MATEMÁTICAS

PRIMERO GES

ÍNDICE

PRIMERO DE GES

PRIMERO GES

1

Números Enteros

TEMA 1

NÚMEROS ENTEROS

Si se intenta restar 2 – 5, el resultado que se obtiene no es un número natural. Es necesario ampliar el conjunto de los números naturales a otro donde operaciones como ésta se puedan realizar.

Los números enteros permiten contar tanto aquello que se tiene como lo que falta o se debe. El conjunto de todos los números enteros está formado por los números positivos, los negativos y el cero.

Los enteros positivos son los que permiten contar aquello que se tiene. Los enteros negativos son los que permiten contar las deudas. Estos son los números naturales precedidos del signo menos (–). Si debemos cinco euros, escribimos –5 €.

1. VALOR ABSOLUTO Y REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE NÚMEROS ENTEROS

El **valor absoluto** de un número es el que resulta de suprimir su signo. Se representa el número entre barras:

$$|-3| = 3$$

se lee: «valor absoluto de –3 es 3».

$$|+8| = 8$$

se lee: «valor absoluto de +8 es 8».

Los números enteros se representan en una recta, colocando el cero en el centro. A la izquierda del cero, los números negativos y, a la derecha, los positivos.

–4 –3 –2 –1 0 +1 +2 +3 +4

Realiza las actividades 1, 2 y 3.

2. ADICIÓN DE NÚMEROS ENTEROS

Para sumar dos o más números con el **mismo signo** se suman sus valores absolutos y se pone el mismo signo que tienen.

(+ 120) + (+60) = +180

(–5) + (–12) = –17

Para sumar números de **diferente signo** restamos sus valores absolutos y ponemos el signo del que tenga mayor valor absoluto.

(–5) + (+9) = +4

(+10) + (–23) = –13

Realiza las actividades 4, 5, 6, 7, 8 y 34.

3. SUSTRACCIÓN DE NÚMEROS ENTEROS

Cuando a un número le restamos otro más pequeño, nos dará resultado positivo, mientras que si a un número le restamos otro mayor, el resultado nos dará negativo.

(–3) – (–7) = +4

(+5) – (+8) = –3

En la práctica, hemos de cambiar el signo de la resta por el de la suma, y permutar todos los signos que hubiera dentro del paréntesis siguiente por sus opuestos.

$$(-1) - (-8) = (-1) + (+8) = +7$$

$$(-7) - (-5) = (-7) + (+5) = -2$$

Realiza las actividades 9, 10, 11, 12, 13, 35, 36 y 38.

4. MULTIPLICACIÓN Y DIVISIÓN DE NÚMEROS ENTEROS

Para hallar el producto de dos números enteros se multiplican sus valores absolutos y el signo será **positivo** si los dos factores son del mismo signo, y **negativo** si los dos factores son de diferente signo.

$$(-3) \cdot (-4) = +12$$

$$(+9) \cdot (+2) = +18$$

$$(-4) \cdot (+6) = -24$$

$$(+3) \cdot (-2) = -6$$

En la división ocurre lo mismo, es decir, se dividen los valores absolutos de los números enteros y el signo sigue las mismas reglas que para la multiplicación.

$$\frac{+6}{+3} = +2\,; \qquad \frac{-12}{-4} = +3\,;$$

$$\frac{+15}{-3} = -5\,; \qquad \frac{-21}{+3} = -7$$

<u>Regla de los signos</u>

+ · + = +	+ : + = +
+ · – = –	+ : – = –
– · + = –	– : + = –
– · – = +	– : – = +

Si hubiese varios factores, el valor final se calcula multiplicando sus valores absolutos, y el signo lo determinaremos de la siguiente manera: si hay un número par de signos negativos, éste será positivo, y será negativo en caso contrario.

$$(-2) \cdot (+7) \cdot (-5) \cdot (+3) \cdot (+6) = +1260$$

$$(+3) \cdot (-5) \cdot (-2) \cdot (+9) \cdot (-4) = -1080$$

Realiza las actividades 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 23, 24, 26 y 37

5. PROPIEDAD DISTRIBUTIVA Y SACAR FACTOR COMÚN

Para multiplicar un número entero por una suma, multiplicamos ese número por cada uno de los sumandos.

$$a \cdot (b + c) = a{\cdot}b + a{\cdot}c$$

$$(+3){\cdot}[(-2) + (-4)] = (+3){\cdot}(-2) + (+3){\cdot}(-4)$$

Para sacar factor común, el factor que se repite en una serie se escribe fuera del paréntesis, quedando dentro de él el resto de los factores conservando los signos que tenían.

$$(-3){\cdot}(+7) + (-3){\cdot}(-9) - (-3){\cdot}(+10) =$$

$$= (-3){\cdot}[(+7) + (-9) - (+10)]$$

Realiza las actividades 21 y 22.

6. POTENCIACIÓN DE NÚMEROS ENTEROS

Para calcular la potencia se multiplica la base tantas veces por sí misma como indica el exponente.

$$\mathit{base} \rightarrow 5^{3 \leftarrow \mathit{exponente}} = 5 \bullet 5 \bullet 5 = 125$$

Cuando la **base es positiva**, el resultado es siempre **positivo**, independientemente del exponente

$$(+4)^4 = (+4)\cdot(+4)\cdot(+4)\cdot(+4) = +256$$

$$(+3)^5 = (+3)\cdot(+3)\cdot(+3)\cdot(+3)\cdot(+3) = +243$$

Cuando la **base es negativa** y el **exponente par**, el resultado es positivo. Por el contrario, cuando el **exponente es impar**, el resultado es negativo.

$$(-2)^6 = (-2)\cdot(-2)\cdot(-2)\cdot(-2)\cdot(-2)\cdot(-2) = +64$$

$$(-4)^3 = (-4)\cdot(-4)\cdot(-4) = -64$$

7. OPERACIONES CON POTENCIAS

Cómo se multiplican potencias de la misma base

Para multiplicar potencias que tienen la misma base, se deja la misma base y se suman los exponentes.

Ejemplos:

$$a^3 \cdot a^4 = a^7 \text{ (Fórmula general)}$$

$$5^3 \cdot 5^4 = (5\cdot5\cdot5) \cdot (5\cdot5\cdot5\cdot5) =$$

$$= 5\cdot5\cdot5\cdot5\cdot5\cdot5\cdot5 = 5^7$$

o lo que es igual $5^{3+4} = 5^7$

$$(-3)^6 \cdot (-3)^4 = (-3)^{6+4} = (-3)^{10}$$

$$7^8 \cdot 7^{15} = 7^{23}$$

Cómo se dividen potencias de la misma base

Para dividir potencias de la misma base, se deja la misma base y se restan los exponentes.

Ejemplos:

$$4^8 : 4^2 = \frac{4\bullet4\bullet4\bullet4\bullet4\bullet4\bullet\cancel{4}\bullet\cancel{4}}{\cancel{4}\bullet\cancel{4}} =$$

$$= 4\cdot4\cdot4\cdot4\cdot4\cdot4 = 4^6$$

$$5^{12} : 5^8 = 5^{12-8} = 5^4$$

$$(-6)^9 : (-6)^5 = (-6)^4$$

Cómo se eleva una potencia a otra potencia

Para elevar una potencia a otra potencia, se deja la misma base y se multiplican los exponentes.

Ejemplos:

$$[(-2)^3]^2 = (-2)^3 \cdot (-2)^3 = (-2)^{3+3} = (-2)^6$$

$$[(-2)^3]^5 = (-2)^{3\times5} = (-2)^{15}$$

$$[(3)^2]^{-4} = 3^{-8} = \frac{1}{3^8}$$

Cómo se eleva un producto a una potencia

Para elevar un producto a una potencia, se eleva cada uno de los factores a dicha potencia.

Ejemplos:

$$(5 \cdot 4 \cdot 3)^6 = 5^6 \cdot 4^6 \cdot 3^6$$

$$[(-3) \cdot 2 \cdot (-5)]^3 = (-3)^3 \cdot 2^3 \cdot (-5)^3$$

De la misma propiedad, en sentido contrario, se desprende que para multiplicar potencias de distintas bases y exponentes iguales, se multiplican las bases y se deja el exponente común.

Ejemplo:

$$4^3 \cdot 7^3 \cdot 3^3 = (4 \cdot 7 \cdot 3)^3 = 84^3$$

Potencia de un cociente

Para elevar un cociente a una potencia, se elevan dividendo y divisor a esa potencia.

Ejemplo:

$$\left(\frac{28}{3}\right)^3 = \frac{28}{3} \bullet \frac{28}{3} \bullet \frac{28}{3} = \frac{28^3}{3^3}$$

$$\left(\frac{-3}{5}\right)^2 = \frac{(-3)^2}{5^2} = \frac{9}{25}$$

Las igualdades anteriores se pueden utilizar también en sentido contrario: Para dividir potencias de distintas bases y exponentes iguales, se dividen las bases y se deja el exponente común.

Ejemplo:

$$24^3 : 6^3 = (24 : 6)^3 = 4^3 = 64$$

De forma general,

$$\frac{a^3}{b^3} = \left(\frac{a}{b}\right)^3$$

Propiedad uniforme

Si los dos miembros de una igualdad se elevan al mismo exponente, resulta otra igualdad.

Ejemplo:

$$3 \cdot 2 = 6 \Rightarrow (3 \cdot 2)^2 = 6^2$$

Realiza las actividades 28 y 29.

8. IDENTIDADES NOTABLES

Cuadrado de una suma

El cuadrado de una suma es igual al cuadrado del primer término, más el cuadrado del segundo, **más** el doble del producto del primero por el segundo.

$$(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$$

$$(5a + 2b)^2 = 25a^2 + 4b^2 + 20ab$$

Cuadrado de una resta

El cuadrado de una resta es igual al cuadrado del primer término, más el cuadrado del segundo, **menos** el doble del producto del primero por el segundo.

$$(a – b)^2 = a^2 + b^2 – 2ab$$

$$(2a – 3b)^2 = 4a^2 + 9b^2 – 12ab$$

Suma por diferencia

El producto de una suma por una diferencia, cuando los términos son iguales, es igual al cuadrado del primer término menos el cuadrado del segundo término; es decir, suma por diferencia es igual a diferencia de cuadrados.

$$(a + b) \cdot (a – b) = a^2 – b^2$$

$$(5 + b) \cdot (5 – b) = 5^2 – b^2 = 25 – b^2$$

Realiza las actividades 30, 31 y 32.

9. RADICACIÓN DE NÚMEROS ENTEROS

La radicación es la operación inversa de la potenciación.

$$\sqrt[3]{343} = 7$$

ya que $7^3 = 343$

$$\sqrt[\text{Indice}]{\text{radicando}} \longrightarrow \boxed{\text{radical}}$$

Para hallar la raíz cuadrada de un número hay que seguir los siguientes pasos:

1. Primero se divide el número en grupos de dos cifras comenzando por la derecha. El grupo de la izquierda podrá tener una o dos cifras.
2. Para calcular la primera cifra, se extrae la raíz del primer grupo de la izquierda; el cuadrado de la cifra hallada se resta de dicho grupo, y a la derecha del resto se baja el grupo siguiente.
3. Para calcular la segunda cifra se separa con un punto la cifra de la derecha del primer resto radical; se forma el duplo de la raíz hallada y el número que quedó a la izquierda del punto se divide por dicho duplo, siendo el cociente la segunda cifra de la raíz.
4. Para comprobar si la cifra hallada es buena, se escribe a la derecha del duplo de la primera, y el número así formado se multiplica por dicha cifra: si el producto se puede restar del número que sirvió de dividendo, junto con la cifra separada, la cifra es buena, y si no se puede restar, se irá rebajando de unidad en unidad hasta que se pueda efectuar dicha resta.
5. Hallada la segunda cifra, a la derecha del resto radical, se baja el grupo siguiente y se procede lo mismo que se hizo anteriormente, hasta agotar los grupos del radicando.

Si la raíz es de **índice par** y **radicando positivo** tiene **dos solucio-**

nes cuyo valor absoluto es el mismo pero con signo distinto.

Ejemplo:

$$\sqrt[4]{16}$$

tiene como soluciones **+2** y **–2**, ya que $(+2)^4 = 16$ y $(-2)^4 = 16$.

```
√ 40.07.56   | 633
 –36         | 123 · 3 = 369        Operaciones
  040.7      | 126 · 3 = 3789         40 | 12
 – 369       |                        04   3
   0385.6    |
  – 3789     |                       385 | 126
     0067    |                       007   3
```

Si la raíz es de **índice par** y **radicando negativo** no tiene solución entre los números enteros, ya que no existe ningún número entero que elevado a exponente par dé resultado negativo.

No existe $\sqrt{-16}$

La raíz de **índice impar** y **radicando positivo** es siempre positiva.

$$\sqrt[3]{64} = 4$$

ya que $4^3 = 64$

La raíz de **índice impar** y **radicando negativo** es siempre negativa.

$$\sqrt[5]{-32} = -2$$

ya que $(-2)^5 = -32$

Realiza la actividad 33.

10. OPERACIONES COMBINADAS. PRIORIDAD DE OPERACIONES

La jerarquía de las operaciones con números enteros es la siguiente: Primero hay que operar los corchetes y los paréntesis; luego, potencias y raíces; después, multiplicación y división y, por último, la suma y la resta. Para alterar esta prioridad en las operaciones es necesario utilizar paréntesis. Si hay varios paréntesis, se van resolviendo desde el más interno al más externo.

$\mathbf{-3 + 2 \cdot 5^2 =} -3 + 2 \cdot 25 = -3 + 50 = 47$

$\mathbf{((-3) + 2 \cdot 5) \cdot (-2)^3 + 1 =} ((-3) + 10) \cdot$
$\cdot (-2)^3 + 1 = 7 \cdot (-2)^3 + 1 = 7 \cdot (-8) + 1 =$
$= -56 + 1 = -55$

Realiza las actividades 27 y 28.

A C T I V I D A D E S

1. Expresa con números enteros las siguientes situaciones:

a) Una temperatura de 17 grados bajo cero.
b) Una altura de 3.421 m.
c) Una temperatura de 28 grados.
d) Una profundidad de 200 m bajo el nivel del mar.
e) El tercer sótano.
f) Tener una deuda de 5.000 €.

2. Representa de manera gráfica los siguientes números enteros:

+5; **–3**; **–1**; **+7**; **0**; **–4**; **–9**.

