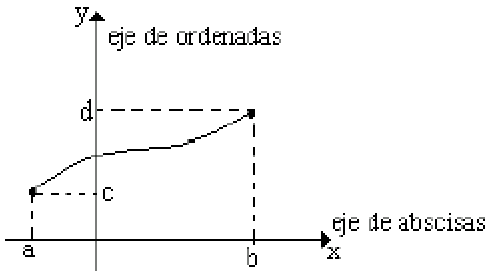
Para una función $f : A \to B$, se tiene que A = Dom *f* e $\operatorname{Im} f \subseteq B$

No todo lo que parece es una función. Es importante aprender a reconocer cuándo una relación entre dos conjuntos es o no una función. Para ello, en la siguiente sección, veremos cómo reconocer cuando una relación entre dos variables o magnitudes es una función, a partir de la representación gráfica.

- **Gráfica de una función**

Una forma de representar una función es mediante una gráfica en un ***sistema de coordenadas cartesianas***. En el eje horizontal se representa a la variable independiente y recibe el nombre de ***eje de abscisas*** o ***eje x***. En el eje vertical se ubica la variable dependiente y recibe el nombre de ***eje de ordenadas*** o ***eje y***.

Gráficamente



Al representar una función $y = f(x)$ en un sistema de coordenadas cartesiano, sobre el eje de abscisas se ubica la variable independiente x, mientras que sobre el eje de ordenadas se ubica la variable dependiente y.

Los siguientes ejemplos ponen de manifiesto cómo podemos saber si una relación entre dos conjuntos es o no una función.

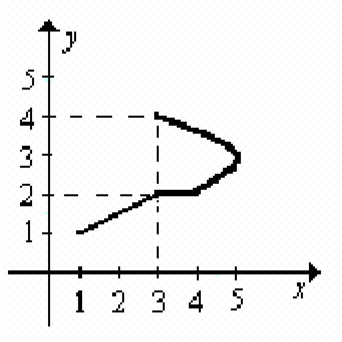


Gráfico 1

El Gráfico 1 **no** representa una función pues hay elementos del dominio que tienen más de una imagen.

Ejemplo:

f(3)=2 y f(3)=4

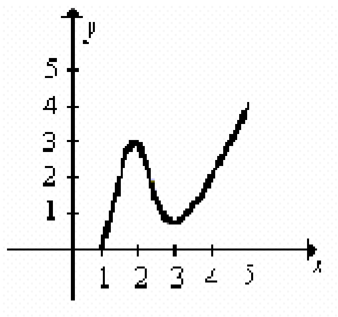


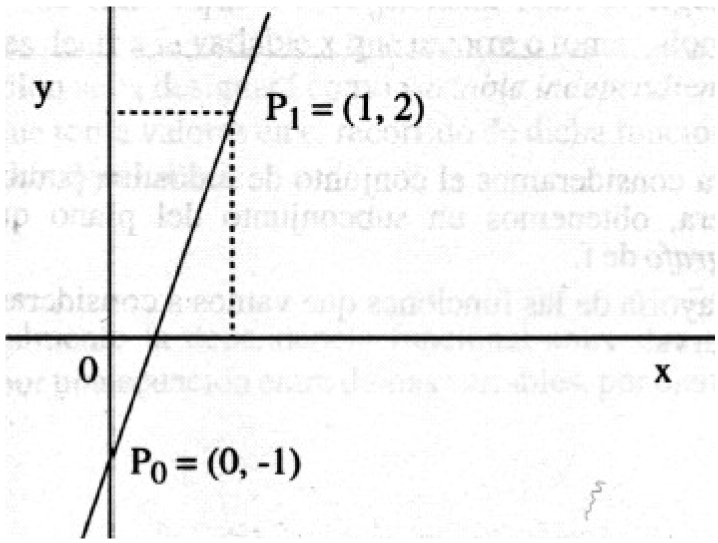
Gráfico 2

El Gráfico 2 corresponde a una función puesto que todos los elementos de *A* tienen una única imagen en *B*.

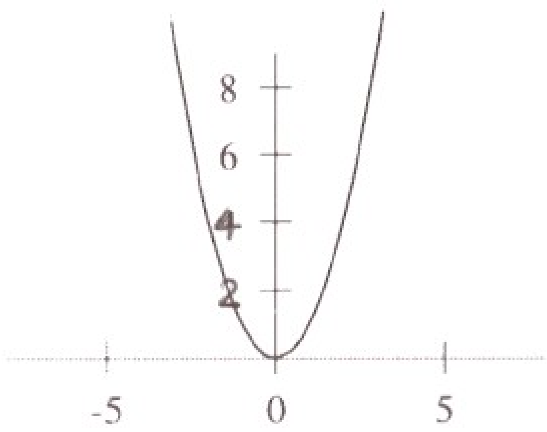
En este caso podemos observar que Dom *f* = [1 , 5] e Im *f* = [0 , 4]

En los siguientes ejemplos presentamos las gráficas de alguna de las funciones que en el tema próximo estudiaremos.

Ejemplo 1: La función $f: R \to R$, y=f(x)=3x-1. La gráfica de esta recta pasa por los puntos (0,-1) y (1,2)



Ejemplo 2: Sea la función $y = f(x) = x^2$. La gráfica de esta función es una parábola



- **Operaciones con funciones**

Dadas dos funciones reales definidas sobre el mismo conjunto A con $A \subseteq R$

$$\begin{array}{ll} f: A \rightarrow R & g: A \rightarrow R \\ x \rightarrow f(x) & x \rightarrow g(x) \end{array}$$

Se define la función suma $f + g : A \rightarrow R$ como aquélla que toma en cada punto $x \in A$ el valor:

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$$

Se define la función diferencia $f - g : A \rightarrow R$ mediante:

$$(f-g)(x) = f(x) - g(x)$$

Se define la función producto $f \cdot g : A \rightarrow R$, como aquélla que toma en cada punto $x \in A$ el valor:

$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$$

Se define el cociente $f / g : A \rightarrow R$ mediante:

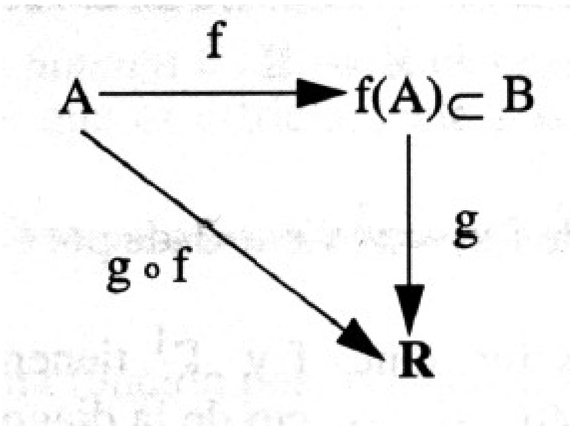
$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

Observar que para que el cociente esté bien definido g(x) no debe anularse nunca, es decir, debe ocurrir $g(x) \neq 0$, para todo $x \in A$.

Además de las operaciones que acabamos de definir se tiene la composición de funciones, y que juega un papel importante en la teoría de funciones de variable real.

Sean f, con dominio A, y g funciones tales que el recorrido f(A) de f se encuentra en el domino B de g. Se define la composición de f con g, como la función $g \circ f$, que toma en los puntos del dominio de f el valor

$$(g \circ f)(x) = g(f(x))$$



Ejemplo 3: la función $h(x) = +\sqrt{x+3}$ que está definida en $A = \{x \in R, x \geq -3\}$, es decir, $h : A \to R, x \to \sqrt{x+3}$, es la composición de las funciones:

$$f : A \to R$$
$$x \to x+3$$

$$g : R^{+} \to R, x \to +\sqrt{x},$$

donde $R^{+} = \{x \in R, x \geq 0\}$. es decir, $h = g \circ f$

Llamaremos **función identidad I** a la función $I : R \to R$, $x \to I(x) = x$. Dada una función real diremos que tiene función f^{-1} cuando

$$f \circ f^{-1} = I$$

Ejemplo 4: la función inversa de $f(x) = x^3$ viene dada por $f^{-1} = \sqrt[3]{x}$

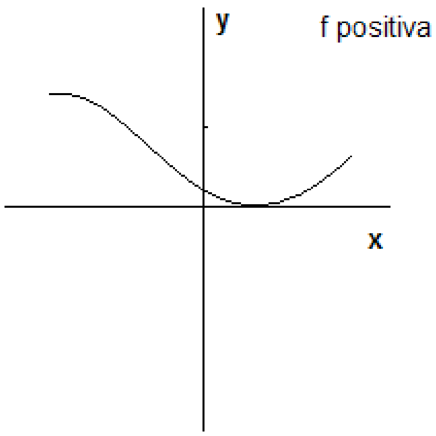
- **Propiedades de las funciones**

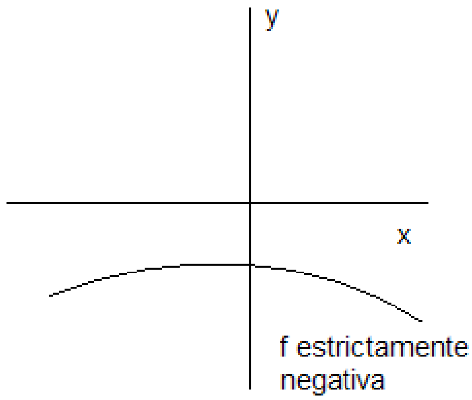
En esta sección introduciremos algunas de las propiedades que puede satisfacer una función. Así introduciremos los conceptos de función positiva y negativa, creciente y decreciente, y pares e impares.

Se dice que una **función** $f : R \to R$ es **positiva** cuando $f(x) \geq 0$ para todo $x \in R$. Se dice que es **estrictamente positiva** cuando $f(x) > 0$ para $x \in R$.

La gráfica de una función positiva queda siempre por encima del eje OX de abscisas, en el llamado semiplano superior.

Análogamente, se llaman **funciones negativas** aquellas funciones f que verifican $f(x) \leq 0$, para cada $x \in R$, y serán **estrictamente negativas** cuando f(x)<0, para cada $x \in R$.





Ejemplo 5:

a) $f(x) = x^2$ es una función positiva,

b) $f(x) = -1 - x^4$ es una función negativa,

c) f(x)=3x no es ni positiva ni negativa.

Una función $f : R \to R$ se dice que es monótona creciente cuando el valor de la variable x crece entonces el valor de la función f(x) también crece. En términos más precisos.

Una función real f es **monótona creciente** si para $x_1 \leq x_2$, entonces $f(x_1) \leq f(x_2)$. Se dice que es monótona estrictamente creciente si cuando $x_1 < x_2$, entonces $f(x_1) < f(x_2)$.

Análogamente, si para $x_1 \leq x_2$ se verifica $f(x_1) \geq f(x_2)$ hablamos de una función monótona decreciente. Se dice que es estrictamente monótona decreciente si cuando $x_1 < x_2$, entonces $f(x_1) > f(x_2)$.

Ejemplo 6: la función del ejemplo 1 es estrictamente creciente. La función del ejemplo 2 es decreciente hasta el punto (0,0) y creciente a partir de dicho punto.

Decimos que **una función es par** siempre que para todo valor de la variable independiente perteneciente al dominio se cumpla que:

f(-x)=f(x)

Esto corresponderá gráficamente a una simetría especular respecto al eje y (x=0). La función del ejemplo 2 es una función par.

Decimos que **una función es impar** siempre que para todo valor de la variable independiente perteneciente al dominio se cumpla que:

f(-x)=-f(x)

Esto corresponderá gráficamente a una simetría respecto al punto (x,y)=(0,0).

El carácter **par** o **impar** de una función es lo que conocemos como su **paridad**. Las funciones que no son ni pares, ni impares, carecen de paridad.

Ejemplo 7: la función $f(x) = |x|$ es una función par. La función $f(x) = x^3$ es una función impar.

5. RESUMEN

33. Una ***función*** es una relación entre las variables, *x* e *y*, donde $x \in A$ e $y \in B$, en la que a *cada* valor de la ***variable independiente*** *x* le corresponde un *único* valor de la ***variable dependiente*** *y.*
34. ***Dominio*** de una función (*Dom f) es el* conjunto formado por todos los valores que toma la variable independiente *x.*
35. ***Imagen*** de la función y lo denotamos *Im f* al conjunto formado por todos los valores que toma la variable dependiente *y* tales que *y* = *f* (*x*) para algún $x \in A$,

- **Suma de funciones** $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$
- **Diferencia de funciones** $(f-g)(x) = f(x) - g(x)$
- **Producto de funciones** $(f \cdot g)(x) = f(x) - g(x)$
- **Cociente de funciones** $\left(\dfrac{f}{g}\right)(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$
- **Composición de funciones** $(g \circ f)(x) = g(f(x))$
- **Función positiva** cuando $f(x) \geq 0$ para todo $x \in R$.
- **Función estrictamente positiva** cuando $f(x) > 0$ para $x \in R$.