3. Escribe en cada caso el signo que corresponda. (< ó >)

+5	+15	+12	–3
–1	+1	+50	+40
+1	+5	+3	–2
–4	–5	0	–3

4. Calcula:

a) (–5) + (+4) b) (+8) + (–6)

c) (–3) + (–12) d) (+234) + (+123)

5. Efectúa las sumas siguientes:

a) (–7) + (–4) + (+2) + (+12) + (–3) + (–9) =

b) (+2) + (–6) + (–5) + (+5) + (–9) + (+3) =

c) (–5) + (–4) + (+2) + (+8) + (–3) + (–1) =

d) (+7) + (–3) + (–2) + (–6) + (+5) + (+8) =

e) (–3) + (+7) + (–4) + (+2) + (–10) + (+6) =

6. Haciendo las operaciones, comprueba que se verifica la siguiente igualdad:

[(+5) + (–2)] + (–6) = (+5) + [(–2) + (–6)]

7. Halla:

a) [(+5) + (–3)] + [(–2) + (+6)] =

b) [(–4) + 7] + {(–3) + [(+8) + (–5)]} =

c) {[(+6) + (–3)] + (+4)} + [(–1) + (+7)] =

8. Sabiendo que una recta AB=+20, BC=+15, CD=+40, DE=–12, EF=+60, FG=–30, halla la longitud de **AG**.

9. Calcula:

a) (+23) – (–15)   b) (–12) – (–35)

c) (+8) – (+12)   d) (–24) – (+15)

10. Halla:

a) (–4) + (–3) – (+2) =

b) (+8) – (–2) + (+6) =

c) (–5) + (–2) – (–6) =

d) (+6) + (–2) + (–5) =

e) (–5) + (+9) – (+6) =

11. El matemático griego Euclides murió el año 374 a.C. ¿Cuánto tiempo ha transcurrido desde la muerte del gran matemático?

12. Calcula los valores de las operaciones siguientes:

a) (–5) – (–3) – (+7) =
b) (–12) – (–18) + (–21) =
c) (–9) + (–14) – (–23) + (+6) =
d) (–5) – (–11) – (+16) + (–30) + (+4) =

13. Calcula el valor de las operaciones siguientes:

a) (–10) + (–15) – (–35) + (+9) – (+14) =

b) (–8) – (+16) – (–10) + (–40) + (+1) =

c) (+45) – (–60) + (–5) – (+6) =

d) (–8) – (–9) + (–11) – (+6) =

14. Efectúa los siguientes productos:

a) (–4) · (+6) =

b) (+2) · (–3) =

c) (–3) · (–5) =

15. Efectúa:

a) (–8) · (+3) =

b) (–53) · (+8) =

c) (+5) · (–4) =

d) (+11) · (+27) =

e) (+6) · (–2) =

f) (–34) · (+12) =

g) (–42) · (+13) =

h) (+25) · (+16) =

16. Calcula el número ***x*** definido por la fórmula ***x* = a · b**, sabiendo que:

a) a = –3, b = +7

b) a = –5, b = –6

c) a = +4, b = +9

d) a = +2, b = –1

17. Calcula:

a) (–3) · (–5) + (–1) · (+3) =

b) (+2) · (–7) – (+8) · (–3) =

c) (+4) · (–6) + (+1) · (–9) – (–5) · (–1) =

18. Calcula el número **N = *x* · *y* – *u* · *z***, sabiendo que

x = +11, *y* = –8, *u* = –6, *z* = –15.

19. Halla el valor numérico de la expresión:

A = (+2) · (*x* – *y*) + *x* (*x* – *z*),

siendo ***x*** = –7, ***y*** = +2, ***z*** = –1.

20. Halla el valor numérico de la expresión:

(+12) · (*x* + *y*) – *x* · *y*, para *x*=+12, *y*=–25.

21. Aplica la ley distributiva a los productos:

a) (+a) · (b + 5) =

b) n · (m – 3) =

c) (a – 2) · (–4) =

d) (m – p) · (a – b) =

22. Saca factor común y opera:

a) 148·12 – 148·9 =

b) 548·56 – 548·46 =

c) 83·25 – 83·8 – 83·13 =

d) 263·23 + 263·17 =

e) 46·7 + 46·12 – 46·17 =

f) 25·16 + 25·40 – 25·52 =

23. Efectúa las siguientes divisiones:

a) (–18) : (–6) =

b) (–63) : (–9) =

c) (+63) : (–7) =

24. Calcula:

a) (–14) : (+2) =

b) (–7) : (+7) =

c) (–25) : (–5) =

d) (+27) : (–9) =

e) (+18) : (+3) =

f) (+42) : (+6) =

25. Efectúa:

a) (21 + 70 – 42) : 7 =

b) (105 + 75 – 125) : 5 =

c) (66 – 42 – 18) : 6 =

d) (195 – 90 + 75) :15 =

e) (256 + 80 – 144) : 16 =

f) (625 – 500 – 75) : 25 =

26. Calcula el número entero que resulta de las operaciones en los siguientes casos:

a) $(-4) \bullet \dfrac{15}{5} =$

b) $\left(-\dfrac{15}{5}\right) \bullet (-7) =$

c) $\frac{(-24)\ \bullet\ 3}{2\ \bullet\ 3} =$

d) $-\frac{\frac{-9}{18}}{-6}$

e) $\frac{-20}{\frac{5}{-2}} =$

f) $\frac{-\frac{36}{4}}{\frac{6}{2}}$

g) $\frac{16}{-4} \bullet (-5) + \frac{-12}{3} \bullet (-2) =$

h) $\frac{-\frac{64}{4} \bullet (-6)}{8 \bullet \frac{-12}{-3}} =$

i) $\frac{-(-5) + (-10) \bullet \frac{12}{-3}}{-\frac{15}{5} \bullet (-3)} =$

j) $\frac{(-8) \bullet \frac{-18}{3} + \frac{30}{-5} \bullet (-4)}{\left(-\frac{8}{4}\right) \bullet (-3) - \frac{24}{-4}} =$

27. Efectúa:

a) $36 : (-24 + 6) - 2 \cdot (-8 + 5)$

b) $[-18 : (-9) + 2 \cdot (-7)] : (-3) + (-9) : (-1)$

c) $-(-1) - [-2 \cdot (-3) - 4 \cdot (-2)] : (-2)$

d) $-7 \cdot [8 + 5\,(-1)] + 24 : (-13 + 7)$

e) $-2 + 3 \cdot 5 - 4 \cdot 6 : 12 \cdot (7 - 1)$

28. Opera y simplifica:

a) $(-2)^3 \cdot (-2)^5 : (-2)^6 =$

b) $3^4 \cdot (-3)^3 =$

c) $(-3)^4 : 3^2 + (-2)^3 \cdot (5 - 2 \cdot 3^2) =$

d) $(12 - 2^3 \cdot 3) : (-2)^2 + 3 =$

e) $-(-2)^2 - 2^2 =$

f) $-(-3)^3 \cdot (-1)^3 - (-2)^3 + 2^3 =$

g) $[(-1)^2 - 2^2 - (-3)^2] : [1 + 6 : 2] =$

h) $-2^4 + [3 - 5 \cdot (2 - 7)] : (-2)^2 =$

29. Expresa en una sola potencia:

a) $2^5 \cdot 2^6 =$

b) $3^3 \cdot 3^2 =$

c) $2^7 \cdot 5^6 =$

d) $6^8 \cdot 6^2 =$

e) $10^4 : 10^3 =$

f) $7^{12} : 7^8 =$

g) $\left(5^6\right)^4 =$

h) $\left(8^2\right)^6 =$

i) $\left(3^5\right)^2 =$

j) $(2 \cdot 4 \cdot 3)^3 =$

k) $\left(\frac{5^4}{7^4}\right) =$

l) $\left(\frac{9^3}{3^3}\right) =$

30. Desarrolla:

a) $(3 + x)^2 =$

b) $(x - 5)^2 =$

c) $(2x + 3y)^2 =$

d) $(x - 4y)^2 =$

e) $(6 - 2x)^2 =$

f) $(x + 2y)^2 =$

g) $(4 - x)^2 =$

h) $(l + m)^2 =$

31. Efectúa los productos:

a) $(2a + 1)(2a - 1) =$

b) $(4x - 3)(4x + 3) =$

c) $(x + 4)(x - 4) =$

d) $(3x + y)(3x - y) =$

e) $(2x + 5)(2x - 5) =$

f) $(a - 3b)(a + 3b) =$

32. Escribe en forma de producto:

a) $67^2 - 33^2 =$

b) $16x^2 - 9 =$

c) $74^2 - 36^2 =$

d) $49x^2 - 25 =$

e) $(x + y)^2 - (x - y)^2 =$

f) $4x^2 - 9a^2 =$

g) $x^2 - 64 =$

h) $16x^2 - 121b^2 =$

i) $x^2 - 1 =$

33. Halla las siguientes raíces:

a) $\sqrt[3]{27}$ b) $\sqrt{121}$ c) $\sqrt{625}$

d) $\sqrt[4]{256}$ e) $\sqrt[3]{-8}$ f) $\sqrt{4257}$

g) $\sqrt{3198}$ h) $\sqrt{14735}$ i) $\sqrt{689243}$

34. Por la tarde, el termómetro de la terraza de Jaime marcaba 5º C y, por la noche, la temperatura había bajado 8 º C. ¿Qué temperatura hacía?

35. Carmen aparca en el sótano 2 y sube andando cinco pisos para mantenerse en forma. ¿En qué planta se encuentra ahora? Su amigo Pedro ha aparcado en el sótano 4 y ha subido tres plantas. ¿En qué piso se encuentra? Si Pedro quisiera hablar con Carmen, ¿cuántos pisos tendría que subir o bajar?

36. El cinco de enero la temperatura en León era de cinco grados bajo cero y, en Sevilla, de catorce grados. ¿Qué diferencia de temperatura había entre las dos ciudades?

37. Un concurso otorga 60 € por cada respuesta acertada y descuenta 35 € por cada respuesta incorrecta. Un participante acertó 15 de 20 respuestas. ¿Qué cantidad ganó?

38. En mi cuenta bancaria había 1.532 €. el 31 de diciembre. Cada mes me ingresan 2.100 € de nómina y llegaron facturas de 130 € de luz, 96 € de teléfono y la cuota mensual de Cáritas de 24 €. ¿Qué saldo tendré el 30 de junio de ese mismo año? (Recuerda que las facturas de luz y teléfono son bimensuales).

2

Divisibilidad

TEMA 2

DIVISIBILIDAD

La divisibilidad es un caso particular del concepto de división. Se llama divisibilidad a una división exacta, es decir, cuyo resto es cero.

1. MÚLTIPLOS Y DIVISORES

Un número es **múltiplo** de otro cuando lo contiene un número exacto de veces.

21 es múltiplo de 3, porque 3 · 7 = 21

40 es múltiplo de 10, porque 10 · 4 = 40

Para indicar que un número es múltiplo de otro, se coloca sobre éste un punto.

$$14 = \dot{7}$$

que se lee «14 es múltiplo de 7».

Un número es **divisor** de otro cuando lo divide exactamente.

4 es divisor de 28, porque

$$\frac{28}{4} = 7$$

Realiza las actividades 1 y 2.

2. REGLAS DE DIVISIBILIDAD

Para saber si un número es divisible por otro, efectuamos la división. Si nos da exacta, lo es. Pero podemos averiguar si un número es divisible por 2, 3, 5 y 11 utilizando las reglas de divisibilidad.

Un número es **divisible por 2** cuando acaba en 0 o en cifra par.

230, 658, 1092,... son múltiplos de 2.

Un número es **divisible por 3** cuando al sumar el valor absoluto de sus cifras nos da 3 o múltiplo de 3.

123, 999, 2010,... son múltiplos de 3.

Un número es **divisible por 5** cuando acaba en 0 o en 5.

45, 670, 205,... son múltiplos de 5.

Un número es **divisible por 11** cuando la suma de sus cifras de lugar par menos la suma de sus cifras de lugar impar da 0, 11 o múltiplo de 11.

121, 3091, 660,... son múltiplos de 11.

Realiza las actividades 3 y 4.

3. NÚMEROS PRIMOS Y COMPUESTOS

Números primos son aquellos que no tienen más divisores que ellos mismos y la unidad.

El **2**, el **5**, el **31**,... son números primos.

Números compuestos son los que, además de sí mismo y la unidad, tienen otros divisores.

El **4**, el **9**, el **28**,... son números compuestos.

Realiza la actividad 5.

4. DESCOMPOSICIÓN EN FACTORES PRIMOS

Todo número compuesto se puede descomponer en un producto de factores primos.

$$20 = 2 \cdot 2 \cdot 5$$

$$75 = 3 \cdot 5 \cdot 5$$

Para descomponer números altos se utiliza el siguiente procedimiento: A la derecha del número que queremos descomponer se traza una raya vertical y, a continuación, el número primo más pequeño posible.

$$\begin{array}{r|l} 360 & 2 \\ & \end{array}$$

Se divide el número en cuestión por el número primo, y se anota el resultado bajo el primero.

$$\begin{array}{r|l} 360 & 2 \\ 180 & \end{array}$$

Se procede a continuación de igual manera, si es posible, por el mismo número primo y, si no, por los siguientes por los que sea divisible.

$$\begin{array}{r|l} 360 & 2 \\ 180 & 2 \\ 90 & 2 \\ 45 & 3 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

$$360 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$$

Nota: Cuando, al hacer la descomposición factorial, se llega a un número del que no se sabe si es primo o no, hay que dividirlo sucesivamente por los primos conocidos. Cuando el cociente sea menor que el divisor, entonces ese número es número primo.

Realiza la actividad 6.

5. DIVISORES DE UN NÚMERO. MÁXIMO COMÚN DIVISOR

Los conjunto de divisores de un número resulta de la combinación de los factores de dicho número. Todos los divisores del número 36 serán:

$$1;\ 2;\ 2^2;\ 3;\ 3^2;\ 2 \cdot 3;\ 2 \cdot 3^2;\ 2^2 \cdot 3;\ 2^2 \cdot 3^2$$

El Máximo Común Divisor (**m.c.d.**) de dos o más números es el mayor número que los divide exactamente. En la práctica, se descomponen factorialmente los números dados y se elige aquellos factores comunes que tengan menor exponente.

$$108 = 2^2 \cdot 3^3$$
$$360 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$$
$$\textbf{m.c.d.}\ (108,360) = 2^2 \cdot 3^2 = 36$$

6. MÚLTIPLOS DE UN NÚMERO. MÍNIMO COMÚN MÚLTIPLO

El conjunto de los múltiplos de un número dado se obtiene multiplicando dicho número por la serie de los números naturales.

Múltiplos de 7 = (0, 7, 14, 21, 28,...)

El Mínimo Común Múltiplo (**m.c.m.**) de dos o más números es el menor de sus múltiplos comunes distinto de cero. En la práctica, se descomponen factorialmente los números dados y se eligen los factores comunes, y los no comunes, que tengan mayor exponente.

$$108 = 2^2 \cdot 3^3$$
$$360 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$$
$$\textbf{m.c.m.}\ (108,360) = 2^3 \cdot 3^3 \cdot 5 = 1080$$

Realiza las actividades 7 y 8.

7. RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Tenemos tres cables que miden 110, 90 y 75 metros respectivamente, y queremos hacer trozos iguales de la mayor longitud posible. ¿Qué medirá cada trozo?

Para que los trozos sean de igual longitud deben medir un número de metros que sea ***divisor*** de las tres medidas que nos han dado. Como queremos que la longitud sea máxima, calcularemos ***el más grande de los divisores comunes***, el m.c.d.

$$110 = 2 \cdot 5 \cdot 11$$
$$90 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5$$
$$75 = 3 \cdot 5^2$$
$$\textbf{\textit{m.c.d.}}\ (110,90,75) = 5$$

Por lo tanto, cada trozo medirá 5 m.

Tres ciclistas recorren una pista circular. El primero tarda 48 segundos en recorrerla; el segundo, 56 segundos y, el tercero, 60 segundos. ¿Cuándo volverán a encontrarse en el punto de partida los tres corredores? ¿Cuántas vueltas habrá dado cada uno?

Volverán a encontrarse en el punto de partida cuando transcurra un tiempo que sea ***múltiplo*** de 48, 56 y 60. La primera vez que coincidan será, precisamente, cuando ***este múltiplo sea el menor posible***, es decir, el ***m.c.m.***

$$48 = 2^4 \cdot 3$$
$$56 = 2^3 \cdot 7$$
$$60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$$

$$\text{m.c.m. } (48, 56, 60) = 2^4 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = 1680$$

Por lo que volverán a encontrase a los 1680 segundos, es decir, 28 minutos.

El primer ciclista habrá dado 35 vueltas, es decir, 1680 : 48.

El segundo ciclista habrá dado 30 vueltas, es decir, 1680 : 56.

El tercer ciclista habrá dado 28 vueltas, es decir, 1680 : 60.

Realiza las actividades de la 9 a la 18.

A C T I V I D A D E S

1. Busca los tres primeros múltiplos de 7, 15 y 20.

2. Halla los divisores de 13, 20, 25, 32 y 45.

3. Sin realizar la división, di cuáles de estos números son divisibles por 2, por 3, por 5 o por 11.

420	209
15.203	121
981	407
882	599
534.417	70.321
745	1375
307	90
321	225
135	143
711	57
153	38.715
1.221	65.739

4. Escribe cinco números de cuatro cifras que sean divisibles por 2 y por 3 a la vez.

5. Forma la tabla de los primeros números primos (hasta 100).

6. Descompón estos números en factores primos:

63; 144; 39; 61; 900; 1.188; 315; 15.147; 49.896; 872; 1.398; 2.345.

7. Halla divisores comunes de los números:

a) 30 y 45 b) 110 y 385.

8. Halla el m.c.m. y el m.c.d. de los siguientes números:

a) 30 y 150. b) 15 y 45.

c) 21, 45 y 56. d) 68, 84 y 148.

e) 144, 30 y 42. f) 75, 90 y 50.

g) 33 y 55. h) 14, 21 y 18.

9. Para transportar 214 viajeros, una compañía emplea autocares de 56 plazas. ¿Irán todos llenos?

10. Con tres cables que miden 28, 42 y 84 m respectivamente, queremos hacer trozos iguales y de la mayor longitud posible. ¿Cuánto medirá cada trozo? ¿Cuántos podremos hacer con cada cable?

11. Para recorrer una pista circular, tres ciclistas salen a la vez de la línea de meta. Si tardan 4, 5 y 6 minutos respectivamente en dar una vuelta, ¿cuánto tiempo tardarán en coincidir de nuevo en la línea de meta?

12. Dos astros se acercan a la Tierra; uno cada 120 años y el otro cada 50. Si se acercaron juntos a la Tierra en 1.982, ¿qué año volverán a aproximarse juntos?

13. En 1.994 coincidieron tres localidades en la celebración de una fiesta. Si en una de ellas se celebra cada 12 años, en otra cada 15 y en la tercera cada 21, ¿en qué año volverán a coincidir?

14. Dos amigos se han citado por equivocación en distintas cafeterías de la misma calle a las 8 de la tarde. Uno sale cada 10 minutos y el otro cada 15 para ver si se ven. ¿Cuándo coincidirán?

15. Tres autobuses salen al mismo tiempo de Alicante para realizar tres líneas diferentes. El primero tarda 8 horas en regresar; el segundo, 12 horas y, el tercero, 15. ¿Cuándo volverán a salir los tres autobuses juntos de nuevo?

16. Una sirena toca cada 450 segundos; otra, cada 250 y, una tercera, cada 600 segundos. Si a las cuatro de la mañana han coincidido tocando las tres, ¿a qué hora volverán a coincidir?

17. Para hacer *mousse* de chocolate dispongo de treinta huevos, 75 pastillas de mantequilla y 180 onzas de chocolate. ¿Cuál será el máximo número de veces que podrá hacer *mousse* de chocolate de forma que en todos emplee el mismo número de unidades de cada ingrediente?

18. Se quiere embaldosar una sala de exposiciones de 1.620 cm de largo por 980 cm de ancho con baldosas cuadradas lo más grande posible y enteras. ¿Cuál será la longitud del lado de cada baldosa?

3

Números Fraccionarios

TEMA 3

NÚMEROS FRACCIONARIOS

En la vida cotidiana empleamos frecuentemente las fracciones. Las estamos usando cuando decimos: *Déme ½ litro de leche. Esta botella contiene ¾ de litro. Sólo tomé ½ pastilla. Faltan ¾ de hora para llegar. ¿Cómo quieres la cerveza, en botella de 1/3 o de 1/5? Póngame la mitad de cuarto de jamón*...

Hasta ahora has trabajado con números naturales y con enteros, pero existen muchas situaciones para las que es preciso ampliar el concepto de número.

La división entre dos números ***a*** y ***b*** se expresa matemáticamente de la forma $\frac{a}{b}$ o bien a/b (siendo b γ 0, pues la división entre 0 carece de sentido)

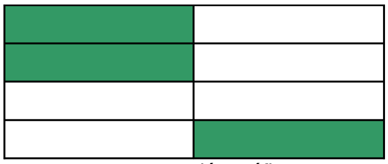
La expresión a/b recibe el nombre de fracción; al número ***a*** se le llama **numerador** y al ***b***, **denominador**.

1. CONCEPTO DE FRACCIÓN

Una fracción es cada una de las partes iguales en que queda dividida la unidad. Una fracción viene representada de la siguiente manera:

$$\frac{3 \;\leftarrow \textit{numerador}}{8 \leftarrow \textit{denominador}}$$

donde el **denominador** indica el número de partes iguales en que hemos dividido la unidad, y el **numerador** indica el número de partes que cogemos.



Representación gráfica

Realiza las actividades 1, 2 y 23.

2. CÓMO SE LEEN Y ESCRIBEN LAS FRACCIONES

Una fracción se lee nombrando primero el numerador y a continuación el denominador seguido del sufijo –**avo** si éste es mayor de 10.

$$\frac{6}{14}$$

se lee **seis catorceavos**.

Si los denominadores no superan la decena se leen: medios, tercios, cuartos,..., décimos.

$\frac{5}{7}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{9}$
cinco séptimos	**un octavo**	**tres novenos**

3. CLASES DE FRACCIONES

Las **fracciones propias** son aquellas cuyo numerador es menor que su denominador. Son menores que la unidad.

$$\frac{5}{10}$$

Las **fracciones impropias** son aquellas cuyo numerador es mayor que su denominador. Son mayores que la unidad.

$$\frac{12}{7}$$

La cantidad que acabamos de escribir también la podríamos representar como la suma de su parte entera más su parte fraccionaria. Es lo que se llama un **número mixto**.

$$1+\frac{5}{7}$$

Para transformar un número mixto en fracción, multiplicamos la parte entera por el denominador de la fracción, le sumamos el numerador y el resultado será el nuevo numerador. El denominador seguirá siendo el mismo.

$$2+\frac{6}{4}=\frac{2\bullet 4+6}{4}=\frac{14}{4}$$

Para pasar una fracción impropia a número mixto se realiza la división, sin sacar decimales: el cociente será la parte entera, el resto será el nuevo numerador y el denominador sigue siendo el mismo.

Por ejemplo, vamos a pasar $\frac{19}{5}$ a número mixto: Primero dividimos

$$\begin{array}{r|l} 19 & 5 \\ \hline 4 & 3 \end{array}$$

y lo representaremos $3\frac{4}{5}$.

Las **fracciones iguales a la unidad** son las que tienen iguales el numerador y el denominador.

$$\frac{12}{12}$$

Las **fracciones inversas** son aquellas en las que el numerador de la primera es el denominador de la segunda, y el numerador de la segunda es el denominador de la primera.

$$\frac{3}{4} \text{ y } \frac{4}{3}$$

son fracciones inversas.

Cualquier número entero es igual a una fracción cuyo numerador es ese número entero y de denominador, la unidad

$$8=\frac{8}{1}$$

Realiza la actividad 3.

4. FRACCIÓN COMO COCIENTE EXACTO DE DOS NÚMEROS

Una fracción actúa como operador sobre los números o cantidades multiplicando al número por el numerador y dividiendo el resultado por el denominador.

Ejemplo:

$\frac{2}{3}$ de 24 es igual a:

$$\frac{2 \times 24}{3}=16$$

Realiza la actividad 4.

5. FRACCIONES IGUALES O EQUIVALENTES

Las fracciones que con términos diferentes representan la misma cantidad las llamamos **fracciones equivalentes**.

$$\frac{3}{4}=\frac{6}{8}=\frac{15}{20}$$

Si queremos obtener fracciones equivalentes a una dada, basta multiplicar el numerador y el denominador por el mismo número.

$$\frac{1}{3} \rightarrow \frac{1 \cdot 2}{3 \cdot 2} = \frac{2}{6}; \quad \frac{1 \cdot 3}{3 \cdot 3} = \frac{3}{9}$$

Si lo que queremos hallar es la mínima fracción equivalente a una dada, lo que se conoce como **fracción irreducible**, basta con dividir el numerador y el denominador de ésta por su máximo común divisor.

$$\frac{9}{27} \rightarrow \frac{9:9}{27:9} = \frac{1}{3}$$

Una propiedad de las fracciones equivalentes es que si se multiplican en cruz, resulta el mismo número.

$$\frac{2}{5} = \frac{6}{15}$$

$$2 \cdot 15 = 5 \cdot 6$$

Realiza las actividades 6 y 7.

6. FRACCIONES EQUIVALENTES CON EL MISMO DENOMINADOR

Se calcula el mínimo común múltiplo de los denominadores, y éste será el denominador común de las fracciones.

Si las fracciones son, por ejemplo,

$$\frac{4}{6}; \quad \frac{2}{5}; \quad \frac{7}{15}$$

obtendríamos primero el m.c.m. de los denominadores

$$\left.\begin{array}{l} 6 = 2 \cdot 3 \\ 5 = 5 \\ 15 = 3 \cdot 5 \end{array}\right| \quad \text{m.c.m.} = 2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$$

operando a continuación de la siguiente manera:

$$\frac{4}{6} = \frac{4 \cdot 5}{6 \cdot 5} = \frac{20}{30}$$

$$\frac{2}{5} = \frac{2 \cdot 6}{5 \cdot 6} = \frac{12}{30}$$

$$\frac{7}{15} = \frac{7 \cdot 2}{15 \cdot 2} = \frac{14}{30}$$

Realiza la actividad 5.

7. COMPARACIÓN DE FRACCIONES

De igual denominador

Es mayor la fracción que tiene mayor numerador.

Ejemplo:

$$\frac{4}{5} > \frac{2}{5}$$

De igual numerador

Es mayor la fracción que menor denominador tenga.

Ejemplo:

$$\frac{3}{4} > \frac{3}{5}$$

De distinto numerador y denominador

Se reducen las fracciones a común denominador y se aplica el primer caso.

Ejemplo:

$$\frac{7}{8} \text{ y } \frac{4}{5}$$

Hallando el mínimo común múltiplo:

$$\frac{35}{40} \text{ y } \frac{32}{40}$$

Por lo que

$$\frac{7}{8} > \frac{4}{5}$$

Realiza la actividad 8.

8. ADICIÓN DE FRACCIONES

Para sumar fracciones de **igual denominador**, se suman los numeradores y se deja el mismo denominador.

$$\frac{6}{9} + \frac{2}{9} = \frac{8}{9}$$

Para sumar fracciones con **distinto denominador** primero hay que buscar fracciones equivalentes a las dadas con el fin de que tengan el mismo denominador, y luego se suman.

En la práctica, se busca el mismo común múltiplo de los denominadores, siendo éste el nuevo denominador común. Luego, de una en una, se divide el nuevo denominador de la fracción por el antiguo y se multiplica el resultado por el antiguo numerador. El número resultante será el nuevo numerador. Una vez se hayan transformado así todas las fracciones, se suman.

$$\frac{3}{4} + \frac{4}{6} = \frac{9}{12} + \frac{8}{12} = \frac{17}{12}$$

9. RESTA DE FRACCIONES

Para restar fracciones de **igual denominador** se restan los numeradores y se coloca el mismo denominador.

$$\frac{5}{8} - \frac{2}{8} = \frac{3}{8}$$

Para restar fracciones de **distinto denominador** primero hay que buscar fracciones equivalentes a las dadas con el fin de que tengan el mismo denominador, y luego se restan.

$$\frac{3}{12} - \frac{4}{18} = \frac{9}{36} - \frac{8}{36} = \frac{1}{36}$$

Realiza la actividad 9.

10. MULTIPLICACIÓN DE FRACCIONES

Para hallar el producto de fracciones, el numerador se obtiene de la multiplicación de los numeradores y el denominador de la multiplicación de los denominadores.

$$\frac{4}{6} \cdot \frac{5}{9} = \frac{20}{54}$$

11. COCIENTE DE FRACCIONES

Como la división es la operación inversa de la multiplicación, el realizar una división entre dos fracciones equivale a multiplicar una de ellas por la inversa de la otra.

$$\frac{5}{7} : \frac{8}{10} = \frac{5}{7} \cdot \frac{10}{8} = \frac{50}{56}$$

Realiza las actividades 10, 12 y 13.

12. POTENCIAS DE FRACCIONES DE EXPONENTE ENTERO

Para elevar una fracción a una potencia, elevamos tanto el numerador como el denominador a dicha potencia.

$$\left(\frac{3}{4}\right)^4 = \frac{3}{4}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{3}{4} = \frac{3^4}{4^4} = \frac{81}{256}$$

Cuando el exponente es negativo, equivale a invertir la fracción y colocarle el exponente positivo.

$$\left(\frac{3}{4}\right)^{-4} = \left(\frac{4}{3}\right)^4 = \frac{4}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{3} = \frac{4^4}{3^4} = \frac{256}{81}$$

13. RADICACIÓN DE FRACCIONES

Para hallar la raíz de una fracción, se halla la raíz tanto del numerador y como la del denominador.

$$\sqrt{\frac{16}{25}} = \frac{\sqrt{16}}{\sqrt{25}} = \frac{4}{5}$$

Realiza las actividades 11, 18, 19 y 20.

14. FRACCIONES Y NÚMEROS DECIMALES

Al efectuar la división en un número fraccionario se obtiene un número decimal o un número entero.

Ejemplo:

$$\frac{2}{5} = 0{,}4\,; \qquad \frac{7}{2} = 3{,}5$$

A estos números se les llaman **decimales exactos**.

Hay otras fracciones cuyo resultado no es exacto, por lo que aparecen un número infinito de cifras decimales, algunas de las cuales se repiten periódicamente. Se llaman **números periódicos**, y la fracción de la que proceden se llama **fracción generatriz**. Al grupo de cifras decimales que se repite se denomina **período**, y se representa colocándole encima un arco.

Cuando la cifra comienza a repetirse justo detrás de la coma, se le llama **periódico puro**, y en caso contrario, **periódico mixto**.

Puro	$\frac{4}{9} = 0{,}4444... = 0{,}\overset{\frown}{4}$
Mixto	$\frac{5}{12} = 0{,}41666... = 0{,}41\overset{\frown}{6}$

15. CÁLCULO DE LA FRACCIÓN GENERATRIZ

A partir de decimales exactos

Se escribe el número entero y se divide por la unidad seguida de tantos ceros como cifras hay detrás de la coma.