- **Función negativa** cuando $f(x) \leq 0$, para cada $x \in R$,
- **Función estrictamente negativa** cuando f(x)<0, para cada $x \in R$.
- **Función monótona creciente** si para $x_1 \leq x_2$, entonces $f(x_1) \leq f(x_2)$.
- **Función estrictamente monótona creciente** cuando $x_1 < x_2$, entonces $f(x_1) < f(x_2)$.
- **Función par** f(-x)=f(x)
- **Función impar** f(-x)=-f(x)

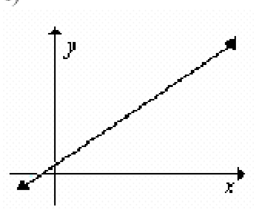
6. BIBLIOGRAFÍA

27. Emilio Bujalance y otros. Matemáticas especiales. Editorial Sanz y Torres (1998). 2ª Edición
28. María E. Ballvé y otros. Problemas de matemáticas especiales. Editorial Sanz y Torres (1996). 2ª Edición.
29. José T. Pérez Romero y José A. Jaramillo Sánchez. Matemáticas. Pruebas de acceso a la universidad para mayores de 25 años. Editorial MAD. (2002).
30. http://descartes.cnice.mecd.es/
31. http:www.uoc.edu

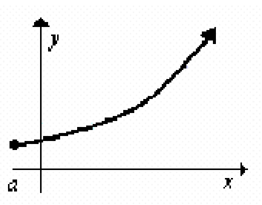
7. ACTIVIDADES

- Indicar si los siguientes gráficos corresponden a funciones. Justificar. Hallar el dominio y la imagen de los que corresponden a función.

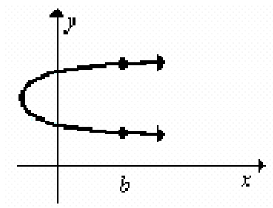
i)



ii)

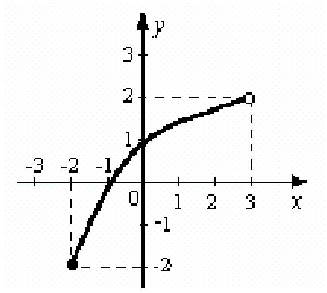


iii)

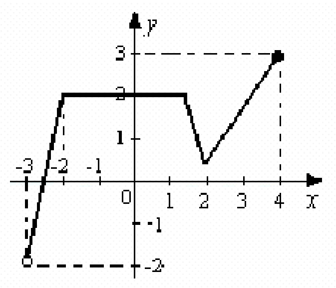


- Dados los siguientes gráficos correspondientes a funciones, determinar los conjuntos dominio e imagen de cada una de ellas:

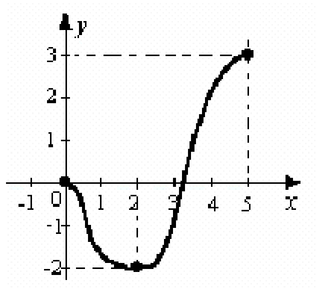
i)



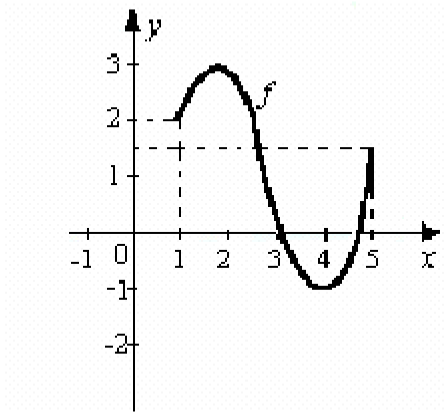
ii)

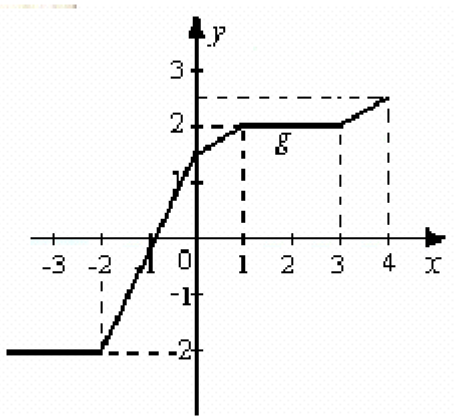


iii)



- Para las funciones representadas, estimar, a partir de su gráfico, los valores que se indican.





a) *f* (1) ; *f* (2) ; *f* (2,5) ; *f* (4) ; *f*(5).
b) Los valores de *x* tales que *f* (*x*) = 0.
c) *g*(- 1,5) ; *g*(- 0,5) ; *g*(0) ; *g*(0,5) ; *g*(4).
d) Los valores de *x* tales que *g*(*x*) = 2.
e) Los valores de *x* tales que *g*(*x*) = -2.

- Calcular el dominio de las funciones dadas por:

a) $f(x) = 3x - 1$ b) $f(x) = \sqrt{2x-1}$ c) $f(x) = \dfrac{2x}{x+2}$

- En cada caso, calcular, si es posible, *f* (0) , *f* (-0,8) , *f* (0,8) , *f* (-1) , *f* (1) , *f* (-4,25), *f* (4,25) y decir cuál es el dominio de la función *f* :

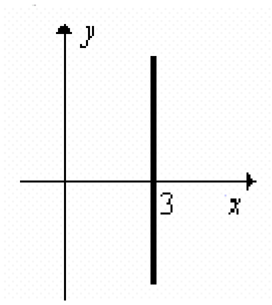
a) $f(x) = -3x + 2$ b) $f(x) = -4$ c) $f(x) = x^2 + 2x - 5$

d) $f(x) = -x^3 + x^2 - 2x + 4$ e) $f(x) = \dfrac{5}{x}$ f) $f(x) = \dfrac{3}{x-4}$

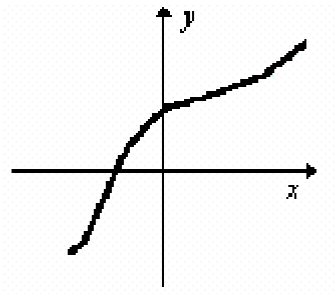
8. EJERCICIOS DE AUTOCOMPROBACIÓN

15. Indicar si los siguientes gráficos corresponden a funciones. Justificar.

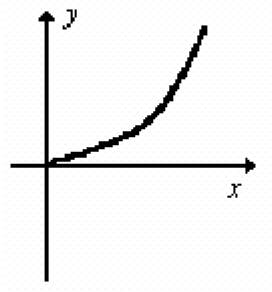
a)



b)

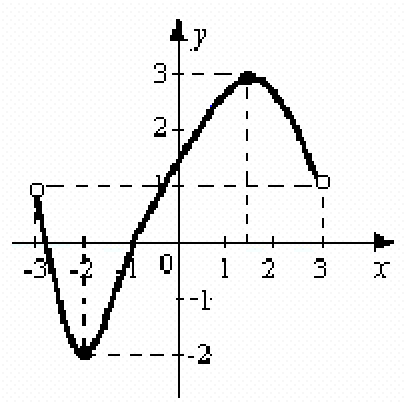


c)

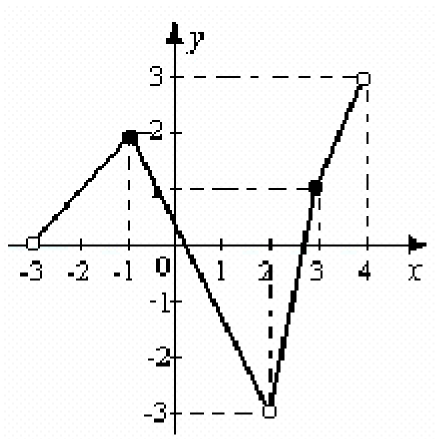


16. Dados los siguientes gráficos correspondientes a funciones, determinar los conjuntos dominio e imagen de cada una de ellas:

a)



b)



17. Calcular el dominio de las funciones dadas por:

$$a)\, f(x) = x\sqrt{x} \quad b)\, g(x) = \sqrt{x^2+5} \quad c)\, h(x) = \frac{3}{1-x} \quad d)\, m(x) = \frac{x-1}{x^2+4}$$

9. SOLUCIONES A LOS EJERCICIOS DE AUTO EVALUACIÓN

1.

7. El gráfico no representa una función pues para el valor de x=3 le corresponden infinitos valores de la variable dependiente y, concretamente todos los números reales.
8. Si corresponde a una función
9. El gráfico de este apartado también corresponde al de una función.

2.

t) Dom(f)=(-3,3); Img(f)=[-2,3]

u) Dom(f)=[-3,2)U(2,4) img(f)=(-3,3)

3.

11. Dom(f)=$[0,\infty)$
12. Dom(g)=$(-\infty,\infty)$
13. Dom(h)=$(-\infty,1)\cup(1,\infty)$
14. Dom(g)=$(-\infty,\infty)$

7

Funcion real de variable real

Tema 8

Funciones reales de variable real: clasificación y características básicas de las funciones lineales, polinómicas, trigonométricas, exponenciales, logarítmicas y racionales sencillas. Valor absoluto, parte entera

7. ÍNDICE

2. INTRODUCCIÓN GENERAL A LA UNIDAD Y ORIENTACIONES PARA EL ESTUDIO

En esta unidad introducimos la representación de las funciones polinómicas de grado menor o igual que tres, de las funciones trigonométricas básicas, es decir, la función seno, coseno y tangente. Así como, la representación gráfica de las funciones exponencial y logarítmica.

3. OBJETIVOS ESPECÍFICOS

b) Estudiar en general las propiedades y características de las funciones polinómicas, trigonométricas, exponenciales y logarítmicas.

10. Llegar a reconocer las gráficas de las funciones polinómicas de grado menor o igual que 3, se pretende que observando el polinomio y sus coeficientes se determine que forma tiene la gráfica, sin necesidad de acudir a la tabla de valores.

- Identificar, construir y representar las funciones trigonométricas

- Conocer la definición de las funciones exponenciales y logarítmicas

NOCIONES GENERALES DE FUNCIÓNES REALALES DE VARIABLE REAL

Se llama **función real de variable real a una correspondencia f: S--------R** donde para todo elemento del conjunto S (Dominio o conjunto inicial donde puede tomar valores)se le hace corresponder una y solo una imagen del conjunto S´ (Imagen), donde S y S´ están contenidos en $\mathbb{R}$, es decir, es una función:

$$f : S \subseteq \mathbb{R} \rightarrow S' \subseteq \mathbb{R}$$

A “S”= Dom(f) se le llama dominio y a S´=Img(f) imagen de f.

Ejemplos.

₪Calcular el dominio y la imagen de las funciones:

$f(x)=3x^3-2x^2+x-1$ Su dominio es R ya que es un polinomio que por definición es producto u suma de constantes de números reales no existiendo para estas operaciones ningun tipo de restricción real.

De aquí podemos generalizar que el dominio de una función polinómicas es siempre R

$f(x) = \dfrac{x^2+2}{x^2-4}$ este tipo de función se llama función racional pues esta formada por un cociente de polinomios, anotemos que para el cociente de números reales existe una restricción ya que el denominador no uede ser 0, por tanto debemos pensar que números pueden anular el deominador por lo tanto hemos de hacer $x^2-4=0$ de donde se deduce que x=2 x=-2 luego indicaremos que Dom(f)=R-{2,-2}.

De aquí podemos generalizar que el dominio de una función racional es siempre R-{a} $\forall a \in R \ \ raiz \ del \ deno\min ador$

$f(x) = \sqrt{3x-6}$ Para estudiar el dominio de esta función observemos que aparece un nuevo calculo el de la raiz cuadrada que solo se puede realizar si el radicando es mayor que cero, lo que implica que emos de averiguar cuando $3x-6 \geq 0 \quad 3x \geq 6 \quad x \geq 2$ asi podemos decir que el Dom(f)=[2, +∞)

De aquí podemos generalizar que el dominio de una función irracional es el conjunto de valores de R donde el radicando es mayor que 0.

En este capitulo estudiaremos algunas funciones especiales de las que estudiaremos su dominio en su momento

Tambien abordaremos otras cuestiones y propiedades de las funciones como

Funciones acotadas

Decimos que una función f está **acotada** cuando su conjunto imagen está acotado. Es decir, hay un número M tal que para todo x del dominio de la función se cumple que

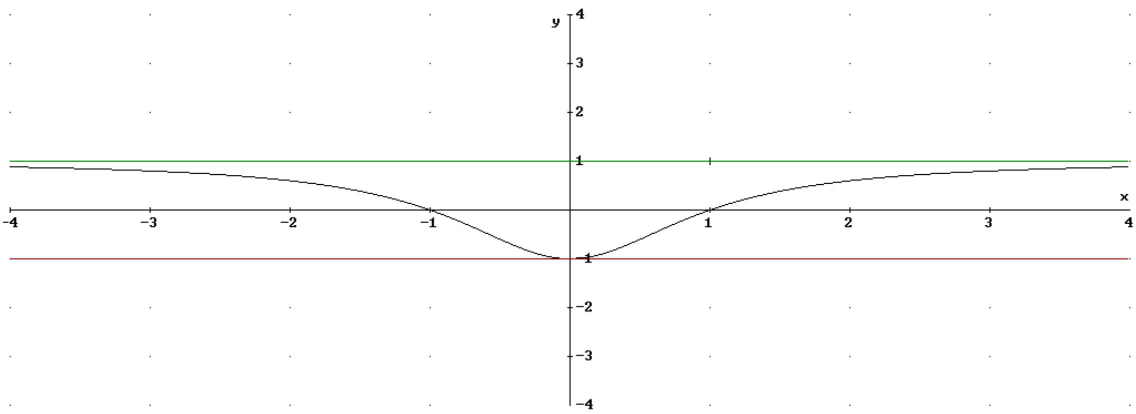
$$-M \leq f(x) \leq M.$$

Por ejemplo: **f(x) = sen(x)** y **g(x) = cos(x)** tienen por conjunto imagen al intervalo [-1,1] y son, por lo tanto acotadas. Una función está acotada cuando su gráfica está entre dos líneas horizontales.