Ejemplo:

$$1{,}234 = \frac{1234}{1000} = \frac{617}{500}$$

A partir de números decimales periódicos puros

En el numerador, se escribe el número entero y se le resta el número que hay delante del período y, en el denominador, se escriben tantos nueves como cifras haya debajo del período.

Ejemplo:

$$1{,}\overset{\frown}{2} = \frac{12-1}{9} = \frac{11}{9}$$

A partir de números decimales periódicos mixtos

En el numerador se escribe el número completo y se le resta el número hasta el período, y en el denominador se escriben tantos nueves como cifras hay debajo del período y tantos ceros como cifras decimales hay.

$$1{,}2\overset{\frown}{3}4 = \frac{1234-123}{900} = \frac{1111}{900}$$

Realiza las actividades 14, 15, 16 y 17.

16. NOTACIÓN CIENTÍFICA

La notación científica sirve para expresar de forma abreviada números muy grandes o muy pequeños, facilitando su comprensión. Por ejemplo, el peso de una molécula de agua es de M=0'00000000000000000000003 g, un número largo y difícil. Podemos expresar dicho número mediante potencias de 10 de la siguiente manera:

$$M = 3\cdot 10^{-23}$$

De igual manera, podemos expresar la velocidad de la luz en el vacío, que es de 300.000 km/s como $3\cdot 10^{5}$ km/s.

Realiza las actividades 21 y 22.

Realiza las actividades desde la 24 a la 31.

A C T I V I D A D E S

1. Completa las siguientes frases:

a) En una hora hay ______ cuartos de hora.

b) He comido los 2/5 de un melón, sobran los _______ .

c) Un día es ______ de una semana.

d) 43 años son los ______ de un siglo.

e) Los 3/7 de una semana son __ _________ días.

2. Representa gráficamente estas fracciones:

$$\frac{2}{3}\ ;\ \frac{3}{5}\ ;\ \frac{4}{7}\ ;\ \frac{2}{5}$$

3. Pasa de mixto a fracción y viceversa:

a) $5+\frac{2}{3}=$

b) $4+\frac{3}{5}=$

c) $7+\frac{8}{10}=$

d) $\frac{14}{4}=$

e) $\frac{23}{5}\ =$

f) $\frac{56}{9}\ =$

4. Halla:

a) los dos tercios de 15.
b) los cuatro quintos de 20.
c) los seis séptimos de 42.
d) los cinco novenos de 117.

5. Representa gráficamente estas fracciones, usando la misma unidad:

$$\frac{3}{4}\ ,\ \frac{6}{8}$$

¿Qué te sugiere el resultado?

6. Dos de las siguientes fracciones son equivalentes. Indica cuáles son, razonando tu respuesta:

$$\frac{1}{5}\ ;\ \frac{1}{15}\ ;\ \frac{3}{15}\ ;\ \frac{2}{5}$$

7. Simplifica las fracciones siguientes:

a) $\frac{28}{36}$

b) $\frac{306}{1452}$

c) $\frac{54}{96}$

d) $\frac{72}{144}$

e) $\frac{98}{105}$

f) $\frac{598}{648}$

g) $\dfrac{539}{833}$ h) $\dfrac{162}{189}$

i) $\dfrac{114}{288}$ j) $\dfrac{11}{88}$

k) $\dfrac{1955}{3910}$ l) $\dfrac{98}{147}$

m) $\dfrac{1503}{2388}$ n) $\dfrac{273}{637}$

ñ) $\dfrac{343}{7007}$ o) $\dfrac{594}{648}$

8. Ordena las siguientes fracciones:

a) de mayor a menor.

$$\frac{3}{7}\ ;\ \frac{4}{5}\ ;\ \frac{1}{9}\ ;\ \frac{3}{5}$$

b) de menor a mayor.

$$\frac{4}{10}\ ;\ \frac{13}{20}\ ;\ \frac{7}{20}\ ;\ \frac{3}{7}$$

9. Efectúa las siguientes operaciones:

a) $\dfrac{1}{2}+\dfrac{2}{3}+\dfrac{3}{2}+\dfrac{4}{3}=$

b) $\dfrac{1}{3}+\dfrac{5}{4}+\dfrac{7}{6}+\dfrac{9}{2}=$

c) $2+\dfrac{5}{7}+\dfrac{3}{5}+\dfrac{7}{2}=$

d) $\dfrac{9}{10}+\dfrac{8}{15}+\dfrac{11}{60}=$

e) $\dfrac{1}{12}+\dfrac{1}{16}+\dfrac{1}{18}=$

f) $\dfrac{8}{72}+\dfrac{71}{144}+\dfrac{5}{36}+\dfrac{8}{27}=$

g) $\dfrac{7}{5}-\dfrac{2}{5}=$

h) $\dfrac{15}{8}-\dfrac{3}{4}=$

i) $\dfrac{21}{4}-\dfrac{17}{6}=$

j) $\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{8}-\dfrac{1}{40}=$

k) $\dfrac{3}{2}-\dfrac{2}{121}-\dfrac{5}{11}=$

l) $1-\dfrac{8}{11}=$

m) $\dfrac{21}{24}-2-\dfrac{11}{64}+10+\dfrac{26}{64}=$

n) $\left(\dfrac{2}{3}+\dfrac{3}{4}+\dfrac{1}{12}\right)-\dfrac{3}{2}=$

ñ) $\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}\right)-\dfrac{1}{6}=$

o) $\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{3}{4}\right)-\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{6}\right)=$

10. Opera:

a) $\dfrac{23}{34}\bullet\dfrac{2}{3}=$

b) $\dfrac{24}{102}\bullet\dfrac{51}{72}=$

c) $\dfrac{6}{7}\bullet\dfrac{7}{8}\bullet\dfrac{8}{9}=$

d) $\dfrac{1}{9}\bullet 2\bullet\dfrac{3}{4}=$

e) $\left(1+\dfrac{2}{3}\right)\bullet\dfrac{2}{5}=$

f) $\left(5+\frac{2}{3}\right)\cdot\left(1+\frac{4}{17}\right)=$

g) $\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)\cdot 6=$

h) $\frac{3}{5}:\frac{7}{10}=$

i) $\frac{6}{11}:\frac{5}{22}=$

j) $9:\frac{2}{3}=$

k) $\left(4-\frac{1}{3}\right):\frac{11}{6}$

l) $\left(8+\frac{1}{8}\right):\left(2+\frac{7}{16}\right)=$

m) $6\cdot\left(\frac{19}{3}-\frac{37}{6}\right)+\left(\frac{5}{7}\cdot\frac{2}{5}\right)=$

n) $\left(\frac{5}{8}+\frac{3}{4}+2\right):\left(\frac{25}{4}-6\right)=$

ñ) $\left[\left(3-\frac{2}{5}\right):\left(\frac{7}{2}+1\right)\right]:3=$

o) $\dfrac{\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)\cdot\frac{6}{5}}{\frac{7}{3}\cdot\left(1-\frac{4}{7}\right)}=$

p) $\dfrac{\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{3}\right)\cdot\frac{6}{5}}{2\frac{1}{3}-1\frac{3}{4}}=$

11. Calcula las siguientes potencias y raíces:

a) $\left(\frac{2}{3}\right)^4=$ b) $\left(\frac{5}{7}\right)^3=$ c) $\left(\frac{8}{9}\right)^5=$

d) $\sqrt{\frac{49}{121}}=$ e) $\sqrt{\frac{9}{64}}=$ f) $\sqrt{\frac{36}{81}}=$

12. Calcula:

a) $\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{1}{2}=$ b) $2:\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{4}\right)=$

c) $\frac{1}{5}:\left(1-\frac{1}{2}\right)+3=$ d) $\frac{7}{4}-\frac{1}{3}:\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{5}\right)=$

13. Efectúa las siguientes operaciones:

a) $2-\left[1-\left(\frac{1}{3}+\frac{2}{5}\right)\right]:3=$

b) $\dfrac{\left(1+\frac{1}{3}\right):\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{5}\right)}{2}=$

c) $\dfrac{1+\frac{1}{5}}{3+\frac{1}{3}}:\dfrac{2}{1+\frac{1}{4}}=$

d) $1+\dfrac{1}{1+\frac{1}{2}}=$

14. Determina la fracción generatriz de los siguientes números decimales exactos:

a) 0’22 b) 4’38 c) 3’25

d) 6’1 e) 3’125 f) 4’333

g) 0’255 h) 0’1344 i) 0’2546

15. Calcula las fracciones generatrices de los siguientes números decimales periódicos puros:

a) 1’010101... b) 1’2222...

c) 4’666... d) 2’212121...

e) 1’124124... f) 3’025025...

g) 0’024024... h) 0’2525...

16. Calcula las fracciones generatrices de los siguientes números decimales periódicos mixtos:

a) 1’2333... b) 3’41222...

c) 0’2010101... d) 5’1214214...

e) 0’12343434... f) 2’137272...

17. Efectúa las operaciones indicadas:

a) 2’3333... + 1’22121... =

b) 2’3 · 1’222... =

c) 1’010101... : $\frac{2}{3}$ =

d) 3’141414... · 1’25 =

e) 2’03131... : 0’4444... =

f) 1’7777... – 0’252525... =

g) $\frac{1'\overset{\frown}{3}+2'0\overset{\frown}{1}}{3'2}=$

h) 2’555... – 1’252525... =

18. Efectúa en cada caso las operaciones indicadas:

a) $\left(\frac{2}{3}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 =$

b) $\left(\frac{1}{4}\right)^3 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^4 =$

c) $\left(-\frac{1}{4}\right)^2 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right)^3 =$

d) $\left[\left(-\frac{2}{3}\right)^3\right]^4 =$

e) $\left[\left(\frac{3}{3}\right)^2 : \left(\frac{1}{4}\right)^3\right]^2 =$

f) $\left[\left(\frac{5}{3}\right)^2 \cdot \left(\frac{3}{10}\right)^2\right]^3 =$

g) $\left(\frac{2}{5}\right)^3 \cdot \left(\frac{15}{7}\right)^2 : \left(\frac{2}{35}\right)^2 =$

19. Escribe de distintas formas las siguientes expresiones:

a) 2^{-1} b) 100^{-2}

c) $0'01^{-3}$ d) $0'01^{3}$

e) $\left(\frac{1}{4}\right)^{-1}$ f) $\left(-\frac{1}{4}\right)^{-1}$

g) $[(0'01)^2]^{-5}$ h) $\left[\left(\frac{1}{3}\right)^{-2}\right]^2$

20. Calcula las siguientes potencias:

a) $\left(\frac{3}{7}\right)^6 : \left(\frac{3}{7}\right)^3 =$

b) $\left(\frac{1}{3}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^3 : \left(\frac{1}{3}\right)^4 =$

c) $\left(-\frac{2}{3}\right)^{-1} : \left(-\frac{2}{3}\right)^3 =$

d) $\left(-\frac{1}{7}\right)^4 \cdot \left(-\frac{1}{7}\right)^{-3} =$

e) $(-3)^{-1} : \left(-\frac{1}{3}\right)^2 =$

f) $\left[(0'2)^{-2} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{3}\right]^{2} =$

g) $\left[\left(\frac{2}{3}\right)^{5} : \left(-\frac{3}{2}\right)^{3}\right]^{-1} =$

h) $\left(\frac{0'2}{0'3}\right)^{3} : \left(-\frac{3}{2}\right)^{-2} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{5} =$

21. Escribe con notación científica las siguientes expresiones:

a) Treinta y cuatro diezmilésimas
b) Cuatrocientos treinta mil millones
c) Doce millonésimas
d) Doce billones
e) Medio millón
f) Dos cienmilésimas

22. Escribe con notación científica los números:

a) 2341'16

b) $324 \cdot 10^{5} \cdot 10^{-18}$

c) $\frac{3 \cdot 10^{-5} \cdot 10^{-18}}{2 \cdot 10^{6}}$

e) 0'0000013

f) 0'0000000017 · 15

g) 42.000.000.000

23. a) En una semana, ¿qué fracción representa un día? ¿Y seis días?
b) ¿Qué unidad fraccionaria son 5 segundos respecto de 1 minuto? ¿Y respecto de una hora?
c) ¿Cuántos meses es ¼ de año? ¿Y las *dos terceras partes* de un año?
d) En una bolsa hay 45 bolas. ¿Cuántas bolas son las 3/5 partes de las mismas? ¿Y las 2/9 partes?

24. Una etapa de la vuelta ciclista a España es de 180 km. Después de un cierto tiempo se han recorrido las 2/3 partes de la misma. ¿Cuántos kilómetros quedan?

25. En una caja hay cierta cantidad de lápices. Las 4/5 partes de los mismos son 12 lápices. ¿Cuántos hay en la caja?

26. Se ha recorrido el 75 por 100 de un trayecto de 225 km en un coche eléctrico ¿Qué fracción del camino es la parte recorrida y la que queda por recorrer? ¿Cuál es la longitud de cada una?

27. Estamos probando dos sistemas de riego por goteo. El primero riega un huerto en 20 horas y el otro en 12 horas. Ponemos en funcionamiento el primer sistema y echa agua durante una hora. A continuación se abren los dos a la vez durante tres horas y se cierran. ¿Qué fracción de huerto queda por regar?

28. Un trayecto de 215 km lo recorre un coche en 2 horas y otro en 3/2 de hora. En una hora, ¿qué ventaja saca el segundo coche al primero?

29. Una persona gasta las 5/12 partes de su sueldo en comida; la tercera parte en vivienda y la quinta parte en varios. ¿Qué proporción de sueldo le queda por ahorrar?

30. En un depósito hay 90 litros de agua. Llenamos 50 botellas de ¾ de litro y 45 botellas de medio litro. ¿Cuántas botellas de litro necesitaremos para llenar el resto de agua que queda en el depósito?

31. El café pierde 1/5 de su peso al tostarlo. Se compra en origen a 7 euros el kilogramo. ¿A cómo debemos venderlo para ganar el 20 por 100 del precio de compra?

4

Proporcionalidad

TEMA 4

PROPORCIONALIDAD

Euclides, sabio griego del siglo III a.C., en el libro quinto de su famosa recopilación de *Los Elementos*, define la razón o proporción como una relación entre el tamaño de dos magnitudes del mismo tipo. También afirmó que dos magnitudes están en una razón *r* entre ellas si se puede encontrar un múltiplo de una de ellas que supere a la otra.

Actualmente caracterizamos las igualdades diciendo que $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ si y sólo si $a \cdot d = b \cdot c$.

1. RAZONES

La razón de dos números **a** y **b** es el cociente exacto entre ambos. Lo expresamos

$$\frac{a}{b}$$

que se lee «***a*** es a ***b***». A ***a*** se le llama **antecedente** y a ***b***, **consecuente**.

Si dos razones tienen el mismo valor, entonces son **equivalentes**. Basta multiplicarlas en cruz: si da el mismo resultado es que son equivalentes.

$$\frac{3}{6} \ y \ \frac{5}{10}$$

Las razones **inversas** o **recíprocas** son aquéllas en las que el antecedente de la primera es el consecuente de la segunda, y el antecedente de la segunda es el consecuente de la primera.

$$\frac{7}{9} \ y \ \frac{9}{7}$$

Realiza la actividad 1.