En forma análoga se define las nociones de función acotada superiormente y función acotada inferiormente, queriendo decir que su conjunto imagen está acotado superiroemente o inferiormente respectivamente. Por ejemplo, **f("x")=|x|** tiene por conjunto imagen $[0, +\infty[$, por lo que la función está acotada inferiormente.

Cuando una función verifica cualquiera de las cuatro propiedades anteriores, decimos que es **monótona**. Traducir a hecho gráfico la acotación de una función sería decir que su graáfica se mueve dentro de los rectas horizontales situadas alas alturas m y M del eje de ordenadas.

Veamos un ejemplo $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$



] ***Funciones monótonas***

5) Decimos que una función **f** es **estrictamente creciente** en el intervalo $[a, b] \leftrightarrow \forall x_1, x_2 \in [a, b] : x_1 < x_2 \leftrightarrow f(x_1) < f(x_2)$.

6) Decimos que función **f** es **estrictamente decreciente** en $[a, b] \leftrightarrow \forall x_1, x_2 \in [a, b] : x_1 < x_2 \leftrightarrow f(x_1) > f(x_2)$

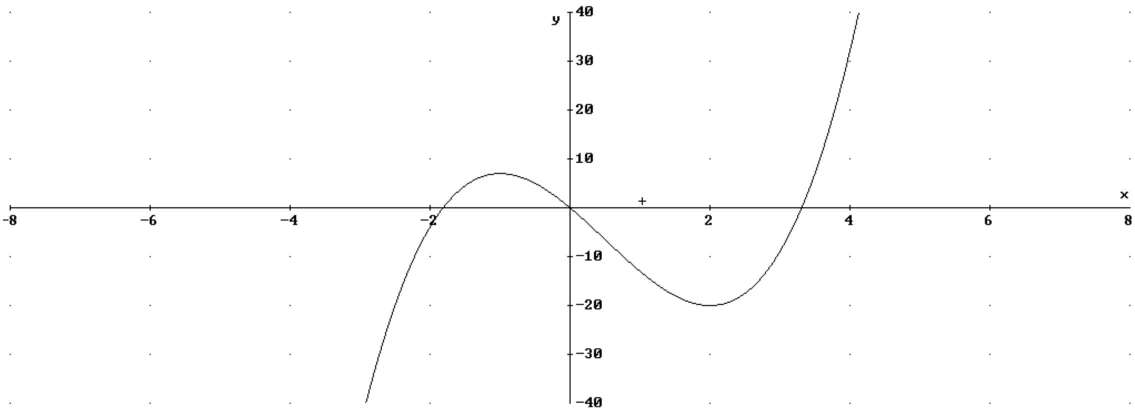
7) Decimos que **f** es **creciente** en $[a,b] \leftrightarrow \forall x_1, x_2 \in [a,b] : x_1 < x_2 \leftrightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$

8) Decimos que **f** es **decreciente** en $[a,b] \leftrightarrow \forall x_1, x_2 \in [a,b] : x_1 < x_2 \leftrightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$

.

Si representamos gráficamente la función

$F(x)=2x^3-3x-12x$. Podemos observar que la función es creciente en el intervalo $(-\infty,-1)\cup(2+\infty)$ y decreciente en el intervalo (-1,2), habiendo pues un máximo relativo en x=-1 y un mínimo relativo en x=2 como se puede observar enla figura



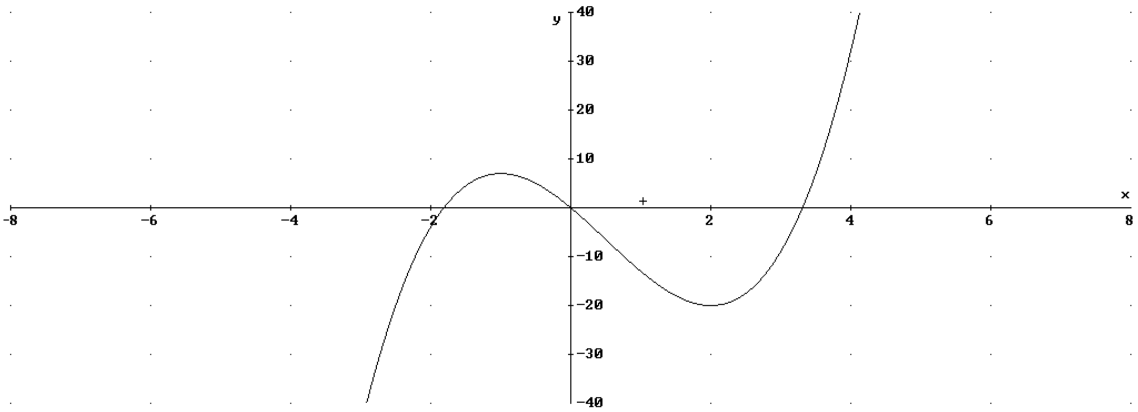
Máximos y Mínimos de una función

Dada una función f(x) sea x=c un punto del dominio de la función donde la monotonía cambia diremos que en ese punto la función tiene un extremo relativo también se llaman puntos críticos.

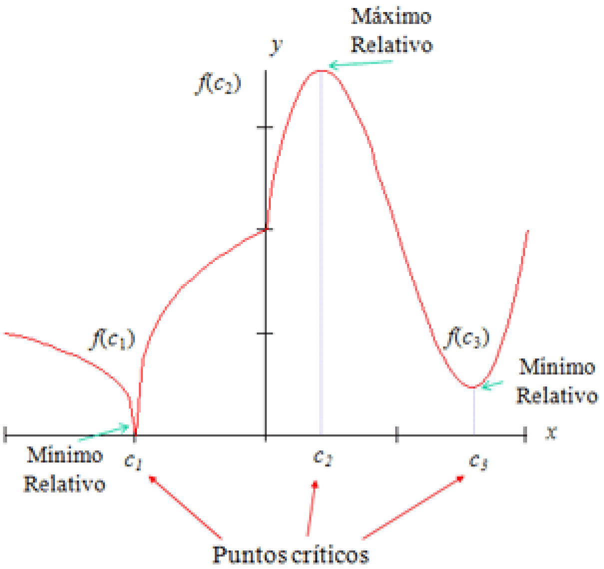
Si el cambio de monotonía es crecimiento-decrecimiento decimos que tienen un *máximo relativo.*

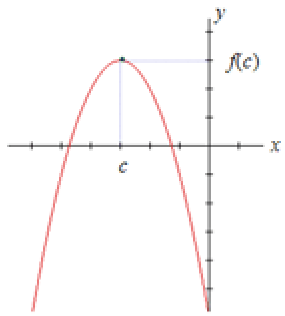
Si el cambio de monotonía es decrecimiento-crecimiento decimos que tienen un *mínimo relativo.*

Si miramos la función $F(x)=2x^3-3x-12x$ y su gráfica en el ejemplo anterior vemos como presnta un máximo en x=-1 y un mínimo en x=2 , como se puede observar en la figura

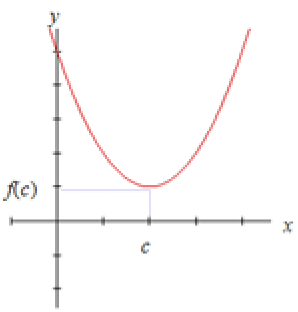


Veamos otros ejemplos gráficos

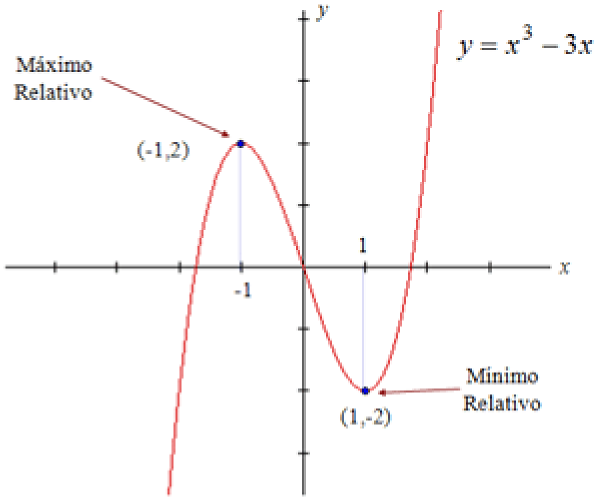


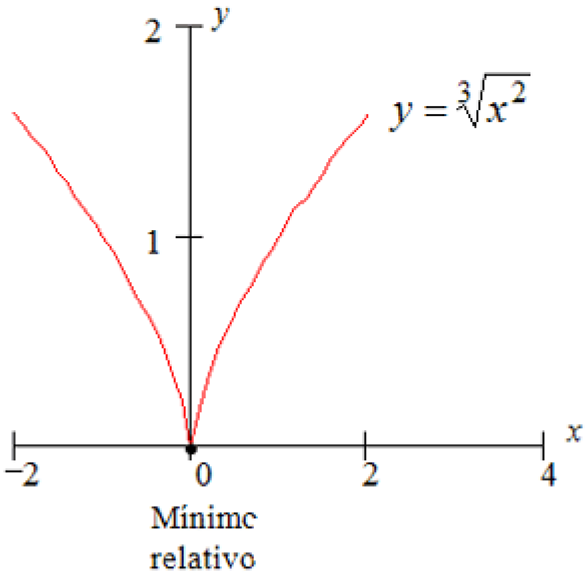


Máximo relativo

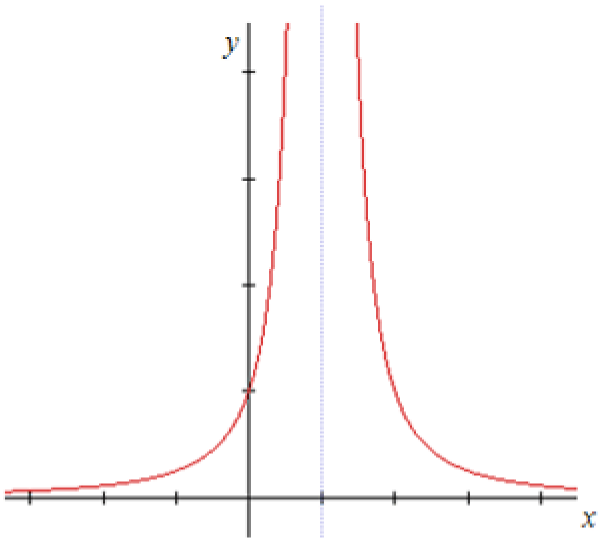


Mínimo relativo





Una función *no* necesariamente tiene un máximo o un mínimo



Esta función cambia su monotonía en x=1 aparentemente pero no tiene punto crítico ya que el punto x=1 no pertenece al dominio pues la gráfica no tiene imagen.

Simetrías. Funciones pares e impares

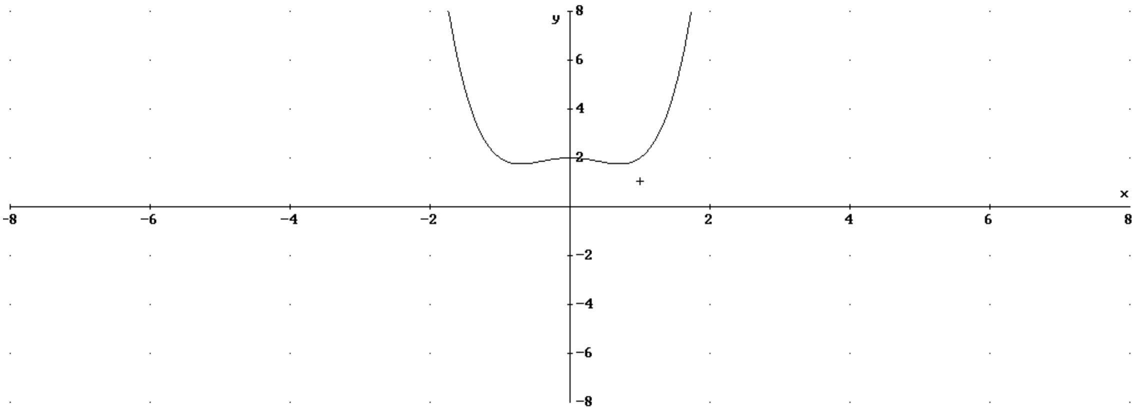
:

Función par

Decimos que una función es **par** cuando presenta simetría sobre el eje Y (ordenadas), esto es, si para todo elemento x de su dominio se cumple que $-x$ también está en el dominio y

$$f(-x) = f(x).$$

Ejemplo: $f(x)=x^4-x^2+2$



La denominación de par es porqué todas las funciones que en su definición la variable"x" esta afectada por exponentes pares tienen esta prpiedad.

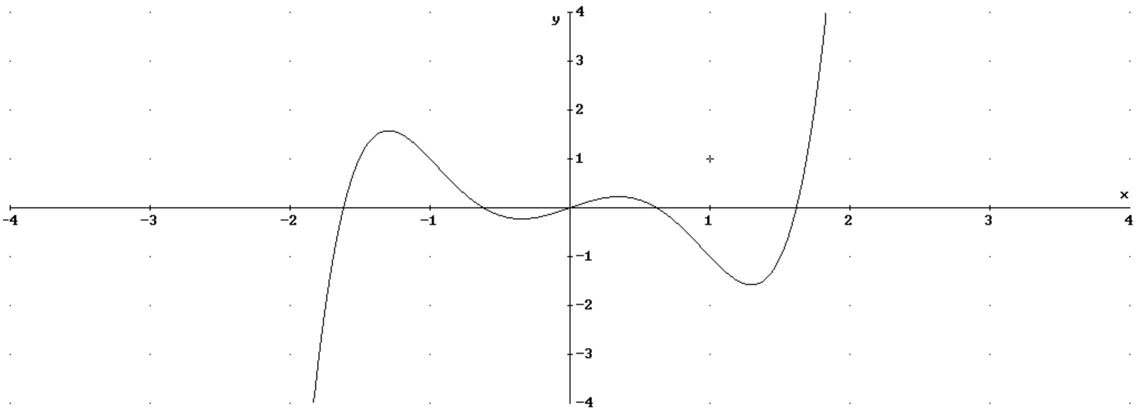
Función impar

Decimos que una función es **impar** cuando presenta simetría respecto al origen, esto es, si para todo elemento x de su dominio se cumple que $-x$ también está en el dominio y

$$f(-x) = -f(x)$$

Una función que no presenta simetría par, no tiene necesariamente simetría impar. Algunas funciones no presentan ninguno de los dos tipos de simetría o bien la presentan frente a focos o ejes distintos del de coordenadas o el eje de ordenadas (o eje Y). Dichas funciones se dice que no poseen paridad.

Ejemplo: $f(x)=x^5-3x^3+x$



La denominación de impar es porqué casi todas las funciones que en su definición la variable”x” esta afectada por exponentes impares tienen esta propiedad.

[Propiedades

- La suma de dos funciones pares o dos funciones impares es par.
- El producto de función par por par o impar, da par.
- Todas las otras combinaciones dan impar.
-

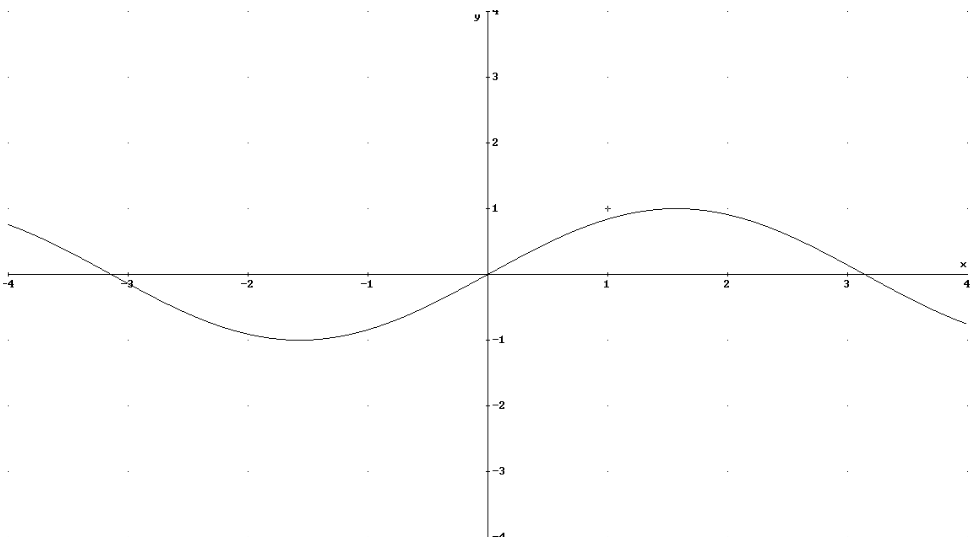
Funciones periódicas

función periódica

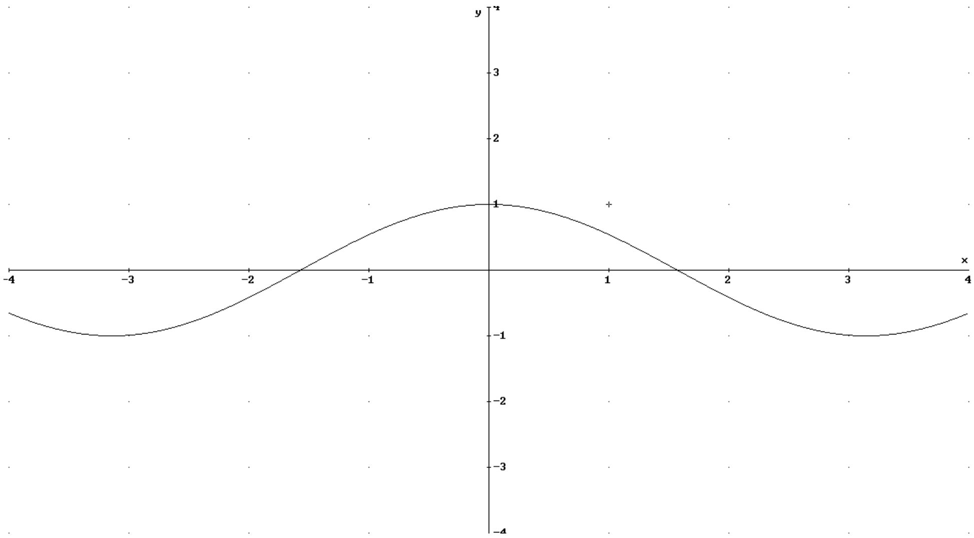
Decimos función es periódica si se cumple: $f(x) = f(x+T); T \neq 0$ donde T es un período de la función. El periodo es el menor de los periodos positivos, cuando exista tal número.

Los ejemplos clásicos son las funciones seno y coseno con periodos iguales a 2π.

Y=sen(x)

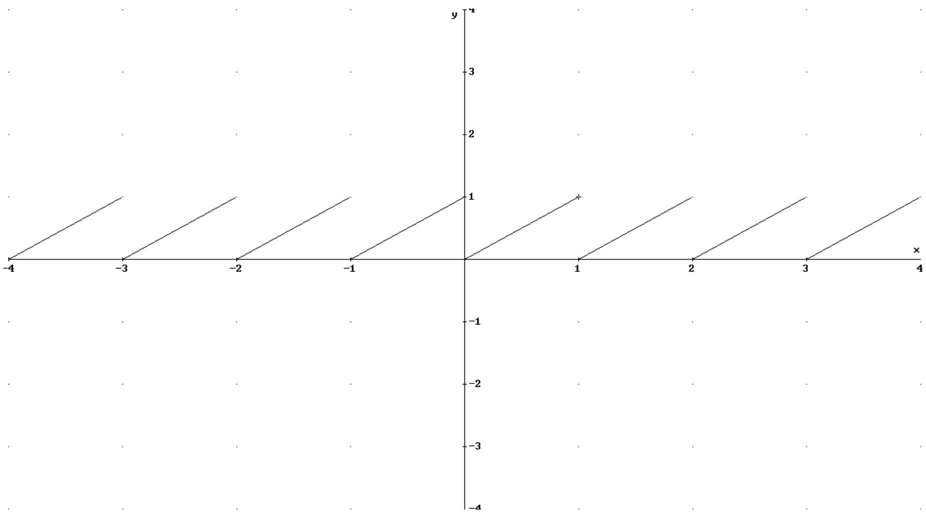


y=cos(x)



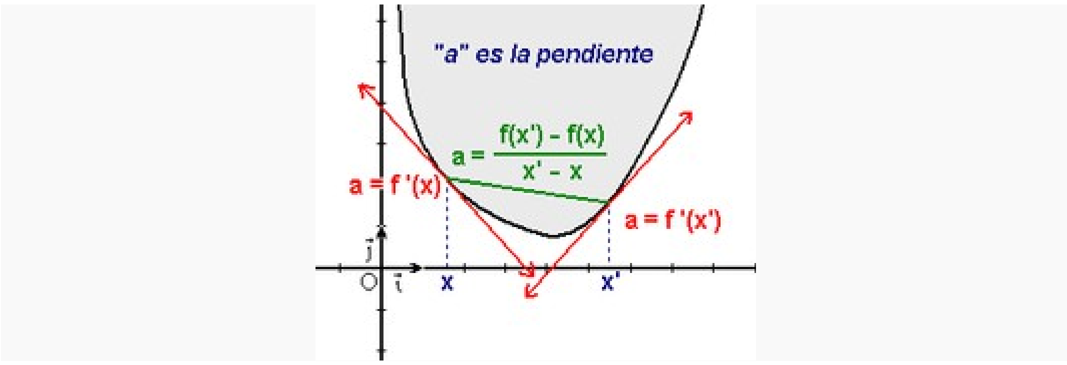
Si **int** denota la función parte entera (que produce el mayor enetero menor o igual al argumento) entonces la función f tal que $f(x) = x - int(x)$ tiene periodo 1.

Y=x-int(x)



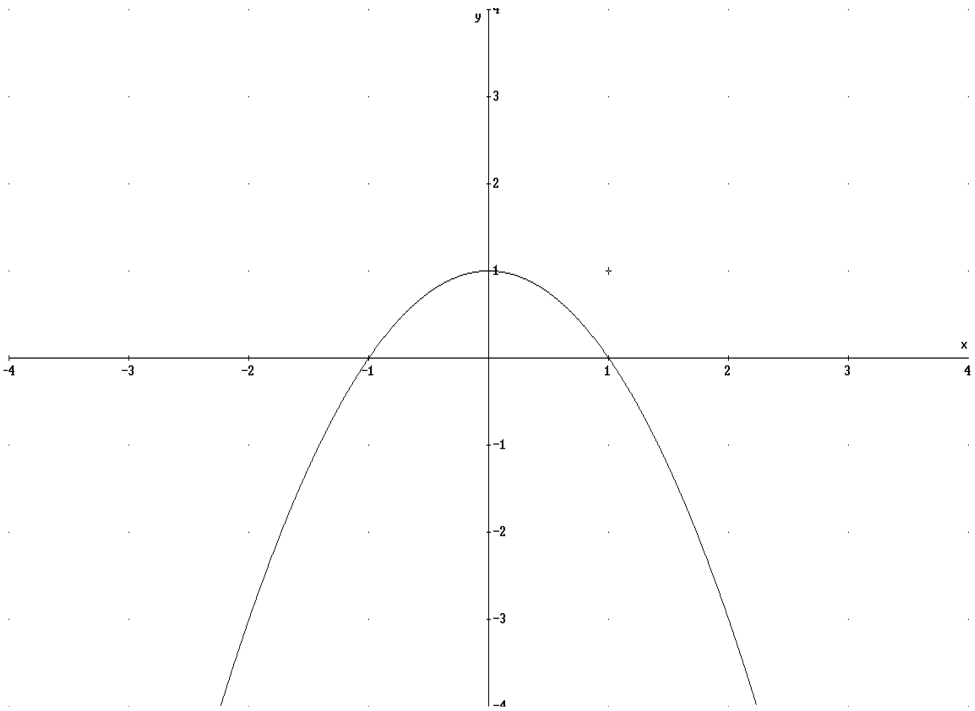
Funciones cóncavas y convexas

Función concava



Una función *f* es concava sobre un intervalo cuando el segmento que une dos puntos de la gráfica de *f*, siempre esta por encima o tocando la gráfica.

Función convexa



Una función *f* es convexa sobre un intervalo cuando el segmento que une dos puntos de la gráfica de *f*, siempre esta por encima de la gráfica.

La denominación de convexidad y concavidad depende del punto de vista que se adopte para considerar que es una concavidad, esto es si se mira a la función "desde arriba" o "desde abajo". Por ello, algunos textos denominan convexas a las funciones que se curvan "hacia arriba", Por ello, es frecuente que en ocasiones se adopten las denominaciones **concava hacia arriba el hueco** y **convexa hacia abajo el hueco** para evitar las ambigüedades.

.

1. TIPOS DE FUNCIONES

2. LA FUNCIÓN LINEAL Y AFIN

2.1. La función lineal

Supongamos que un momento determinado queremos efectuar la relación entre dólares y euros. Si el cambio es de 1 euro = 1’12 dólares podemos realizar la tabla siguiente:

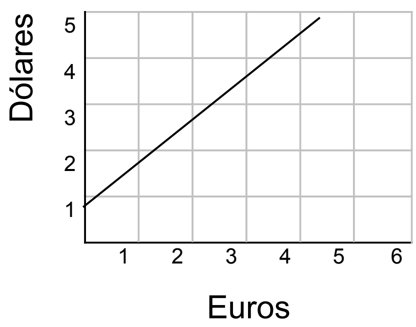
Euros	Dólares
1	1’12
1’5	1’68
2	2’24
2’5	2’8
3	3’36
4	4’48
...	

Podemos calcular el importe de cualquier cantidad de euros aplicando:

1’12 · (nº de euros) = (nº de dólares)

Esta situación se llama de proporcionalidad directa y puede expresarse matemáticamente de la forma $f(x) = ax$.

Si realizamos una gráfica con los valores de la tabla anterior obtendremos una recta que pasa por el origen de coordenadas, ya que si no das ningún euro, no te darán nada en dólares.



Una función del tipo **f(*x*) = *ax*** se denomina **función lineal o de proporcionalidad directa**. Suele escribirse de la forma $y = ax$ porque $f(x)$ es la ordenada de la gráfica. El coeficiente a se llama **pendiente**.

2.2. La función afín

Vamos a suponer que la bajada de bandera de un taxi es de 1 euro en la tarifa y de 30 céntimos de euro cada 250 metros de recorrido.