2. PROPORCIONES

Se llama **proporción** a la igualdad de dos razones.

$$\frac{4}{6} \ y \ \frac{8}{12}$$

que se lee «cuatro es a seis como ocho es a doce».

Los términos de una proporción se conocen como **medios** (seis y ocho) y **extremos** (cuatro y doce). En toda proporción, **el producto de los medios es igual al producto de los extremos**.

Se conoce como **cuarta proporcional** al cuarto término de una proporción donde se conocen los otros tres. Para hallar la cuarta proporcional de 2, 6 y 4:

$$\frac{2}{6} = \frac{4}{x}$$

$$2x = 6 \cdot 4$$

$$x = \frac{24}{2} = 12$$

Realiza las actividades 2, 3, 4, 5, 6 y 7.

3. MAGNITUDES DIRECTA E INVERSAMENTE PROPORCIONALES

Se llama **magnitud** aquellas cualidades de los seres que se pueden medir.

Dos magnitudes están relacionadas cuando el variar una tiene como consecuencia la variación de la otra. Por ejemplo, el peso de las peras y su coste. La variación del peso de las peras hace variar su coste.

Unas magnitudes son **directamente proporcionales** cuando el aumento de una hace que la otra aumente proporcionalmente, o la disminución de la primera hace que disminuya proporcionalmente la segunda. Por ejemplo, el precio de la gasolina y su coste son directamente proporcionales, ya que un aumento o una disminución en el volumen de compra incide proporcionalmente en un aumento o disminución del coste.

Unas magnitudes son **inversamente proporcionales** cuando el aumento de una determina una disminución proporcional de la otra, y viceversa. Por ejemplo, la velocidad de un vehículo y el tiempo que invierte en alcanzar su destino son magnitudes inversamente proporcionales.

Realiza la actividad 8.

4. REGLA DE TRES SIMPLE

La regla de tres es un método por el cual, sabiendo dos cantidades de una magnitud y una de otra magnitud relacionada, podemos averiguar la segunda cantidad de la segunda magnitud. Dependiendo de la manera que estas magnitudes se relacionan podemos distinguir los siguientes casos:

Regla de tres simple directa

Es aquella en la que las magnitudes utilizadas son directamente proporcionales.
Ejemplo:

5 litros de vino cuestan 3’75 €. ¿Cuánto valen 8 litros?

Los litros de vino y su costo son magnitudes directamente proporcionales, ya que más litros cuestan más dinero.

5 l ------------ valen ------------ 3’75 euros.
8 l ------------ valen ------------ *x* euros.

Se forma la proporción

$$\frac{3'75}{x} = \frac{5}{8}$$

y se despeja la ***x***.

$$x = \frac{3'75 \bullet 8}{5} = \frac{30}{5} = 6 \text{ euros}$$

Regla de tres simple inversa

Es aquella en la que las magnitudes utilizadas son inversamente proporcionales.
Ejemplo:

Un vehículo, a 50 km/h, tarda 2 horas en hacer un recorrido. ¿Cuánto tardará en hacer el mismo recorrido si aumenta su velocidad hasta los 100 km/h?

La velocidad y el tiempo son magnitudes inversamente proporcionales, ya que el aumento de una de ellas acarrea la disminución de la otra.

50 km/h ------------ durante ------------ 2 h.

100 km/h ---------- durante ----------- x h.

A más velocidad, el vehículo tardará menos en hacer el mismo trayecto. Al escribir la proporción, invertimos una de las razones:

$$\frac{2}{x}=\frac{100}{50}$$

y se halla la ***x***.

$$x=\frac{50\cdot 2}{100}=\frac{100}{100}=1\text{ hora}$$

Realiza las actividades de la 9 a la 21.

5. REGLA DE TRES COMPUESTA

En la regla de tres compuesta, en lugar de aparecer dos parejas de magnitudes concurren tres o más parejas de magnitudes. Las colocaremos como en la regla de tres simple, decidiendo si la relación de cada una con la magnitud donde se encuentra la incógnita es directa o inversa.

Ejemplo:

Catorce obreros tardan 28 días para hacer 140 m de obra. ¿Cuánto hicieron 18 obreros en 35 días?

tardan hacen
14 obreros ------28 días ----- 140 metros
18 obreros ----- 35 días ------ x metros.

Consideramos de manera consecutiva la relación de cada par de datos con los metros de obra, que es donde aparece la incógnita, decidiendo que

1.- a más obreros, más metros de obra ⇒ directa
2.- a más días, más metros de obra ⇒ directa

por lo que escribimos las proporciones de la siguiente manera:

$$\frac{140}{x}=\frac{14}{18}\cdot\frac{28}{35};$$

$$x=\frac{18\cdot 35\cdot 140}{14\cdot 28}=225\text{ m}$$

Si existiese alguna relación inversa, se invertiría la razón.

Realiza las actividades de la 22 a la 25.

6. TANTO POR CIENTO

La expresión 30 % se lee **«treinta por ciento»** y significa que de cada 100 partes se toman 30. Los problemas de tanto por ciento son un caso particular dentro de los problemas de regla de tres simple directa.

Ejemplos:

a. *Halla el 20 % de 7’20 €.*

Si a **100** € le corresponden **20** €,
a **7’20** € le corresponden ***x*** €

$$\frac{100}{7'20}=\frac{20}{x};$$

$$x=\frac{7'20\cdot 20}{100}=1'44\text{ euros}$$

b. *Si el 30 % de un número es 261, ¿qué número será?*

Si a **100** le corresponden **30**,
a ***x*** le corresponden **261**.

$$\frac{100}{x}=\frac{30}{261};$$

$$x=\frac{100\cdot 261}{30}=87($$

870 es el número cuyo 30 % es 261.

c. *Un objeto cuyo precio es 2.400 € se vende por 2.040 €. ¿Cuál es el descuento?*

representan

Si **2.400 €** ---------------------------- **100** %
2.040 € ----------------------------- ***x*** %

$$\frac{100}{x} = \frac{2400}{2040};$$

$$x = \frac{100 \cdot 2040}{2400} = 85$$

Se vende al 85 %, por lo que el descuento es 100 – 85 = 15 %

Realiza las actividades de la 26 a la 36.

7. REPARTO PROPORCIONAL DIRECTO

Repartir proporcionalmente una cantidad consiste en distribuirla en partes proporcionales a unos datos determinados.

El modo de operar para repartir una cantidad en partes directamente proporcionales a varios números sería el siguiente: Primero, se divide la cantidad que repartir entre la suma de dichos números. El cociente sería lo que le corresponde a una parte. A continuación, este cociente se multiplicaría sucesivamente por cada una de las cantidades anteriormente dadas, obteniendo así lo que correspondería a cada parte.

Ejemplo:

Reparte 1.500 en partes directamente proporcionales a 12 y a 8.

12 + 8 = 20

1.500 : 20 = 75
(lo que corresponde a cada unidad)

75 · 12 = 900
(la parte que corresponde a 12)

75 · 8 = 600
(la parte que corresponde a 8)

8. REPARTO PROPORCIONAL INVERSO

Repartir inversamente proporcional una cantidad entre varios números equivale a repartir directamente esa cantidad a los inversos de esos números.

Ejemplo:

Reparte 4.008 en partes inversamente proporcionales a 5, a 7 y a 11.

a. Los inversos serán:

$$\frac{1}{5} \quad \frac{1}{7} \quad \frac{1}{11}$$

b. Común denominador:

$$\frac{77}{385} \quad \frac{55}{385} \quad \frac{35}{385}$$

c. Reparto directamente proporcional a los numeradores:

77 + 55 + 35 = 167

4.008 : 167 = 24

24 · 77 = **1.848** (corresponde a 5)
24 · 55 = **1.320** (corresponde a 7)
24 · 35 = **840** (corresponde a 11)

Realiza las actividades de la 37 a la 47.

9. INTERÉS SIMPLE

Cuando disponemos de cierta cantidad de dinero que no pensamos utilizar en un tiempo, una posibilidad que se nos puede plantear es la de invertirlo a «plazo fijo».

Este dinero, o **capital**, colocado a plazo fijo nos da unas ganancias, que llamamos **intereses**, que varían dependiendo del **tiempo** que lo tengamos invertido y del **tanto por ciento**, o **rédito**, al que lo hayamos colocado. Lo llamamos interés simple porque los intereses no devengan nuevos intereses. Cuando sí lo hacen, el interés es compuesto.

- ✓ **Capital**: es la cantidad que colocamos a plazo fijo.
- ✓ **Rédito**: es el tanto por ciento anual, mensual o diario al que se coloca el capital.
- ✓ **Tiempo**: es el período durante el que tenemos colocado el capital.
- ✓ **Interés**: Es la cantidad producida por el capital durante cierto tiempo.

La fórmula general para resolver los problemas de interés simple es:

$$I = \frac{C \bullet r \bullet}{100}$$

donde **I** = Interés, **C** = Capital, **r** = Rédito, **t** = Tiempo. El **100** es una constante cuando el tiempo viene expresado en años. Si el tiempo viene en meses, se sustituirá por **1.200**, y por **36.000** cuando venga expresado en días. La fórmula anterior quedaría, pues, así:

$$I = \frac{C \bullet r \bullet}{1200}$$

$$I = \frac{C \bullet r \bullet}{36000}$$

Si en cualquier problema hemos de calcular cualquiera de las otras variables, despejamos ésta de la fórmula general.

Ejemplo:

Una persona deposita 15.000 € en un banco durante un año. ¿Cuánto dinero tendrá al finalizar el año si el banco le abona un rédito del 2'5 %?

Teniendo en cuenta que el tiempo viene expresado en años, sustituimos en la fórmula general cada letra por su valor:

$$I = \frac{15000 \cdot 2'5 \cdot 1}{100}$$

y, operando, llegamos al resultado:

I = 375 €

El dinero que tendrá será la suma de lo que tenía más el interés devengado, es decir:

15.000 + 375 = 15.375 €

Realiza las actividades de la 48 a la 58.

A C T I V I D A D E S

1. Di si están bien escritas las siguientes igualdades:

a) $\frac{2}{3} = \frac{34}{51}$ b) $\frac{11}{4} = \frac{21}{5}$

c) $\frac{5}{3} = \frac{7}{8,8}$ d) $\frac{8}{6} = \frac{4}{2}$

2. Despeja ***x*** en cada una de las siguientes proporciones:

a) $\frac{x}{4} = \frac{3}{1}$ b) $\frac{4}{x} = \frac{5}{3}$

c) $\frac{2}{x} = \frac{1}{3}$ d) $\frac{6}{2} = \frac{x}{3}$

e) $\frac{3}{24} = \frac{5}{x}$ f) $\frac{x}{8} = \frac{40}{5}$

3. Forma proporciones de:

a) 5 · 8 = 20 · 2

b) 6 · (8 – 3) = 15 · 2

c) 5 · 8 = 10 · 4

d) 7 · (6 – 2) = (10 + 4) · 2

4. Halla el número que es a 6'8 como 8'1 es a 7'2.

5. Halla la cuarta proporcional a cada una de las siguientes series de números:

a) 24, 51, 104. b) 5'6, 40, 0'63.

6. La razón del peso del grano al de la paja es, aproximadamente, ½ para el trigo. Calcula el peso de una cosecha de 3.132 kg de trigo.

7. Se sabe que la razón de las alturas de dos árboles es igual a las de las sombras que proyectan. La sombra de un árbol es de 40 m y la de un palo de 1'5 m es de 2 m. ¿Cuál es la altura del árbol?

8. Di cuáles de los siguientes pares de magnitudes son directas y cuáles son inversamente proporcionales:

a) Velocidad media de un coche y espacio recorrido.

b) Velocidad media de un coche y tiempo que tarda en llegar a un sitio.

c) Número de litros de agua que un grifo echa en una piscina durante cada minuto y altura que habrá alcanzado el agua en un momento determinado.

d) Número de litros de agua que un grifo echa en una piscina durante cada minuto y tiempo que tardará en llenarla.

9. Un obrero ha ganado 216'36 € en 6 días. ¿Cuántos días debe trabajar para ganar 865'44 €?

10. Un grifo que da 18 litros por minuto emplea 28 horas para llenar un depósito. ¿Qué tiempo emplearía si su caudal fuera de 42 litros por minuto?

11. Había comprado 12 kg de café por 140'88 €, pero por error me envían 4'5 kg de menos. ¿Cuánto debo pagar?

12. En un mapa 14 cm representan 238 km. ¿Por qué longitud vienen representados 306 km?

13. Un grifo da 255'6 litros de agua en 27 minutos. Halla en litros, y por tanto, en kilogramos, cuánta agua puede obtener en hora y cuarto.

14. Un labrador tiene alfalfa para alimentar doce conejos durante 60 días. Compra aún ocho conejos. ¿Cuánto durará su alfalfa?

15. Se quiere construir una empalizada de 800 listones puestos a 0'15 m de distancia. No habiendo más que 600 listones, ¿a qué distancia se han de colocar?

16. Al repartir el vino de un barril en botellas de 0'75 l se necesitan 1.040

botellas. ¿Cuántas botellas de 0’65 l se necesitarán?

17. Un arquitecto se ha comprometido a construir una fábrica en dos años y medio con 36 obreros. ¿Cuántos obreros podrá distraer de esta obra si se le concede una prórroga de medio año?

18. Un propietario tiene 640 corderos que puede alimentar durante 65 días. ¿Cuántos corderos debe vender si quiere alimentar su rebaño quince días más dando la misma ración?

19. Con 25 m^3 de agua un campesino riega las 4 hectáreas de su propiedad. Si dispusiera de 125 m^3, ¿cuántas hectáreas podría regar?

20. Una moto que va a 90 km/h recorre 160 km. ¿Cuántos kilómetros recorrería si su velocidad hubiera sido de 50 km/h?

21. En una carrera de coches uno de los vehículos alcanza en la recta de tribuna una velocidad de 360 km/h y la recorre en 12 segundos. ¿Cuánto tardaría si su velocidad fuera de 300 km/h?

22. Un excursionista recorre, en 7 días, 140 km, andando 7 horas diarias. ¿Qué distancia recorrerá, a 3 horas diarias, en 21 días?

23. Una brigada de 16 obreros empleó 7 días para roturar un campo de 800 m^2. ¿Qué tiempo tardarán 9 obreros para roturar 1.800 m^2?

24. Seis tejedores elaboraron 60 m de tela de 1'5 m de ancho. ¿Cuántos metros tejerán 12 obreros, de una tela de 2 m de anchura?

25. ¿Cuántas horas durante siete días tendrán que trabajar 20 operarios para igualar a 14 obreros que trabajan 10 horas durante 8 días?

26. Completa la siguiente tabla:

Cantidad	%	Resultado
22.000	18	
100	45	
4.500	20	
2.500		500
800		480
	30	1.200
	12	36

27. En un instituto de 850 alumnos han aprobado todas las asignaturas el 60 %. ¿Cuántos alumnos han aprobado? ¿Cuántos han suspendido alguna asignatura?

28. ¿Cuánto pagaremos por una máquina de escribir, si de las 235 € que vale nos hacen un descuento del 12 %?

29. Calcula el precio de un paraguas sabiendo que después de hacernos un descuento de un 15 % hemos pagado 51 €.

30. La velocidad máxima permitida en una autopista es de 120 km/h. Se considera infracción si se sobrepasa el 12 % de esa velocidad. ¿A qué velocidad, como mínimo, iba un conductor que cometió una infracción?

31. Un incendio, provocado por una hoguera mal apagada, destruye el 70 % de los árboles de un bosque. Si quedan 3.858 árboles, ¿cuántos había antes del incendio?

32. Para preparar 5 kg de chocolate empleo 4 litros de leche, 750 g de cacao y 250 g de azúcar. ¿Cuál es el tanto por ciento de cada ingrediente?

33. ¿Qué tanto por ciento de rebaja se hizo en el importe de una factura de 2.850 € si tuvieron que pagar 2.679 €?

34. El 30 % del valor de un objeto son 120 €. ¿Cuánto vale el objeto?

35. Se ha hecho una compra por valor de 18.000 € y nos descuentan el 15 %. ¿Cuál será el descuento? ¿Cuánto hay que pagar?

36. En un pueblo de la costa la población en invierno es de 25.000 habitantes y en verano de 35.000. ¿Qué tanto por ciento aumenta?

37. Reparte 80 € en partes proporcionales a 3 y a 7.

38. Reparte 323 kg en partes proporcionales a 6 y a 11.

39. Divide 460 m en partes proporcionales a 4, 5 y 11.

40. Divide 325 € en partes inversamente proporcionales a 2, 3 y 4.

41. Divide 429 kg en partes proporcionales a 2/3, 3/4 y 5/24.

42. Reparte 700 g en partes proporcionales a 1'39, 3'24 y 5'37.

43. Tengo 14 años y mi hermana 7. Nuestros padres nos reparten 315 € proporcionalmente a nuestros años. ¿Cuánto toca a cada cual?

44. Se ha hecho un reparto en tres partes proporcionales a 3, 1/3 y 1/6. La segunda parte es 480 €. ¿Cuáles son las otras dos partes y el total repartido?

45. Una persona deja sus bienes a 5 sobrinos para que se los repartan de manera inversamente proporcional a 5, 6, 7, 8 y 9. Si el primero recibe 15.120 €, ¿cuánto importa lo que dejó el tío y cuánto recibió cada uno de los sobrinos?

46. Tres amigos deciden compartir su suerte y para ello uno aporta un cupón de la ONCE de 2 €, otro un décimo de lotería de 3 € y el tercero una quiniela de 9 €. La suerte les acompaña y ganan un total de 166.030’2 €. Si el dinero se lo reparten en proporción a la cantidad que gastó cada uno en su aportación, ¿cuánto debe cobrar cada uno?

47. Tres socios han iniciado un negocio con los siguientes capitales: 300 €, 480 € y 600 €, respectivamente. Al cabo de un año, el beneficio es de 19.320 €. ¿Cómo deben repartirse este beneficio?

48. Calcula el interés de 12.400 € al 5% durante:

a) 2 años b) 3 meses c) 36 días

49. Halla el interés de 2.500 € al 4 % durante 4 años y tres meses.

50. Halla el interés de 13.880 € al 6 % durante 2 años, 3 meses y 15 días.

51. Una persona ha colocado 370.500 € al 4 %. Después de 18 meses retira el capital, aumentado con sus intereses, y coloca esta suma al 5 %. ¿Qué renta anual obtendrá ahora?

52. ¿A qué tanto por ciento hay que colocar 84.800 € para tener 85.849’4 €, capital e interés, después de tres meses y nueve días?

53. ¿Qué tiempo es necesario a 4.500 € colocados al 4 % para producir 520 €?

54. ¿Cuánto tiempo tardan 130.000 € al 5 % en convertirse en 137.962’5 €?

55. Calcula el capital que debe imponerse al 6 % para que el interés anual sea de 3.600 €.

56. ¿A qué tanto por ciento debemos colocar un capital de 130.000 € para obtener un beneficio en dos años de 29.900 €?

57. ¿Cuánto tiempo tardarán 3.000 € colocados al 10 % en convertirse en 6.000 €?

58. Una persona presta dinero a otra, cobrándole 1 € de interés mensual por cada 100 € prestados. ¿A qué rédito hizo el préstamo?

5

Probabilidad y Estadística

TEMA 5

PROBABILIDAD Y ESTADÍSTICA

La Estadística es la ciencia que tiene por objeto el tratamiento y análisis de la información obtenida a través de una serie de observaciones. Por tanto sus objetivos son dos. El primero es indicar cuáles son los métodos adecuados para la correcta obtención de los datos y el segundo es analizarlos, obteniendo así conclusiones que podamos llevar a la práctica.

1. EL TRABAJO ESTADÍSTICO

La elaboración de un trabajo estadístico se ajusta a las siguientes fases:

- **Recogida de datos.**
- **Agrupación y tabulación de datos.**
- **Representación de datos en gráficos.**
- **Interpretación de datos.**
- **Elaboración de leyes.**
- **Pronósticos y previsiones.**

2. RECOGIDA DE DATOS

Vamos a tener en cuenta el siguiente supuesto:

En una encuesta entre las mujeres jóvenes de nuestra comarca, donde se preguntaba sobre sus aficiones en el tiempo libre hemos obtenido los resultados siguientes:

426 prefieren la lectura de libros; 305, la música; 251, los deportes; 179, el cine y/o el teatro; 157, la pintura o el dibujo; 105, las manualidades; 42, tocar un instrumento musical o cantar; 20 coleccionaban sellos y 115 se dedicaban a otras aficiones.

En total se encuestaron a 1600 mujeres.

Se pretende conseguir una información sobre cómo emplean su tiempo libre las **mujeres de la comarca**. Ésta es, por lo tanto la **población** de la encuesta.

Población **es el número de personas u objetos a los que se dirige la técnica estadística.** Pero encuestar a toda la población sería un trabajo lento y fatigoso, ya que habría que encuestar a miles de personas. Lo que se hace en la práctica es seleccionar una **muestra** representativa de esa población. En nuestro caso, esa muestra serían las 1600 mujeres a las que se encuestó.

Muestra **es la porción de población a la cual se aplica de hecho la técnica estadística, extiendo luego los resultados a toda la población.** La fiabilidad del estudio que pretendemos realizar depende de la elección de la muestra, que ha de cumplir determinadas características:

- ha de ser **representativa**.
  Esto significa que se debe procurar que estén representados todos los estamentos sociales, así como los sectores de población (hombres, mujeres, niños, técnicos, obreros,...).

- ha de ser **aleatoria**, es decir, elegida al azar.

No se puede hacer una encuesta sobre la aceptación de las emisiones musicales en televisión a la salida de un concierto, ya que se supone que los que asisten a los conciertos son amantes de la música, y los resultados no serían fiables.

- el tamaño de la muestra ha de ser **proporcional** al número total de la población.

  No se puede determinar el mismo número de encuestados en un pueblo de mil habitantes que en una ciudad de 2 millones.

Realiza la actividad 1.

3. AGRUPACIÓN Y ORDENACIÓN DE DATOS

Tras la recogida de datos, estos **se agrupan y ordenan todos de una manera racional y cómoda de manejar.**

- Los datos se distribuyen en una tabla en la que colocamos en columna los valores de la variable en orden creciente.
- Para agrupar los datos se contabilizan los casos observados, colocando junto a estos, en una segunda columna, el número de veces que se han presentado.

La frecuencia absoluta es el número de veces que se repite un determinado resultado. Así tenemos que la frecuencia absoluta de mujeres que coleccionan sellos asciende a 20.

La frecuencia relativa es la frecuencia absoluta dividida por el número total de observaciones. La frecuencia relativa que corresponde al número de mujeres que acuden con frecuencia al cine o al teatro es el 11’25 %.

AFICIONES	Nº MUJERES Frecuencia absoluta	Frecuencia relativa
lectura libros	426	0’26625
música	305	0’190625
deportes	250	0’15625
cine/teatro	180	0’1125
pintura/dibujo	157	0’098125
manualidades	105	0’065625
instr. musicales / canto	42	0’02625
coleccionistas sellos	20	0’0125
otras aficiones	115	0’071875
TOTAL	1600	1

Realiza la actividad 2.

4. FORMAS DE PRESENTAR LOS DATOS ESTADÍSTICOS

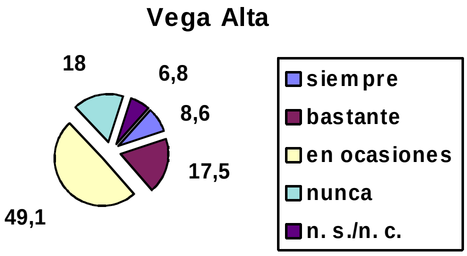
Existen muchas formas distintas de presentar los datos estadísticos: tablas, gráficos de sectores, barras y lineal, etc.

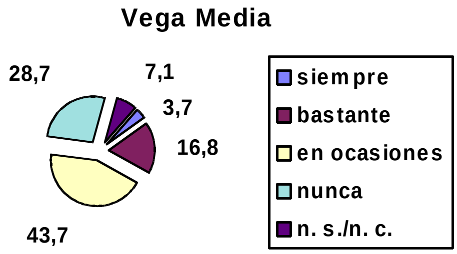
Hay que tener en cuenta una serie de criterios a la hora de presentar los datos: público al que va dirigido, aspecto que se quiere resaltar,... En todo caso es necesario que haya **claridad**, **concisión** y **visualidad**.

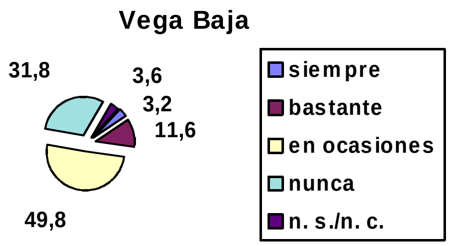
Veamos lo más importantes:

a. Gráfico de sectores:

Salidas a comer fuera de casa los domingos y festivos







Los datos de la encuesta de la zona de la Vega Alta son:

- 49’1 %, en ocasiones
- 18 %, nunca
- 17,5 %, bastante
- 8’6 %, siempre
- 6’8 %, no sabe / no contesta

Para realizar la gráfica de la encuesta y saber qué sector circular le corresponde a cada una de las frecuencias, procedemos a calcular el número de grados que le corresponde a cada porcentaje. Sabiendo que el círculo tiene 360º:

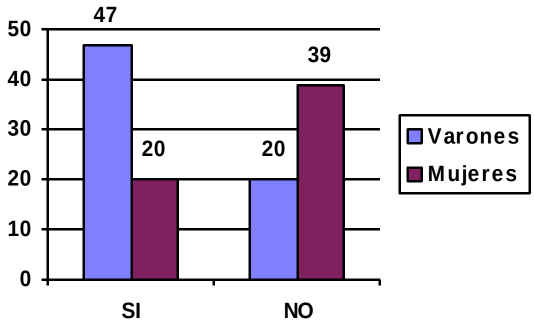
100 % ———————— 360º
49’1 % ———————— x

$$x = \frac{49'1 \cdot 360}{100} = 176^\circ \; 45'$$

y así vamos haciendo con el resto de los datos.

b. Gráfico de barras:

El uso de la sexualidad mejora las relaciones sociales

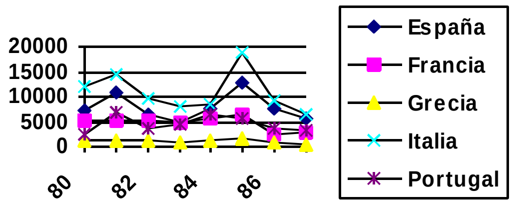


En el gráfico de barras las alturas son proporcionales a los porcentajes.

c. Gráfico lineal:

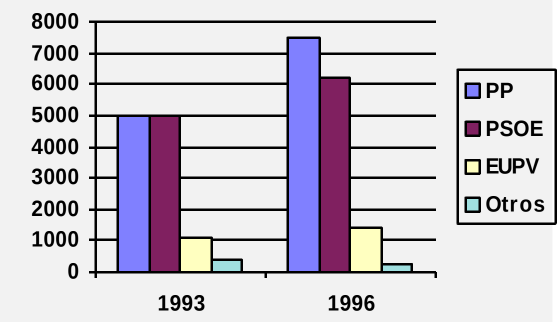
Número de incendios forestales en los países mediterráneos de la CE (1980 – 1987)

año	España	Francia	Grecia	Italia	Portugal
1980	7193	5040	1207	11963	2367
1981	10882	5173	1159	14503	6680
1982	6443	5308	1045	9557	3568
1983	4880	4659	968	7956	4503
1984	7649	5672	1284	8482	6377
1985	12837	6249	1442	18664	5459
1986	7713	2590	679	9367	3710
1987	5785	2975	474	6474	3338



d. Gráficos comparativos:

Resultados comparativos en elecciones generales en una ciudad española (1993 – 1996)



Realiza las actividades de la 3 a la 8.

5. MEDIDAS DE TENDENCIA CENTRAL

Las observaciones estadísticas se refieren siempre a un conjunto de datos. Por ser tan numerosos estos datos, resulta difícil comparar dos o más series entre sí. De ahí la necesidad de considerar sólo unos valores numéricos representativos de cada serie.

Los **valores centrales** miden la tendencia de la serie a agruparse en torno a un valor. Los más importantes son la **media aritmética**, la **mediana** y la **moda**.

Para hallar la media aritmética se suman todos los valores de la serie y se divide el resultado por el número de casos.
Ejemplo:

Las notas que ha sacado un estudiante en una asignatura han sido 4, 6’5, 7, 4’5, 7. La media es

$$\frac{4 + 6'5 + 7 + 4'5 + 7}{5} = 5'8$$

Mediana es el valor central de una distribución ordenada que tiene un número impar de valores. Si la serie consta de un número par de elementos, la mediana se determina hallando el valor intermedio de los dos centrales.
Ejemplo:

Sea la serie 3, 5, 6, 10, 15, 21, 26. La mediana (Me) es **10**.

Consideremos ahora la serie 3, 4, 8, 13, 15, 20, 24, 30. Al haber un número par de elementos hay dos elementos centrales (13 y 15). La mediana es

$$Me = \frac{13 + 15}{2} = 14$$

Moda es el valor de la variable estadística que tiene mayor frecuencia absoluta.
Ejemplo:

La moda de la serie 2, 3, 5, 5, 7, 7, 7, 8, 10 15, 25, 25, 30 es **7**.

Realiza las actividades de la 9 a la 13.

6. MEDIDAS DE DISPERSIÓN

Las medidas de dispersión miden la mayor o menor separación de los datos respecto a los valores centrales. Las principales medidas de dispersión son el **recorrido** y la **desviación media**.

Recorrido es la diferencia entre el mayor valor y el menor valor que toma la variable estadística.
Ejemplo:

Las edades de los alumnos de una clase son: 17, 19, 23, 25, 29, 34, 38, 40, 46, 50. El recorrido es 50 – 17 = **23**.

La desviación media no sólo tiene en cuenta los valores extremos, sino también los valores intermedios. **La desviación media es la media aritmética de los valores absolutos de las desviaciones de los datos respecto de su media aritmética**.