El importe de cada trayecto, dependiendo del número de metros que se recorren en cada uno de ellos es el siguiente:

$$\frac{0'30}{250}x+1$$

Esto lo podemos representar por la función:

$$f(x) = \frac{0'30}{250}x+1$$

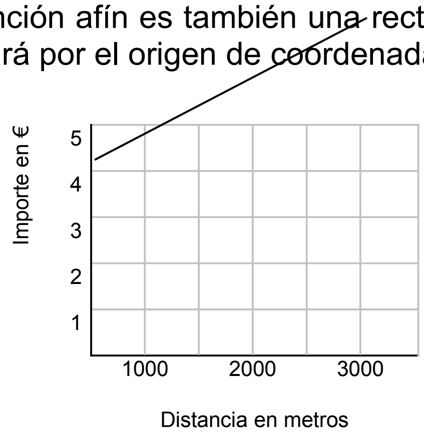
donde f(*x*) representa el coste. Dándole valores a *x* se puede obtener el precio de distintos trayectos.

La función que relaciona las anteriores variables tiene la forma:

f(*x*) = *ax* + *b*

que se denomina **función afín**. También se escribe ***y* = *ax* + *b***.

La gráfica de la función afín es también una recta, por tanto una función continua, aunque no pasará por el origen de coordenadas.

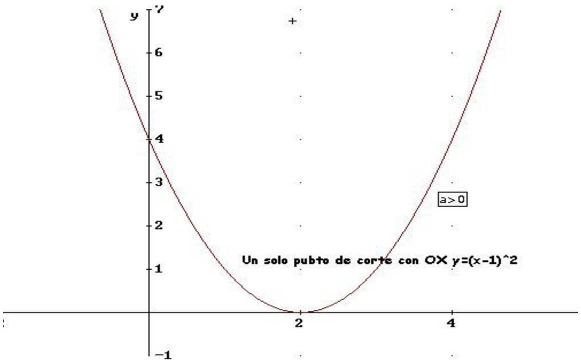


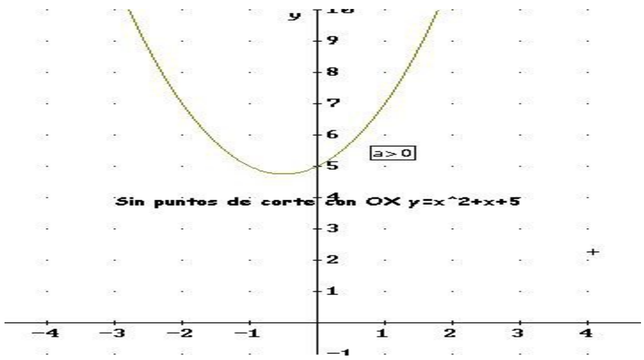
La recta corta al eje de ordenadas en el punto (*0,b*), por lo que el valor de *b* se conoce como **ordenada en el origen**. El coeficiente de la *x* determina la *inclinación* de la recta, por lo que se le denomina **pendiente**.

3. LA FUNCIÓN CUADRÁTICA. LA CATENARIA

Una función de la forma **f(*x*) = = a*x*^{2} + b*x* + c**, en donde *x* aparece elevada al cuadrado se denomina función cuadrática o función polinómica de segundo grado. También se escribe de la forma ***y* = a*x*^{2} + b*x* + c**.

La gráfica de la función cuadrática es una parábola con vértice en el punto $V(V_x, V_y)$, donde $V_x = \frac{-b}{2a}$ y V_y se obtiene sustituyendo V_x en la ecuación de la parábola.





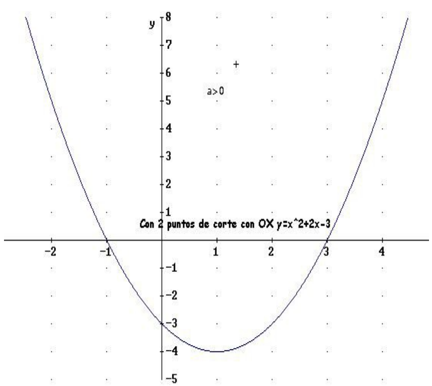
Otros puntos importantes de la parábola son aquellos en los que corta a los ejes de coordenadas.

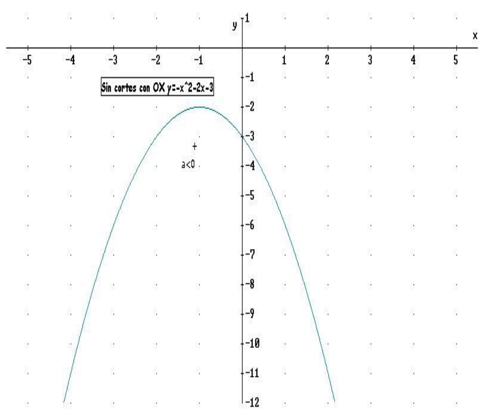
Punto de corte con el eje OY: $x = 0 \rightarrow [0, f(0)]$

Puntos de corte con el eje OX: $y = f(x) = 0$. Resolviendo la ecuación de segundo grado obtenemos los posibles puntos de corte.

Al resolver la ecuación de segundo grado podremos obtener dos soluciones, una o ninguna según que el discriminante $(b^2 - 4ac)$ de la ecuación sea positivo, cero o negativo. Significa que existirán dos puntos de corte de la parábola con el eje de abscisas, uno o ninguno.

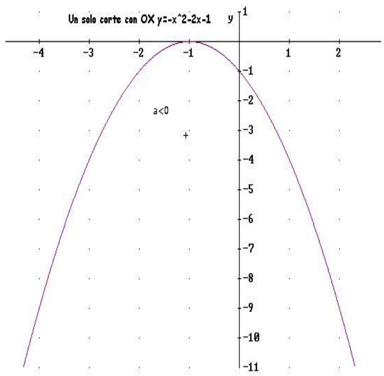
Así, cuando $a > 0$ obtenemos: Y cuando sea $a < 0$





Esto nos viene a decir que, dependiendo del signo del coeficiente *a,* las ramas de la parábola van a estar dirigidas hacia arriba (*a* > 0) o hacia abajo (*a* < 0).

Además, una parábola siempre es **simétrica** respecto a la recta $x = V_x$; con estos puntos y alguno más que nosotros le demos podemos obtener una representación gráfica de la parábola que estemos viendo.



Como ejemplo vamos a representar gráficamente la función: $f(x) = x^2 + x - 6$, hallando previamente los puntos de corte con los ejes y el vértice.

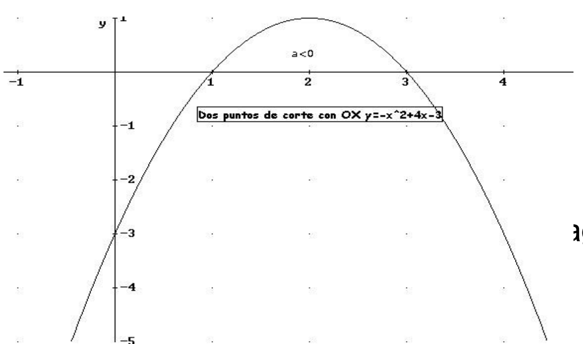
El punto de corte con el eje de ordenadas (*x* = 0) es: f(0) = 0^2 + 0 – 6= = – 6 por lo que el punto de corte es: (0,–6).

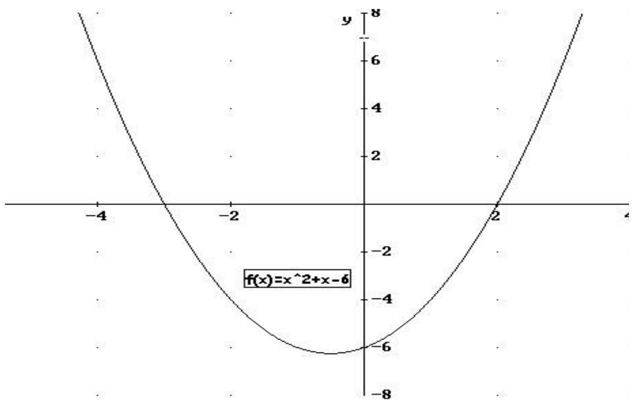
Los puntos de corte con el eje de abscisas (*y* = 0) los calculamos resolviendo la ecuación de segundo grado 0 = $x^2 + x - 6$ obteniendo $x_1 = 2$, $x_2 = -3$ por lo que los puntos de corte son (2,0) y (–3,0).

El vértice en *x* es $V_x = \frac{-1}{2}$ y $V_y = \left(\frac{-1}{2}\right)^2 + \frac{-1}{2} - 6 = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} - 6 = \frac{-25}{2}$ con lo que el punto del vértice es $V\left(\frac{-1}{2}, \frac{-25}{2}\right)$.

Estos puntos son suficientes para representar la gráfica aproximada, pero podemos darle alguno más si queremos y obtendríamos la siguiente tabla de valores:

x	0	2	–3	$-\frac{1}{2}$	1	3
y	–6	0	0	$-\frac{25}{2}$	–4	6





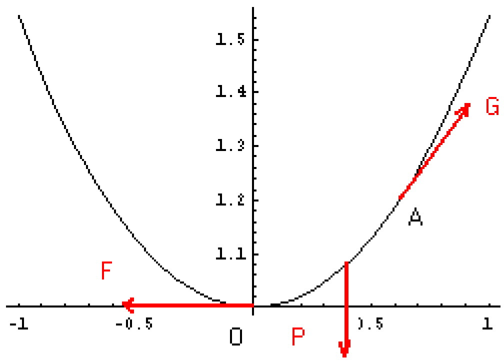
La catenaria es la curva que describe una cadena suspendida por sus extremos.

Los primeros matemáticos que abordaron el problema supusieron equivocadamente que la curva era una parábola. Huygens, a los 17 años, demostró que no era una parábola, pero no encontró la ecuación.

En 1691, en respuesta a un reto de Jacob Bernoulli, Leibnitz y Huygens, por métodos geométricos, y Johann Bernoulli encontraron la ecuación. Este reto de Jacob Bernoulli, resuelto por Johann, fue el comienzo de la rivalidad entre ellos.

El nombre de catenaria se debe a Huygens.

Johann Bernoulli resolvió el problema de la siguiente manera:



Consideró el trozo de cadena OA. Las fuerzas que actúan sobre ese trozo son el peso P, la fuerza F (que depende del lado izquierdo de la cadena y por lo tanto es constante) y G. Siendo α el ángulo que forma G con la horizontal, tenemos que, como el trozo OA está en equilibrio:

$$\mathbf{P = G\ sen}\ \alpha$$
$$\mathbf{F = G\ cos}\ \alpha$$

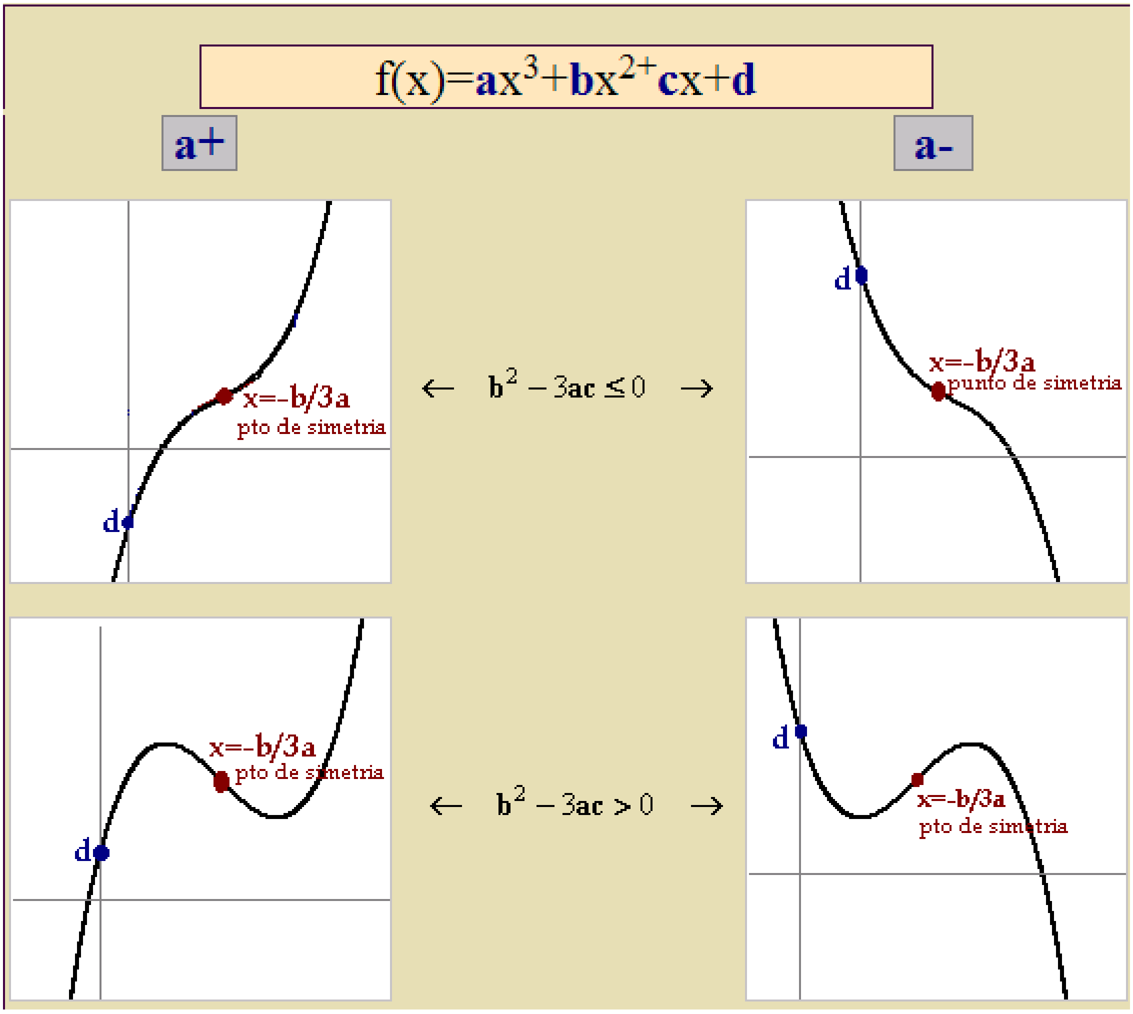
Dividiendo ambas ecuaciones tenemos: **tg α = P/F**

Aplicando conceptos matemáticos superiores a los que en este curso se imparten, se deduce que la fórmula es $y = a/2(e^{x/a} + e^{-x/a})$, siendo ***a*** la distancia desde el origen hasta la curva y **e** = 2'71.