Ejemplo:

Los jugadores de un equipo de baloncesto tienen estas edades:

Edades	Media	Diferencias o desviaciones
20		– 6
25		– 1
27	26	+1
28		+2
30		+4

Para hallar la desviación media se procede así:

1. Se calcula la diferencia entre cada valor y la media.
2. Se suman los valores absolutos de estas diferencias:

$$|-6|+|-1|+|+1|+|+2|+|+4| = 14$$

3. Se divide esta suma por el número de valores y así se obtiene la desviación media.

14 : 5 = **2'8**

Realiza la actividad 14.

A C T I V I D A D E S

1. En una encuesta realizada en una ciudad de 3.000 habitantes en edades comprendidas entre 18 y 65 años sobre su estado laboral, se han obtenido los siguientes datos:

☐	Trabajo fijo por cuenta propia	427
☐	Trabajo fijo por cuenta ajena	1.452
☐	Trabajo eventual	316
☐	En paro después de haber trabajado	292
☐	En paro buscando su primer empleo	261
☐	Incapacitados	36
☐	Estudiantes	194
☐	Servicio militar	22

a. ¿Cuál sería la «Población» de esta encuesta?
b. ¿Cuál sería la muestra?
c. Cuál sería la frecuencia absoluta de los que buscan su primer empleo?
d. ¿Y la de los trabajadores fijos por cuenta propia?
e. ¿Y su frecuencia relativa?

2. Queremos estudiar la distribución de las familias de un pueblo de acuerdo con el número de miembros que las componen. La distribución es la siguiente:

Tres personas viven solas, cuatro matrimonios sin hijos, siete familias de tres miembros, doce familias de cuatro miembros, nueve de cinco miembros, cinco de seis miembros, tres de siete miembros, una de ocho miembros y dos de nueve miembros.

A la vista de estos datos confecciona la tabla y contesta a las siguientes preguntas:

a. ¿Cuál es la frecuencia absoluta de familias con cuatro miembros?
b. ¿Cuál es la frecuencia absoluta de familias con ocho miembros? ¿Y la relativa?

3. La siguiente tabla indica en porcentajes el nivel cultural de una ciudad:

Nivel	Varones	Mujeres
1. Alfabetización	0'3 %	0'8 %
2. Sin escolarizar	8'3 %	11,1 %

3. Primarios	15’7 %	16’3 %
4. Graduado	13’7 %	13’5 %
5. FP 1 (o similar)	1’3 %	1’4 %
6. FP 2 (o similar)	1’3 %	1’4 %
7. Bachillerato Superior	4’8 %	4’4 %
8. Oficialía (m. taller)	0’8 %	0’9 %
9. Universitario	2’5 %	1’7 %
Total	48’7 %	51’3 %

- Representa estos datos en un gráfico de sectores, tanto para varones como para mujeres.

4. La dieta de una persona debe contener aproximadamente los siguientes nutrientes:

15 % de proteínas.
25 % de grasas.
55 % de hidratos de carbono.
5 % de otros.

Represéntalo en un diagrama de sectores.

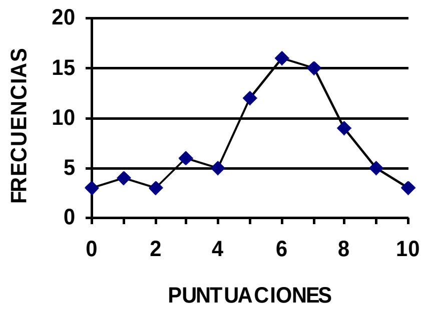
5. Representa en un diagrama de barras la distribución del número de provincias de las siguientes Comunidades Autónomas:

Comunidades Autónomas	Nº de provincias
Andalucía	8
Galicia	4
C. Valenciana	3
La Rioja	1
Murcia	1
Extremadura	2
Aragón	3
País Vasco	3
Cataluña	4

6. Construye el gráfico lineal de las temperaturas registradas en una ciudad durante una semana, siendo éstas:

Días	Temperaturas ºC
Domingo	20
Lunes	18
Martes	15
Miércoles	19
Jueves	12
Viernes	17
Sábado	17

7. Confecciona una tabla de frecuencias de las puntuaciones obtenidas por un curso en el examen de matemáticas:



8. En la siguiente tabla se indica el número de hombres, mujeres y niños que ven la programación de TV a determinadas horas del día. A la vista de ella construye un gráfico comparativo:

	9 mañana	2:30 tarde	6 tarde	10 noche
Hombres	150	550	40	600
Mujeres	450	300	300	650
Niños	30	100	750	20
Total	630	950	1.090	1.270

9. Al tirar un dado al aire 14 veces se han obtenido los siguientes números:

Nº del dado	Frecuencia
1	0
2	3
3	1
4	6
5	2
6	2

Calcula la moda.

10. Al considerar el número de nacimientos producidos a lo largo de los últimos años entre un grupo de ocho municipios, hemos obtenido estos resultados:

34, 69, 105, 205, 56, 150, 87, 93

Calcula la mediana.

11. Un alumno ha sacado en sus controles de matemáticas las siguientes notas:

5, 7, 3, 8, 4 y 6

Calcula su media.

12. En una clase de adultos las edades de sus alumnos están recogidas en la siguiente tabla:

Edades	Frecuencias
16	4
19	7
22	3
24	4
27	1
32	3
36	1
45	2

Calcula la media y la moda

13. Las temperaturas máximas recogidas en distintos municipios de Alicante un día de primavera han sido:

Municipios	Temperaturas
Alicante	21
Benidorm	20
Crevillente	19
Elche	19
Guardamar	21
Jijona	17
Orihuela	19
Torrevieja	22

Calcula la moda, la mediana y la media.

14. Una empresa tiene dos obreros que cobran 1.200 €, 5 obreros que cobran 1050 €, 20 obreros que cobran 900 € y 87 obreros, 800 €. ¿Cuál es el sueldo medio de los empleados? Calcula la desviación media.

6

Álgebra. Ecuación de Primer Grado con una Incógnita

TEMA 6

ÁLGEBRA: ECUACIÓN DE PRIMER GRADO CON UNA INCÓGNITA

La palabra ***álgebra*** proviene del árabe. Aparece por primera vez en un tratado del siglo IX, «Al–jebr W'almugabala», que significa transposición y eliminación.

Transposición es la traslación de términos de un lado a otro de una igualdad y eliminación es la supresión de términos iguales.

1. LENGUAJE ALGEBRAICO

El **lenguaje algebraico** es el formado por números, letras que representan a números y los símbolos de las operaciones aritméticas. Este lenguaje nos va a permitir traducir problemas formulados verbalmente a lenguaje matemático de manera exacta, lo cual facilitará su resolución.

Las expresiones formadas por números, letras que representan a números y los signos de las operaciones aritméticas que se realizan entre ellos se llaman **expresiones algebraicas**.

Cada una de las letras que intervienen en una expresión algebraica se denomina **variable**.

Ejemplo:

$2x + 7 = 2(2x - 3)$, donde $\boldsymbol{x}$ es la variable.

Hallar el **valor numérico de una expresión algebraica** consiste en dar valores concretos a las variables. Por ejemplo: sabemos que el área de un rectángulo es $\boldsymbol{A = b \cdot h}$. Si necesitamos saber el área de una habitación de 5 m de largo y 7 de ancho, sustituimos la letra ***b*** por 5 y la ***h*** por 7. El resultado es $\mathbf{A = 35\ m^2}$.

Llamamos **identidad** a una igualdad cierta para cualquier valor de las variables.

Ejemplo:

$$x + 3 = x + 5 - 2$$

En Matemáticas existen identidades muy importantes que reciben el nombre de **identidades notables**. Son las siguientes:

$(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$
$(a - b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab$
$(a + b)\ (a - b) = a^2 - b^2$
Recuerda que la igualdad es **reversible**

Realiza las actividades 1, 2, 4 y 5.

2. ECUACIONES

Se denomina **ecuación** a toda igualdad que sólo es cierta para algunos valores de las variables. En este caso, las variables se llaman **incógnitas** y, cada sumando, **término de la ecuación**. Los términos numéricos se denominan **términos independientes**.

Al valor de la variable (o los valores de las variables) para el cual es cierta la igualdad se le llama **solución** de una ecuación. Ésta puede ser única, pueden ser varias o incluso puede que la ecuación no tenga solución. En este caso concreto a la ecuación la llamaremos **ecuación imposible**.

Realiza la actividad 3.

3. RESOLUCIÓN DE ECUACIONES

Resolver una ecuación es hallar el valor de la incógnita:

$$x + 12 = 46$$

En esta igualdad, $x + 12$ está en el **primer miembro** (a la izquierda del signo =), y 46 está en el **segundo miembro** (a la derecha del signo =). Nuestro objetivo es aislar la ***x***, es decir, dejarla **sola** en alguno de los miembros. En este caso, tenemos que trasponer el 12.

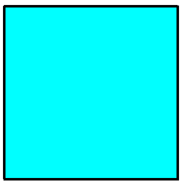
$$x + 12 - 12 = 46 - 12$$

$x = 46 - 12$, de donde $x = 34$

Para simplificar el proceso, podemos generalizar diciendo que, para despejar (dejar sola) la ***x***, podemos trasponer los términos que la acompañan pasándolos al otro miembro haciendo la operación contraria. (Si estaba sumando, pasa restando; si estaba restando, pasa sumando; si estaba multiplicando, pasa dividiendo; si estaba dividiendo, pasa multiplicando).

Ejemplo:

El perímetro de un cuadrado es 12 m. ¿Cuánto mide cada uno de los lados?



$$4 \cdot x = 12$$

$$x = \frac{12}{4};\ x = 3$$

Solución: Cada lado mide 3 m.

Es importante que, una vez resuelta la ecuación, compruebes el resultado. Esto se hace sustituyendo la ***x*** por el valor que has hallado y comprobando que se mantiene la igualdad. En este caso:

$$4 \cdot 3 = 12$$

Realiza las actividades de la 6 a la 11.

4. RESOLUCIÓN DE ECUACIONES MÁS COMPLEJAS

A veces nos encontramos ecuaciones donde la incógnita nos aparece repetida y en ambos miembros:

Método de resolver ecuaciones de primer grado con una incógnita

1. Quitar paréntesis. Si no los hay, pasar al paso 2.
2. Quitar denominadores. Si al quitar denominadores aparecen paréntesis, volver al paso 1. Si no hay denominadores, pasar al paso 3.
3. Agrupar en un miembro los términos con **x** y en el otro los que no la tengan.
4. Simplificar.
5. Despejar la **x**.

Ejemplo:

$$6x + 5 - 3x = 15 - 2x$$

Cuando nos encontremos una ecuación de este tipo, es conveniente agrupar en un miembro los términos con ***x*** y en el otro los que no la tengan.

$$6x - 3x + 2x = 15 - 5$$

$$5x = 10$$

$$x = \frac{10}{5}$$, de donde $x = 2$

En las ecuaciones donde aparecen fracciones, lo primero que hemos de procurar es eliminarlos. Esto lo haremos reduciendo todos los términos a común denominador.

Ejemplo:

$$\frac{x}{2} + \frac{x}{5} - 6 = 8$$

$$\frac{5x}{10} + \frac{2x}{10} - \frac{60}{10} = \frac{80}{10}$$

Prescindiendo de los denominadores:

$$5x + 2x - 60 = 80$$

Y ya podemos resolver trasponiendo términos:

$$5x + 2x = 80 + 60$$

$$7x = 140$$

$$x = \frac{140}{7}$$, de donde $x = 20$

De igual manera se aplica este método si hemos de despejar fórmulas matemáticas. Por ejemplo, si tenemos que despejar el radio, ***r***, en la fórmula de la superficie del círculo:

$$S = \pi \cdot r^2$$

$$r^2 = \frac{S}{\pi}$$

$$r = \sqrt{\frac{S}{\pi}}$$

Realiza las actividades 12 y 13.

5. APLICACIÓN A LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

No existe una receta única que nos conduzca a un final feliz en la resolución de un problema, aunque te vamos a facilitar un procedimiento que, junto con la práctica, te lo va a allanar bastante.

Procedimiento para resolver un problema

1. Lee atentamente el enunciado del problema hasta comprenderlo.
2. Elige adecuadamente la incógnita.
3. Traduce el enunciado del problema a lenguaje algebraico.
4. Resuelve la ecuación obtenida.
5. Comprueba la solución en la ecuación.
6. Da una respuesta al problema
7. Comprueba dicha respuesta con el enunciado del problema

5.1. Problemas de tipo aritmético

La suma de tres números impares consecutivos es 1.845. Determina de qué números se trata.

Planteamiento:

Un número impar se puede escribir así: $2x + 1$.

Tengo que considerar que sean consecutivos. Vendrán dados por:

$\mathbf{2x + 1}$
$2x + 1 + 2 = \mathbf{2x + 3}$
$2x + 3 + 2 = \mathbf{2x + 5}$

La suma de los tres ha de ser 1.845

$$(2x + 1) + (2x + 3) + (2x + 5) = 1.845$$

Resolvemos la ecuación:

$$6x + 9 = 1.845;\ x = 306$$

Solución:

Primer número: $2 \cdot 306 + 1 =$ **613**
Segundo número: $2 \cdot 306 + 3 =$ **615**
Tercer número: $2 \cdot 306 + 5 =$ **617**

Comprobación:

Son todos impares y su suma es 1.845.

5.2. Problemas de edades

Un hombre de 40 años tiene un hijo de 10 años. ¿Cuántos años han de transcurrir para que la edad del padre sea el doble que la del hijo?

Planteamiento:

Sea ***a*** el número de años que deben transcurrir. Entonces el padre tendrá $40 + a$ años y el hijo $10 + a$ años.

Nos dicen que la edad del padre será doble que la del hijo, por tanto:

$$40 + a = 2(10 + a)$$

Resolvemos la ecuación:

$$40 + a = 20 + 2a;\ a = 20 \text{ años}$$

Solución:

El padre tendrá 40 + 20 = 60 años.
El hijo tendrá 10 + 20 = 30 años.

Comprobación:

$$60 = 2 \cdot 30$$

5.3. Problemas de mezclas

¿Cuántos litros de vino de 3 euros/l hay que mezclar con 40 litros de vino de 2 euros/l para obtener vino a 2'75 euros/l?

Planteamiento:

Designemos por ***x*** la cantidad de litros de vino que hemos de mezclar. Su valor será $3x$ euros. El valor de los 40 litros de vino a 2 euros por litro es:

$$40 \cdot 2 = 80 \text{ euros.}$$

En total tendremos $x + 40$ litros que deseamos vender a 2'75 euros el litro y cuyo importe es:

$(x + 40)$ 2’75 euros

Resolvemos la ecuación:

$$\mathbf{3x + 40 \cdot 2 = (x + 40)\ 2'75}$$

Solución:

x = 120 litros de vino de 3 € por litro

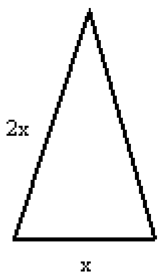
Comprobación:

$$3 \cdot 120 + 40 \cdot 2 = (120 + 40) \cdot 2'75$$

5.4. Problemas geométricos

El perímetro de un triángulo isósceles mide 15 cm. Calcula la longitud de sus lados sabiendo que el lado desigual mide la mitad de cada uno de los otros dos.