4. REPRESENTACIÓN DE FUNCIONES POLINÓMICAS DE GRADO 3

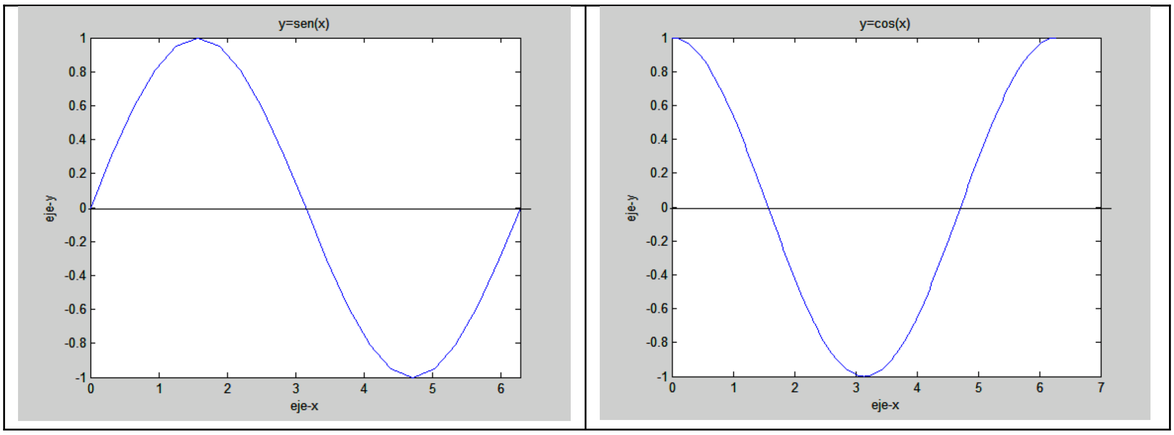
Las cúbicas: **$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$** son como sillas, unas con el asiento hundido y otras sin hundir, podemos observar que el signo de **a** decide si el respaldo de la silla está a la derecha o a la izquierda y todas son simétricas respecto del punto en el que la x vale **-b/3a**, punto de inflexión.

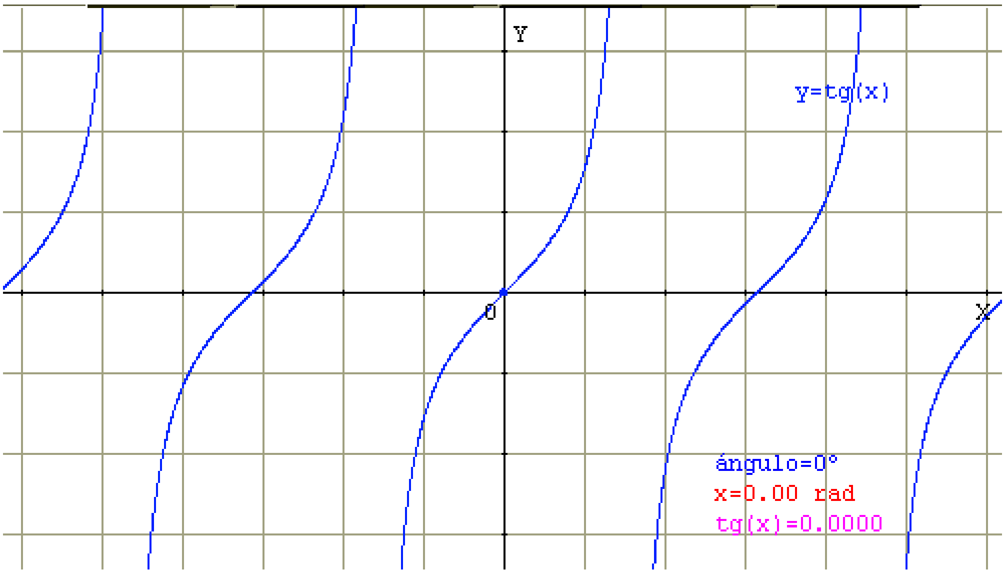
En este caso, NO basta con el coeficiente **a** del máximo grado para saber la forma de la función, tal y como ocurre con las gráficas de las funciones polinómicas de menor grado. Para polinomios de grado 3 se necesita estudiar el signo de **b^2-3ac**.



5. FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

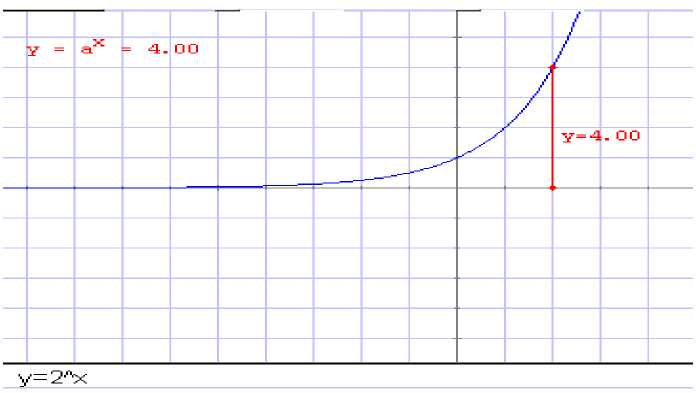
En la unidad didáctica 6 estudiamos cómo obtener el seno, el coseno y la tangente de un ángulo. En esta unidad vamos a estudiar las representaciones gráficas de las funciones seno, coseno y tangente.





6. FUNCIÓN EXPONENCIAL

La función exponencial es muy importante en matemáticas. Es la función con más presencia en los fenómenos observables. Así presentan comportamiento exponencial: la reproducción de una colonia de bacterias, la desintegración de una sustancia radiactiva, algunos crecimientos demográficos, la inflación, la capitalización de un dinero colocado a interés compuesto, etc.



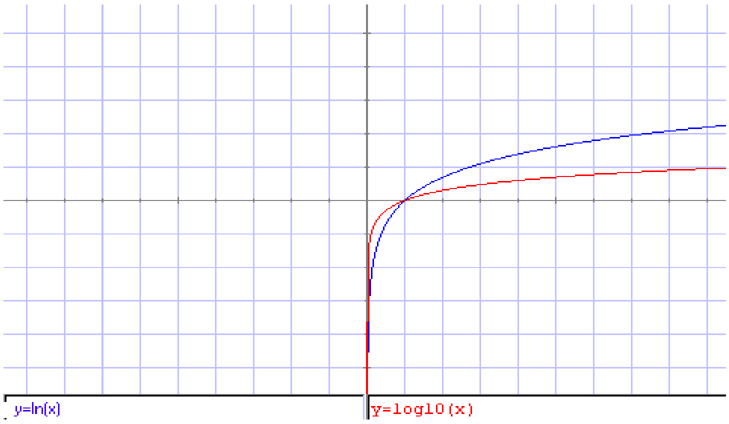
7. FUNCIÓN LOGARÍTMICA

La función logarítmica es muy importante en matemáticas. Constituye un poderoso instrumento en la práctica del cálculo numérico. Por ser la recíproca de la exponencial, esta función es una de las de más presencia en los fenómenos observables.

Se llaman funciones logarítmicas a las funciones de la forma **$f(x) = \log_a(x)$** donde **"a"** es constante (un número) y se denomina **la base del logaritmo**.

La función logarítmica que más se utiliza en matemáticas es la función "logaritmo neperiano", tiene base a=e, y se simboliza normalmente como **ln (x),** (la función logaritmo en base 10 se simboliza normalmente como **log(x)**).

En la siguiente gráfica están representadas las dos funciones logarítmicas mencionadas



Las funciones exponencial y logarítmica se dice que son una inversa de la otra.

Gráficamente se observa viendo que *son simétricas respecto a la recta y = x*, como se ve en la gráfica anterior. Numéricamente se observa que, siendo $f(x)=2^x$ y $g(x)=\log_2(x)$, $f(2)=2^2=4$ y $g(4)= \log_2(4)=2$, $f(3)=2^3=8$ y $g(8)= \log_2(8)=3$, etc.

9

Tasa de variación media e instantanea

Tema 9
Tasa de variación

1. ÍNDICE

2. INTRODUCCIÓN GENERAL A LA UNIDAD Y ORIENTACIONES PARA EL ESTUDIO

El concepto de derivada de una función en un punto, es un concepto similar al concepto de límite de una función en un punto

El concepto de derivada esta ligado a la imagen de recta tangente, o límite de rectas secantes.

Por ello nos centraremos en presentar el concepto, con su imagen visual, y posteriormente calcular derivadas de funciones.

3. OBJETIVOS ESPECÍFICOS

Concepto de derivada de una función en un punto

Concepto visual (o intuitivo) de derivada de una función en un punto

Calculo de derivadas inmediatas

Calculo de derivada del producto, y del cociente

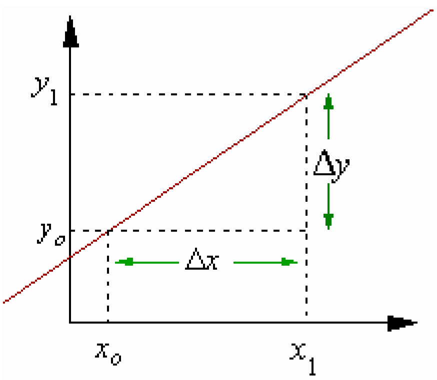
Regla de la cadena

4. DESARROLLO DE LOS CONTENIDOS

1. Visualización del concepto de derivada de la función en un punto

Podemos indicar que *la derivada* no es otra cosa que "*la pendiente de la recta tangente que corta a una función en un punto determinado*".

Idea: El concepto de pendiente de una recta,



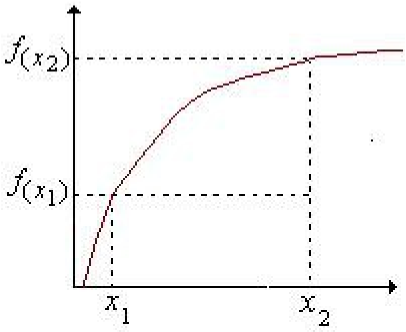
La idea de pendiente entre los puntos (x_0, y_0) y (x_1, y_1) seria $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$, es decir ver el incremento de la y dividido por el incremento de x

Nota: Es habitual encontrar señales en la carretera de pendiente pronunciada

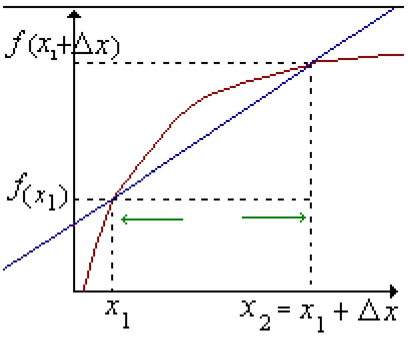
Donde nos indica el tanto por ciento de pendiente con el que nos enfrentamos. Una pendiente de un 12% seria que subimos 12 metros cuando recorremos 100.

2. Concepto de derivada de función en un punto

Tomemos dos puntos cualesquiera de una función; ambos poseen coordenadas, que en este caso llamaremos $(x_1, f(x_1))$ y $(x_2, f(x_2))$

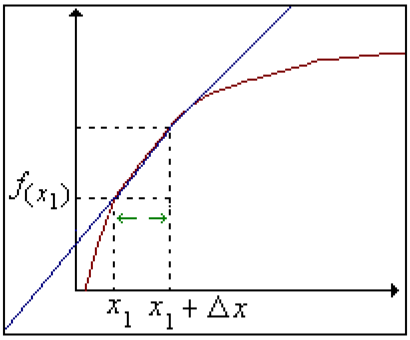


Podemos calcula la pendiente entre los puntos $(x_1, f(x_1))$ y $(x_2, f(x_2))$

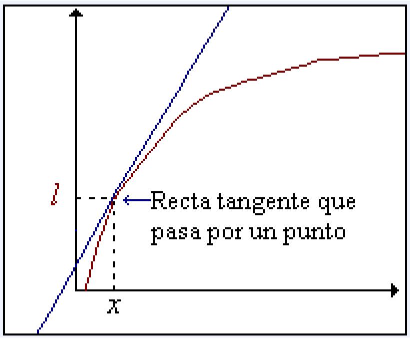


Tendríamos que la pendiente seria $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{x_1 - x_0}$

A medida que x_2 va tomando valores cada vez más cercanos a x_1, lo mismo ocurre con $f(x_2)$ que se va acercando a $f(x_1)$.



El proceso acerca a la recta, que pasa por ambos puntos, a la posición de la recta tangente (corta en un solo punto).



El proceso de llegar a la recta tangente a través de ir acercando las rectas secantes, es un proceso de cálculo de un límite de pendientes

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$ (definición de derivada en un punto)

Definición

Diremos que una función $f(x)$ es derivable en el punto x_0 si existe $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$

3. Calculo de derivadas

- La derivada de una constante es cero.
  $f(x) = 2$ $f'(x) = 0$

- La derivada de una recta es una constante.
  Claramente la recta secante de una recta es ella misma, por mucho que nos acerquemos al punto siempre tenemos la misma pendiente, que coincidirá con la pendiente de la recta

  Ejemplo
  $f(x) = x + 2$ $f'(x) = 1$
  $f(x) = 3x + 2$ $f'(x) = 3$

- Ejemplo: $f(x) = x^2$ $f'(x) = 2x$
  En general $f(x) = x^n$ $f(x) = nx^{n-1}$

  Ejercicios: $f(x) = 3x^2$, $f(x) = 4x^3 + 2x^2 - x$, $f(x) = -2x^3 + x - 7$

  Resolución de los ejercicios
  $f(x) = 3x^2$ $f'(x) = 6x$

$$f(x) = 4x^3 + 2x^2 - x \qquad f'(x) = 12x^2 + 4x - 1$$

$$f(x) = -2x^3 + x - 7 \qquad f'(x) = -6x^2 + 1$$

4. Tabla de derivadas inmediatas

Ejemplo		**En general**	
$f(x) = 2$	$f'(x) = 0$	$f(x) = K$	$f'(x) = 0$
$f(x) = x^2$	$f'(x) = 2x$	$f(x) = x^n$	$f(x) = nx^{n-1}$
$f(x) = \frac{1}{x}$	$f'(x) = \frac{-1}{x^2}$	$f(x) = \frac{1}{x^n} = x^{-n}$	$f'(x) = -nx^{-n+1}$
$f(x) = \ln x$	$f'(x) = \frac{1}{x}$		
$f(x) = sen(x)$	$f'(x) = \cos(x)$		
$f(x) = \cos(x)$	$f'(x) = -sen(x)$		
$f(x) = e^x$	$f'(x) = e^x$		

Estadística Descriptiva

1. ÍNDICE

2. INTRODUCCIÓN GENERAL A LA UNIDAD Y ORIENTACIONES PARA EL ESTUDIO

En algunos casos queremos estudiar un fenómeno, o cualidad de unos individuos, para ello debemos de recoger unos datos, normalmente una muestra que es una parte de la población a estudiar. Aun estudiando solamente una muestra de una población disponemos de demasiados datos, por lo que tenemos que encostrar una forma de resumir esta información. En este tema resumiremos los datos dados de una muestra, gracias a la media y la varianza.

Al final del tema debería de ser capaz de identificar la población, los individuos y la muestra, además de saber calcular la media y la varianza de una muestra.

3. OBJETIVOS ESPECÍFICOS

Concepto de individuo, población, variable aleatoria.

Muestra

Media muestral

Varianza

4. DESARROLLO DE LOS CONTENIDOS

1 Introducción Estadística Descriptiva

La estadística es una parte de la matemática aplicada y tiene como función ordenar, analizar y decidir sobre la estructura matemática asociada a masas de datos numéricos, obtenidos de la observación de fenómenos (físicos, económicos. psicológicos, sociológicos, etc.)

La tarea de describir y procesar de modo adecuado la masa de datos numéricos, proveniente de observaciones y experimentos, constituye el objetivo de la estadística descriptiva, que es la rama de la estadística que vamos a ver ene este tema.

La estadística descriptiva trata de determinar ciertos parámetros estadísticos, parámetros que nos dan información sobre los rasgos de un elemento tipo de colectivo (o población) estudiado, así como otros parámetros que miden la desviación respecto de este elemento tipo.

Resumen:

Es decir disponemos de muchos datos y tenemos que inventar un método para poder entender un conjunto de datos, el método es resumir esa información en unos parámetros, parámetros que llamamos parámetros estadísticos.

2 Parámetros estadísticos.

Una población estadística es un conjunto de individuos, objetos, etc.; sobre los que recae observaciones de un número finito de características.

Veamos cual seria la población y cada uno de los individuos de los siguientes ejemplos.

Ejemplo 1

El peso de los alumnos de una clase

Los individuos sería: cada uno de los alumnos

La población seria: los alumnos que hay en una clase.

Cada fenómeno (o lo que llamamos variable estadística) es el peso del alumno.

Ejemplo 2

Si le hacemos varios análisis de colesterol a un solo alumno de forma seguida

Individuos:

Población:

Fenómeno que estamos midiendo:

Ejemplo 3

Si hacemos unos análisis en un huerto de limoneros, para saber la cantidad de potasio en hoja, para hacer el experimento cojemos 10 hojas de cada árbol.

Individuo:

Población:

Fenómeno que estamos midiendo:

Llamaremos variable estadística al conjunto de valores que adopta una cualidad o propiedad de los elementos de la población estudiada.

2.1 Media de la población

Supongamos que tenemos diez alumnos en clase, los pesamos y obtenemos los siguientes datos

Alumno	1º	2º	3º	4º	5º	6º	7º	8º	9º	10º
Peso	70	54	57	63	56	78	86	54	69	71

La media de esta población

$$media = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{10} x_i}{10} = \frac{70+54+57+63+56+78+86+54+69+71}{10} = \frac{658}{10} = 6'58$$

¿Pero como calculamos el peso medio de todos los alumnos de la universidad?

Tenemos la posibilidad de pesar a todos los alumnos y calcular la media del peso de los alumnos, pero eso es muy costoso

Pero podríamos coger solamente unos cuantos, no podremos calcular la media real, pero tendríamos una media aproximada.

2.2 Concepto de muestra

Se entenderá por muestra una colección finita de elementos de la población estudiada

Entonces podemos obtener la media muestral. (la media de 10 alumnos elegido entre los miles de alumnos de la universidad)

Alumno	1º	2º	3º	4º	5º	6º	7º	8º	9º	10º
Peso	70	54	57	63	56	78	86	54	69	71

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{10} x_i}{10} = \frac{70+54+57+63+56+78+86+54+69+71}{10} = \frac{658}{10} = 6'58$$

Esta media muestral no es la media de la población, pero el parámetro estadístico que es la media muestral se acerca al valor de la media poblacional a medida que el número de alumnos en la muestra que cojamos sea más representativo (en principio más grande).

Supongamos que hacemos lo mismo para las notas de los alumnos, tomamos las notas de 10 alumnos.

Alumno	1º	2º	3º	4º	5º	6º	7º	8º	9º	10º
Nota	7	5	5	6	7	7	4	8	8	8

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{10} x_i}{10} = \frac{7+5+5+6+7+7+4+8+8+8}{10} = \frac{65}{10} = 6'5$$

Se llama *frecuencia absoluta* n_i de x_i al número de veces que aparece repetido dicho valor en los elementos de la muestra.

En este caso tendremos los valores discretos de las notas, y los valores de las frecuencias absolutos.

x_i	4	5	6	7	8
n_i	1	2	1	3	3

Podemos entonces calcular la media multiplicando los valores por sus frecuencias absolutas y dividiendo por el número de alumnos.

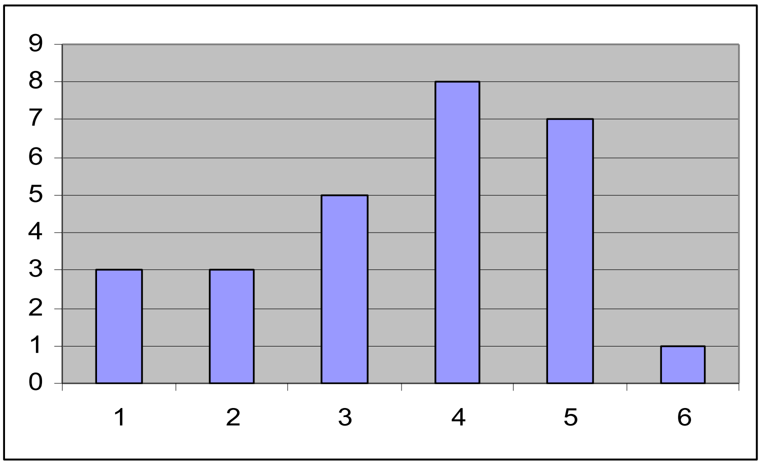
$$\bar{x} == \frac{\sum x_i n_i}{10} = \frac{4*1+5*2+6*1+7*3+8*3}{10} = \frac{65}{10} = 6'5$$

2.3 Varianza de la muestra

1º Ejemplo

Puede haber dos poblaciones que tengan la misma media , pero que sean muy diferentes.

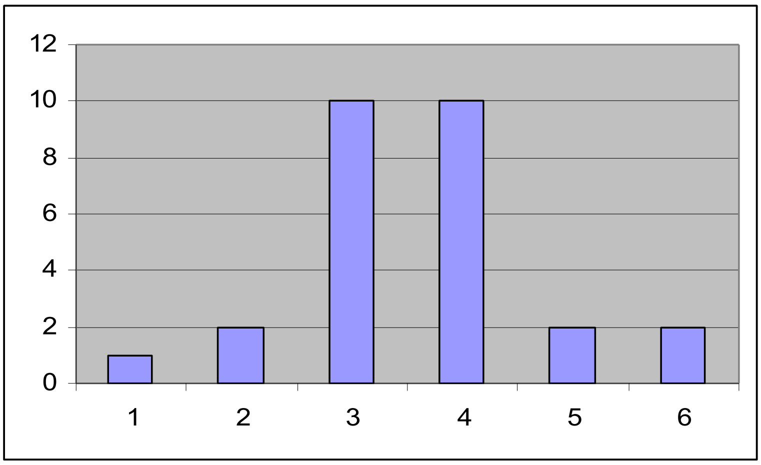
Valores	1	2	3	4	5	6
Frecuencias	3	3	5	8	7	1



$$\bar{x} = \frac{\sum x_i n_i}{27} = \frac{97}{27} = 3'59$$

2º Ejemplo

Valores	1	2	3	4	5	6
Frecuen-cias	1	2	10	10	2	2



$$\bar{x} = \frac{\sum x_i n_i}{27} = \frac{97}{27} = 3'59$$

Los dos muestreos tienen la misma media pero en cambio tienen formas muy diferentes en el segundo se concentran todos en los valores 3 y 4

La concentración se mide con la varianza. Y se calcula de la siguiente forma:

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{m}$$ en el caso de disponer de frecuencias absolutas

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}(x_i - \bar{x})^2 n_i}{m}$$

Calculémoslo para los dos ejemplos anteriores

1º Ejemplo

Valores	1	2	3	4	5	6		
Frecuencias	3	3	5	8	7	1	27	
$n_i x_i$	3	6	15	32	35	6	97	
							3,59	**media**
$(x_i - \bar{x})$	-2,59	-1,59	-0,59	0,41	1,41	2,41		
$(x_i - \bar{x})^2$	6,72	2,54	0,35	0,17	1,98	5,80		
$(x_i - \bar{x})^2 n_i$	20,16	7,61	1,76	1,33	13,87	5,80	50,52	
							1,87	**Varianza**

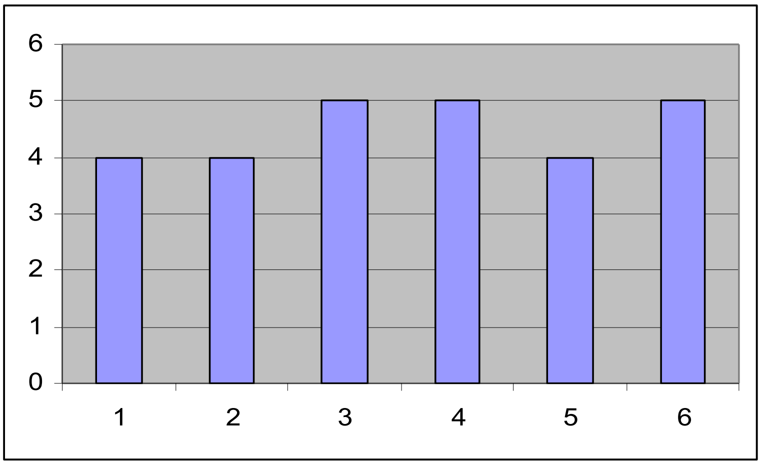
2º Ejemplo

Ejemplo 2

Valores	1	2	3	4	5	6		
Frecuencias	1	2	10	10	2	2	27	
$n_i x_i$	1	4	30	40	10	12	97	
							3,59	**media**
$(x_i - \bar{x})$	-2,59	-1,59	-0,59	0,41	1,41	2,41		
$(x_i - \bar{x})^2$	6,72	2,54	0,35	0,17	1,98	5,80		
$(x_i - \bar{x})^2 n_i$	6,72	5,07	3,51	1,66	3,96	11,59	32,52	
							1,20	**Varianza**

Tercer ejemplo

Valores	1	2	3	4	5	6
Frecuencias	4	4	5	5	4	5



Ejemplo 3

Valores	1	2	3	4	5	6	
Frecuencias	4	4	5	5	4	5	27
$n_i x_i$	4	8	15	20	20	30	97
							3,59 **media**
$(x_i - \bar{x})$	-2,59	-1,59	-0,59	0,41	1,41	2,41	
$(x_i - \bar{x})^2$	6,72	2,54	0,35	0,17	1,98	5,80	
$(x_i - \bar{x})^2 n_i$	26,89	10,15	1,76	0,83	7,92	28,98	76,52
							2,83 **Varianza**

Podemos observar como a medida que se concentran los datos la varianza es menor.