Planteamiento:



Un dibujo como el que aparece en el margen nos podría aclarar el problema. Recuerda que un triángulo isósceles tiene dos lados iguales. Si llamamos ***x*** al lado desigual, los otros miden **2*x*** cada uno (el doble).

El perímetro es la suma de todos los lados:

$$\mathbf{x + 2x + 2x = 15}$$

Resolvemos la ecuación:

$$\mathbf{5x = 15;\ x = \frac{15}{2};\ x = 3}$$

Solución:

x = 3, por lo que un lado mide 3 cm y cada uno de los otros dos miden 6 cm.

Comprobación:

Si sumamos los tres lados obtenemos el perímetro: 3 + 6 + 6 = 15.

5.5. Problemas de móviles con el mismo sentido

Un tren de mercancías parte desde Madrid hacia Sevilla a las siete de la mañana a una velocidad constante de 50 km/h. A las once de la mañana parte desde la misma estación el AVE hacia Sevilla a una velocidad constante de 220 km/h. ¿Cuánto tiempo tardará el AVE en alcanzar al mercancías y a qué distancia de Madrid lo alcanzará? La distancia entre Madrid y Sevilla es de 471 kilómetros.

Planteamiento:

Como la velocidad es constante, cada móvil habrá recorrido en un tiempo t un espacio $v \cdot t$. Cuando el AVE alcance al mercancías ambos habrán recorrido el mismo espacio, el AVE en un tiempo t y el mercancías, como ha salido cuatro horas antes, en un tiempo $t + 4$.

El espacio recorrido por el AVE en t horas será:

$$\mathbf{e_1 = 220t}$$

El espacio recorrido por el mercancías en t + 4 horas será:

$$\mathbf{e_2 = 50\ (t + 4)}$$

Como ambos habrán recorrido el mismo espacio, resulta:

$$\mathbf{220 \cdot t = 50 \cdot (t + 4)}$$

Solución:

$t = \frac{20}{17}$ horas, es decir, 1h 10m 35’3s.

Calculamos la distancia recorrida sustituyendo en una de las expresiones de tiempo.

$$e_1 = 220 \cdot \frac{20}{17} = 258'82 \text{ km de Madrid}$$

Comprobación:

Calculamos la distancia recorrida por el otro tren. Si coincide, es que el AVE alcanza al mercancías en ese instante:

$$e_2 = 50(\frac{20}{17} + 4) = 258'82 \text{ km.}$$

5.6. Problemas de móviles con sentido contrario

A las 9 de la mañana parte un AVE desde Madrid en sentido Sevilla a una velocidad constante de 200 km/h. Una hora más tarde parte un mercancías desde Sevilla en dirección Madrid a una velocidad constante de 60 km/h. ¿A qué hora se encuentran y a qué distancia de los puntos de salida? La distancia entre Madrid y Sevilla es de 471 kilómetros.

Planteamiento:

Desde que sale el AVE hasta que se encuentra con el mercancías habrá estado un tiempo t andando y habrá recorrido un espacio $e_1 = 200 \cdot t$.

De igual manera, el mercancías habrá andado durante un tiempo $t - 1$ y recorrido un espacio $e_2 = 60\ (t - 1)$ hasta que se encuentre con el AVE. Lógicamente, la suma de los dos espacios es la distancia entre ambas ciudades: $e_1 + e_2 = 471$

Solución:

Así que: $\mathbf{200}\boldsymbol{t} \mathbf{+ 60\ (}\boldsymbol{t} \mathbf{- 1) = 471}$

Resolviendo la ecuación tenemos: $t = 531 / 260$ horas, es decir, 2h 2m 32'3s. Para saber a qué distancia de ambas ciudades se produce el encuentro basta calcular los valores numéricos de e_1 y de e_2 una vez que sabemos el valor t.

Comprobación:

La suma de ambas distancias ha de ser igual a 471 km.

5.7. Problemas de trabajadores, grifos,...

Un grifo llena un depósito en 3 horas y otro grifo lo hace en 4 horas. ¿Cuánto tiempo tardarán en llenarlo los dos a la vez?

Planteamiento:

Llamemos x al tiempo que tardarán ambos grifos en llenar el depósito y veamos la parte del depósito que llena cada uno en una hora.

Como el primero tarda 3 horas en llenarlo, en 1 hora llenará la tercera parte (1/3) del depósito; el segundo llenará 1/4 del depósito en una hora, y los dos juntos, en una hora, habrán llenado los $1/x$ del depósito.

Por lo tanto:

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{1}{x}$$

Solución:

$x = \frac{12}{7}$ horas, es decir, 1h 42m 51'43s.

Realiza las actividades de la 14 a la 47.

A C T I V I D A D E S

1. Traduce al lenguaje algebraico las siguientes frases:

a) la mitad de un número más ocho.

b) el doble de un número menos su mitad
c) aumenta en cuatro el triple de un número
d) la suma de los cuadrados de dos números
e) disminuye en seis el doble del cuadrado de un número

2. Escribe en lenguaje algebraico las siguientes informaciones relativas a la base y la altura de un rectángulo:

a) la base es el doble que la altura.
b) la base excede en cinco unidades a la altura.
c) La altura es dos quintos de la base.
d) El área del rectángulo es de 75 cm^2.
e) La base y la altura difieren en 3 unidades

3. Halla el valor numérico de las siguientes expresiones para el valor de la variable que se indica:

a) $3x + 2y$, para $x = 1$; $y = 0$
b) $3(x + 2)^2$, para $x = 1$; $x = -2$; $x = 3/2$
c) $2(x - y)^2$, para $x = 2$; $y = -3$

4. Desarrolla las siguientes igualdades:

a) $(a + b)^2$
b) $(a - b)^2$
c) $(1 - a)(1 + a)$
d) $(3 + b)^2$
e) $(b + 6)(b - 6)$
f) $(2a - 1)^2$
g) Comprueba que son identidades cada uno de los apartados anteriores dando diversos valores y viendo que los resultados coinciden.

5. Expresa como potencias o productos las siguientes sumas:

a) $x^2 - 1$
b) $x^2 + 4 + 4x$
c) $49 - 9x^2$
d) $9x^2 - 6x + 1$
e) $x^2 - 12x + 36$
f) $x^2 - y^2$

6. Resuelve las ecuaciones siguientes:

a) $x + 28 = 12$
b) $x - 10 = 12$
c) $x + 2 = 8$
d) $5 - x = 3$
e) $9 - x = 0$
f) $x + 5 = 81$
g) $8 - x = 1$

7. Resuelve estas ecuaciones:

a) $3x = 6$
b) $5x = 25$
c) $9x = 99$
d) $2x = 64$
e) $2x = 5$
f) $6x = 1$
g) $7x = 3$
h) $12x = 21$

8. Halla el valor de la incógnita en cada ecuación:

a) $3x - 6 = 0$
b) $5s - 4 = 16$
c) $7y + 5 = 33$
d) $1 - 2x = 0$
e) $190 - 9z = 100$
f) $37 - 3x = 1$

9. Encuentra el valor de x:

a) $5x + 7x = 12$
b) $9x + 14x = 50$
c) $3x - 2 = 4x - 7$
d) $2x - 7 = 3x + 8$
e) $11x + 7x + 3x = 7$
f) $4x + 12x = 30 + 15x$
g) $29 - 17x = 5x$
h) $-3x + 2 = x - 10$

10. Resuelve:

a) $2(x-1)=0$
b) $5(1-x)=0$
c) $7(x-2)=42$
d) $9(2x-3)=9$
e) $3(3+x)=2x+10$
f) $(x-1)9=6x+18$
g) $x+7=2(x-3)$
h) $12+2(x-3)=3$

11. Resuelve las ecuaciones:

a) $2(x+3)-6(5+x)=4x+8$

b) $5(2-x)+3(x+6)=10-4(6+2x)$

c) $3x+8-5x-5=2(x+6)-7x$

d) $4x-2+6(x-4)=6+2x$

12. Resuelve las ecuaciones:

a) $\frac{(-3)+x}{-2}=4$ b) $\frac{x+3}{3}=x+5$

c) $\frac{x-1}{-5}=3$ d) $\frac{2x+6}{-2}=x-5$

13. Resuelve las ecuaciones:

a) $\frac{x}{4}+\frac{2}{3}=\frac{35}{12}$

b) $\frac{3x}{7}+\frac{4}{5}=\frac{2x}{2}-\frac{12}{35}$

c) $\frac{x+3}{8}-\frac{x-3}{10}=\frac{x-5}{4}-1$

d) $10x-\frac{95-10x}{2}=\frac{10x-55}{2}$

e) $-\frac{5x-3}{4}=5x-\frac{10+5x}{5}-\frac{5}{2}$

f) $5x-\left(\frac{3x}{3}+\frac{5x}{5}\right)=6x+\frac{5x+40}{5}$

g) $\frac{5x+2}{3}-\left(x-\frac{3x-1}{2}\right)=\frac{3x+20}{2}-\left(\frac{x+4}{6}+5\right)$

h) $3x+2\left(4x-\frac{5}{6}\right)=9x+5-\frac{x-\frac{20}{3}}{2}$

14. ¿Qué número sumado con 15 da 28?

15. ¿Qué número multiplicado por 3 y sumando luego 7 da 19?

16. La suma de dos números impares consecutivos es 32. ¿Cuáles son dichos números?

17. Tres números pares consecutivos suman 150. ¿De qué números se trata?

18. Halla tres números consecutivos que sumen 663. ¿Existirán tres números pares consecutivos que sumen 663?

19. halla dos números impares consecutivos sabiendo que la diferencia de sus cuadrados es 24.

20. Si al doble de un número le sumamos 5 obtenemos su triple. ¿De qué número hablamos?

21. Encuentra dos números naturales que sumen 48 y que al dividir uno entre otro se obtenga 3 de cociente y 4 de resto.

22. Juan tiene 28 años menos que su padre. Dentro de 15 años, la edad de éste será el doble de la de Juan. ¿Cuál es la edad de cada uno?

23. Un padre tiene 30 años y su hijo, 8. ¿Dentro de cuánto tiempo tendrá el padre el doble de la edad del hijo?

24. Un profesor tiene 42 años y su alumno 12. ¿Cuántos años faltan para que la edad del profesor sea el triple que la del alumno?

25. La edad de una madre es el triple de la de su hijo y, dentro de 16 años, sólo será el doble. ¿Cuántos años tiene cada uno?

26. Un padre tiene 48 años y su hijo 25. Averigua cuántos años han de transcurrir para que la edad del padre sea doble que la del hijo.

27. Juan le preguntó a María cuántos años tenía y ésta le respondió: “El doble de los años que tenía hace quince años más los que tengo ahora es el triple de los que tenía hace diez años”. ¿Cuántos años tiene María?

28. Una madre tiene el triple de edad que su hija. Si la madre tuviera treinta años menos y la hija 8 años más, tendrían la misma edad. ¿Qué edades tienen ahora la madre y la hija?

29. La base de un rectángulo es 3 cm mayor que la altura. Si aumentamos en 2 cm tanto la base como la altura del rectángulo, su área aumenta en 26 cm^2. ¿Cuáles son las dimensiones del rectángulo inicial?

30. Si aumentamos en 3 cm el lado de un cuadrado obtenemos otro cuadrado con 51 cm^2 más de área. ¿Cuánto mide el lado del primer cuadrado?

31. Los dos catetos de un triángulo rectángulo se diferencian en 2 cm. Si disminuimos 2 cm en cada uno de los lados obtenemos otro triángulo con 12 cm^2 menos de área. ¿Cuál es el área del triángulo original?

32. De un cuadrado de cartón reciclado recortamos un rectángulo cuya base tenga 2 cm menos que el lado del cuadrado y cuya altura sea también 2 cm. ¿Qué medida debe tener el cuadrado de cartón para que el área de la segunda figura sea la misma que el área de otro cuadrado, que resulta de restar 2 cm a cada lado del primero?

33. Una circunferencia tiene un radio que mide 8 cm. ¿Cuánto hemos de aumentar el radio para que la longitud de una nueva circunferencia sea el triple de la longitud de la primera?

34. Tengo una habitación cuadrada. Para ampliarla corro el tabique un metro, con lo que obtengo una habitación rectangular cuya superficie ha aumentado 4 m^2. Calcula los lados de la nueva habitación.

35. El área de un rectángulo aumenta en 185 cm^2 cuando la base y la altura vienen aumentadas en 5 cm cada una. Halla las dimensiones del rectángulo sabiendo que la primera es el triple de la segunda.

36. La longitud de la base de un rectángulo es 4 m mayor que la longitud de su altura. Si la longitud de la base aumenta en 2 cm y la altura en 3 cm, el área aumenta en 58 cm^2. Halla las dimensiones del rectángulo

37. Dos fuentes abiertas simultáneamente llenan un depósito en 3 horas. Una de ellas, en solitario, lo llenaría en 4 horas. ¿Cuántas horas tardaría la segunda en llenarlo ella sola?

38. Dos hombres tardan 5 horas en levantar una pequeña tapia de ladrillo. Uno de ellos, que trabaja más que el otro, lo haría él solo en 6 horas. ¿Cuánto tiempo tardaría el segundo trabajando en solitario?

39. Un depósito se llena con un grifo en 2 horas y, con otro, en tres horas. Averigua el tiempo que tarda en llenarse el depósito si se abren los dos grifos a la vez.

40. Un obrero ha empleado 25 días en la realización de un trabajo. Si hubiera dedicado dos horas más por día hubiera terminado en 20 días. ¿Durante cuántas horas trabajó diariamente?

41. Un depósito se llena con un grifo en 4 horas; con otro tarda en llenarse 6 horas, y se vacía por un desagüe en 3 horas. Halla el tiempo que tarda en llenarse estando abiertos los tres.

42. Dos personas, A y B, que distan entre sí 45 km, empiezan a caminar por la misma carretera pero en sentido contrario. La primera (A) con velocidad de 5 km/h y la segunda (B) con velocidad de 4 km/h. ¿Cuándo y dónde se encontrarán?

43. Dos ciclistas, A y B, se dirigen al mismo punto y salen también del mismo punto. La velocidad de A es de 30 km/h y la de B es de 37’5 km/h. El ciclista B sale 2 horas más tarde que A y lo alcanza en el momento de llegar ambos al punto de cita. ¿Cuánto tiempo ha empleado B y qué distancia ha recorrido?

44. Una persona va de una población a otra en un tranvía que lleva una velocidad de 14 km/h y regresa andando con una velocidad de 4 km/h. ¿Qué distancia hay entre las dos poblaciones si tarda seis horas en ir y volver?

45. A las 10h 45 m sale un avión de Madrid hacia Nueva York, siendo su velocidad de crucero de 1.000 km/h. A la misma hora sale de Nueva York un reactor hacia Madrid con una velocidad de 800 km/h. ¿A qué distancia de Madrid y a qué hora se cruzarán ambos aviones? (La distancia de Nueva York a Madrid es de 7.800 km)

46. A un vinatero le encargaron 60 l de vino a un precio de 1’1 euros/l. El comerciante sólo dispone de vino a 1’2 euros/l, así que decide echarle agua hasta obtener una mezcla del precio pedido. ¿Cómo debe hacerse la mezcla si suponemos que el agua es gratis?

47. El agua del mar tiene un 3 % de sal. ¿Cuántos litros de agua debemos agregar a 25 kg de agua de mar para que tenga sólo un 2 % de sal?