La varianza nos da como de puntiaguda es la representación grafica.

5. BIBLIOGRAFÍA

- Bujalance y otros. Matemáticas Especiales. 2ª Edición. Editorial Sanz y Torres (1998)
- http://descartes.cnice.mecd.es
- www.uoc.edu

6. EJERCICIOS DE AUTOCOMPROBACIÓN

Nos centraremos en hacer ejercicios de cálculo de media y varianza

1 Primer ejercicio sin frecuencias.

Tenemos los siguientes pesos de una muestra de alumnos de una clase

65	67	89	56	45	67	56	57	66	45

Calcula la media muestral y la varianza.

2 Segundo ejercicio sin frecuencias.

Tenemos los siguientes pesos de una muestra de alumnos de una clase

42	93	98	40	51	66	100	98	65	45

Calcula la media muestral y la varianza.

3 Ejercicio

De las muestras de los ejercicios 1 y 2, ¿Cuál de las dos tiene mayor varianza?.

4 Primer ejercicio con frecuencias.

Tenemos la valoración de un líder político H, hemos preguntado a 100 personas y la valoración obtenida del 1 al 4 es la siguiente.

Valoración	1	2	3	4
Frecuencia	25	30	40	5

Calcula la media muestral y la varianza.

5 Segundo ejercicio con frecuencias

Tenemos la valoración de otro líder político J, hemos preguntado a 100 personas y la valoración obtenida del 1 al 4 es la siguiente.

Valoración	1	2	3	4
Frecuencia	55	30	10	5

Calcula la media muestral y la varianza.

6 Con los resultados obtenidos en los ejercicios 4 y 5, ¿cuál es el político más valorado?.

UNIDAD DIDÁCTICA 13: Nociones elementales de probabilidad

1. ÍNDICE

2. INTRODUCCIÓN GENERAL A LA UNIDAD Y ORIENTACIONES PARA EL ESTUDIO

El estudio del azar es muy interesante, queremos saber las probabilidades que hay de que ocurra un suceso. Antes de adentraenos en el cálculo debemos de entender que es un suceso, un suceso equiprobable, suceso seguro, suceso imposible.

Tras esto la dificultad se encuentra en identificar claramente los sucesos, y el número de casos favorable y de casos posible.

En este tema el cálculo no tiene ninguna dificultad.

3. OBJETIVOS ESPECÍFICOS

Concepto de :

suceso

suceso equiprobable

suceso seguro e imposible

suceso incompatible y suceso compatible

Calculo de probabilidades de juegos de azar.

4. DESARROLLO DE LOS CONTENIDOS

1 Sucesos equiprobables

Supongamos que tenemos un dado cual es la probabilidad de sacar un 1,

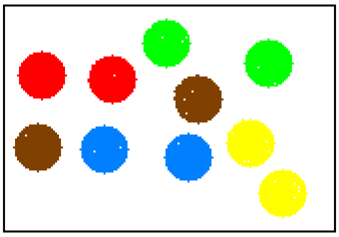
Todos sabemos que tiene la misma probabilidad de salir que un 6.

¿Quiere decir esto que si tiramos unas pocas veces un dado nos salen tantos 1 como 6?.

NO

Si tiramos muchísimas veces un dado, el número de veces que saldría cada número tendería a aproximarse.

2 La regla de Laplace



Tenemos en una urna 10 bolas del mismo tamaño pero de distintos colores. (La urna tiene 2 bolas de cada color). Se realiza el experimento de sacar una bola al azar (sin mirar).

Considera los siguientes sucesos:

a) Sale bola roja

b) Sale bola verde

c) Sale bola roja o marrón

d) Sale bola azul o verde

e) Sale bola amarilla

¿Cuáles de estos sucesos son equiprobables?

Supón que realizas la experiencia de sacar una bola al azar un millón de veces.

-¿Cuántas veces crees que saldrá, aproximadamente, cada tipo de bola?

-¿Qué fracción del total representa?

Si estás considerando el suceso "**sacar bola roja**", al número de bolas rojas que hay en la urna se le llama "**número de casos favorables**" (favorables al suceso), y al número **total** de bolas que hay en la bolsa se le llama "**número de casos posibles**"

Se llama **PROBABILIDAD TEÓRICA** de un **suceso A**, y se escribe **p(A)**, al cociente:	$p(A)=\frac{\text{Número de casos favorables}}{\text{Número de casos posibles}}$

Esta forma de calcular la probabilidad de un suceso se conoce con el nombre de **REGLA DE LAPLACE**	Para que esta regla se pueda aplicar a un suceso, todos los **casos posibles** deben ser **equiprobables**.

Por tanto la **probabilidad de sacar bola roja** en la urna anterior será: $p(\text{bola roja}) = \frac{2}{10} = \frac{1}{5} = 0.2$

Y la **probabilidad de sacar bola verde** será: $p(\text{bola verde}) = \frac{2}{10} = \frac{1}{5} = 0.2$

Análogamente **p(bola amarilla) = p(bola azul) = p(bola marrón) = 0.2**

-¿Cuál es la probabilidad de que al extraer una bola sea azul o verde? (Mira primero cuántos son ahora los casos favorables sacando de la urna las bolas que nos interesa)

-¿Cuál es la probabilidad de que al extraer una bola sea roja, amarilla o marrón? (Mira primero cuántos son ahora los casos favorables sacando de la urna las bolas que nos interesa)

Ejercicio 1
¿Cuál es la probabilidad de que ocurran los siguientes sucesos, al lanzar un dado: 

a) Salir el número 3
b) Salir un número par
c) Salir un número mayor que 1
d) Salir el número 8
e) Salir un número menor que 5

3 Suceso seguro y suceso imposible

Habrás observado en el ejercicio anterior que la respuesta a la pregunta d) es cero.
O sea, la probabilidad de que al lanzar un dado de cuatro caras salga el número 8 es cero, pues hay cero casos favorables. Se dice que es un **suceso imposible** y su **probabilidad es cero**.

Sin embargo la respuesta al apartado e) es uno, pues todos los casos posibles son favorables, todos los números de un dado de cuatro caras son menores que 5. Se dice que es un **suceso seguro** y su **probabilidad es uno**.

Propiedad

También habrás observado que las demás **probabilidades** que has calculado están **entre cero** y **uno**.

Ejercicio 2

¿Cuál es la probabilidad de que al lanzar un dado salga?

a) 3

b) 5

c) 7

d) número par

e) Múltiplo de 3

f) Numero distinto de cero

4 Sucesos compatibles e incompatibles

En el experimento **SACAR UNA CARTA** de una baraja española, (baraja de 40

cartas)
a) ¿Cuál es la probabilidad de que salga:
- El as de oros - Un caballo
- El rey de copas - Un basto?

Si realizas **mil veces** este experimento (sacar una carta), ¿cuántas veces esperas que se dé cada uno de los sucesos anteriores?

b) Si la carta es el **seis de espadas**, han ocurrido también otros muchos sucesos como "salir una espada", "salir un seis", "salir un número menor que 7", etc. En cambio no habrán ocurrido otros muchos sucesos como "salir el seis de oros", "salir el siete de espadas", "salir una copa", etc.

HAY MUCHOS SUCESOS QUE PUEDEN OCURRIR A LA VEZ Y OTROS QUE NO

Entre los sucesos del apartado **a)**, ¿hay algunos que pueden ocurrir a la vez?

c) Fíjate en los siguientes sucesos:
- **Salir una figura** (sota, caballo o rey)
- **Salir un oro**

Si sacas una carta mil veces ¿Cuántas veces esperas que se den los dos sucesos a la vez?

Compara los pares de sucesos del apartado a), o sea:
-Salir el as de oros y salir el rey de copas
-Salir un caballo y salir un basto
Y deduce si son o no compatibles.

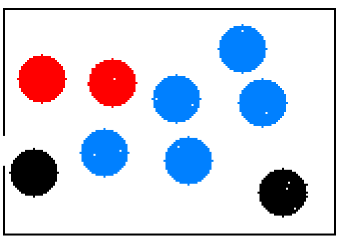
Definiciones:

Dos sucesos de un experimento aleatorio que **pueden ocurrir a la vez** se llaman **COMPATIBLES**

Si **no pueden ocurrir a la vez** se llaman **INCOMPATIBLES**

5 Probabilidad de que ocurra A o B

Una urna contiene **2 bolas rojas**, **3 bolas negras y 5 bolas azules**, todas del mismo tamaño.
Consideremos el experimento de **extraer una bola** de la urna <u>sin mirar.</u>



a) Calcula la probabilidad de que ocurra cada uno de los siguientes sucesos:

-Calcula la probabilidad de cada uno de los siguientes sucesos:
-Salir una bola que **no sea negra**
-Salir una bola que **no sea roja**

b) ¿Qué relación hay entre las tres probabilidades calculadas en el apartado anterior?

c) Imagínate ahora una urna que contiene bolas del mismo tamaño y de distinto color: rojo, negro y blanco.
No sabes cuántas hay de cada color, ni cuántas hay en total.
Pero alguien te informa de las siguientes probabilidades:

p(salir bola **roja**)=**1/2** p(salir bola **negra**)=**1/3** p(salir bola **blanca**)=**1/6**

¿Cuánto suman las tres probabilidades?
¿A qué es debido ese resultado?

Calcula la probabilidad de los siguientes sucesos:

Salir bola roja o negra

Salir bola roja o blanca

Salir bola negra o blanca

La probabilidad de que ocurra uno de los dos sucesos A o B, es igual a la SUMA de las probabilidades de que ocurra cada uno de ellos:

$$p(A+B)=p(A)+p(B)$$

Para que esto sea así, los dos sucesos, A y B, tienen que ser INCOMPATIBLES

6 Probabilidad de que ocurra A y B

Supongamos que tenemos dos dados cual es la probabilidad de sacar dos 6 al tirar los dos dados.

Estamos ante sucesos independientes.

La posibilidad de sacar un 6 en un dado es $P(A)=\frac{1}{6}$, la posibilidad de sacar un 6 con el segundo dado $P(B)=\frac{1}{6}$

Cual es la probabilidad de que suceda a la vez. $P(\mathrm{A\ y\ B})=\mathrm{P(A)\,P(B)}=\frac{1}{6}\frac{1}{6}=\frac{1}{36}$

La probabilidad de que ocurran a la vez dos sucesos A y B, es igual al PRODUCTO de las probabilidades de cada uno de ellos: $P(\mathrm{A\ y\ B}) = \mathrm{P(A)\,P(B)}$

5. BIBLIOGRAFÍA

y) Gonzalez, Carlos y otros. Matemáticas II. Editorial Editex (1997)

z) http://descartes.cnice.mecd.es

aa) www.uoc.edu

6. EJERCICIOS DE AUTOCOMPROBACIÓN

1 Cual es la probabilidad de sacar una cara al tirar una moneda

2 Cual es la probabilidad de sacar dos caras al tirar dos monedas

3 Si tomamos una baraja de 40 cartas y una moneda, cual es la probabilidad de sacar una cara y de sacar un rey. Tomando una carta y tirando una moneda a la vez

4 Cual es la probabilidad que nos toque el premio (a los 5 números) de la ONCE si compramos un solo número

5 Y si no compramos ningún número. Es mucha la diferencia.

6 Cual es la probabilidad de sacar de una baraja un rey o un oro

7 Cual es la probabilidad de sacar en una baraja un rey y que sea de oros

8 Cual es la probabilidad de sacar en una baraja copas o espadas

9 Cual es la probabilidad en una baraja de sacar reyes o sotas

10 Cual es la probabilidad en una baraja de sacar una carta que esta sea oros o copas

11 Cual es la probabilidad de tirar una moneda tres veces y que sacan tres caras.

7 SOLUCIONES DE LOS EJERCICIOS DE AUTOCOMPROBACIÓN

1. $P(cara) = \frac{1}{2}$

2 . $P(cara)P(Cara) = \frac{1}{2} * \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

3 . $P(cara)P(rey) = \frac{1}{2} * \frac{4}{40} = \frac{4}{80} = \frac{1}{20}$

4 . $P(54637) = \frac{1}{100000} = 0{,}00001$

5. $P(\sin comprar) = \frac{0}{100000} = 0$

7. $P(rey \quad de \quad oros) = \frac{1}{40}$

8 . $P(copas) = \frac{10}{40} \qquad P(espada) = \frac{10}{40}$

$P(copas) + P(espadas) = \frac{10}{40} + \frac{10}{40} = \frac{20}{40} = \frac{1}{2}$

9. $P(reyes) = \frac{4}{40} \qquad P(sotas) = \frac{4}{40}$

$P(reyes) + P(sotas) = \frac{4}{40} + \frac{4}{40} = \frac{8}{40} = \frac{2}{10}$

10 . $P(oros) = \frac{10}{40} \qquad P(copas) = \frac{10}{40}$

$P(oros) + P(copas) = \frac{10}{40} + \frac{10}{40} = \frac{20}{40} = \frac{1}{2}$

11. $P(cara)P(Cara)P(Cara) = \frac{1}{2} * \frac{1}{2} * \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$