MATEMÁTICAS

SEGUNDO GES

ÍNDICE

SEGUNDO DE GES

SEGUNDO GES

1

El Número Real

TEMA 1

EL NÚMERO REAL

1. NÚMEROS FRACCIONARIOS Y DECIMALES

Al efectuar la división en un número fraccionario se obtiene un número decimal o un número entero.

Ejemplo:

$$\frac{2}{5} = 0{,}4\,; \qquad \frac{7}{2} = 3{,}5$$

A estos números se les llaman **decimales exactos**.

Hay otras fracciones cuyo resultado no es exacto, por lo que aparecen un número infinito de cifras decimales, algunas de las cuales se repiten periódicamente. Se llaman **números periódicos**, y la fracción de la que proceden se llama **fracción generatriz**. Al grupo de cifras decimales que se repite se denomina **período**, y se representa colocándole encima un arco.

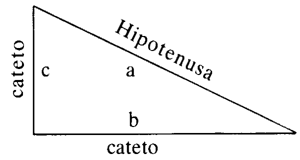
Cuando la cifra comienza a repetirse justo detrás de la coma, se le llama **periódico puro**, y en caso contrario, **periódico mixto**.

Puro	$\frac{4}{9} = 0{,}4444... = 0{,}\overset{\frown}{4}$
Mixto	$\frac{5}{12} = 0{,}41666... = 0{,}41\overset{\frown}{6}$

Realiza las actividades 1 y 2.

2. TEOREMA DE PITÁGORAS

Pitágoras demostró la relación que existe entre los lados de un triángulo rectángulo, basándose en estudios anteriores.



En los triángulos rectángulos se denominan **catetos** a los lados que forman el ángulo recto e **hipotenusa** al lado que los une.

El teorema de Pitágoras dice: **En un triángulo rectángulo, la hipotenusa al cuadrado es igual a la suma de los cuadrados de los catetos**.

$$a^2 = b^2 + c^2$$

3. NÚMEROS IRRACIONALES. CONSTRUCCIÓN Y NÚMEROS IMPORTANTES DEL CÁLCULO

Los sabios griegos creían que las fracciones podían expresar cualquier magnitud, pero se encontraron con el hecho de que la diagonal de un cuadrado de lado 1, o el cociente de entre la longitud y el diámetro de una circunferencia no se ajustaba a ninguna cantidad fraccionaria; a esas magnitudes las denominaron **irracionales**.

Los números que se caracterizan por tener una expresión decimal no periódica con infinitas cifras decimales se denominan **números irracionales** y al conjunto de todos ellos lo representamos por **I**.

Son números irracionales $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{6}$, π,…

4. EL NÚMERO REAL

Al conjunto numérico formado por **los racionales Q** y **los irracionales I** se le denomina **conjunto de los números reales** y se representa por **R**.

Si queremos trabajar con los números reales, que tienen infinitas cifras decimales, tendremos que limitar la parte decimal para simplificar los cálculos. Vamos a poner un ejemplo:

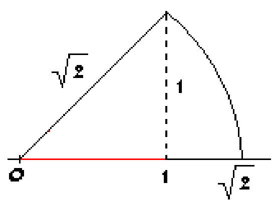
Es muy común asignarle a π el valor de 3’1416, que no es más que una aproximación o redondeo para cometer el menor error posible. Las aproximaciones pueden ser por defecto o por exceso.

Si queremos aproximar el valor de π = 3’141592654… por un número de cuatro cifras decimales exactas, lo redondearemos por un número mayor porque la quinta cifra es mayor o igual a cinco, por lo que el error cometido será más pequeño y tomaremos como valor de π ≈ 3’1416. En este caso hemos aproximado **por exceso**.

Si, en cambio, tomamos cinco cifras decimales, como la primera cifra despreciada es menor que cinco, nos dará como valor de π ≈ 3’14159. Ahora hemos aproximado **por defecto**.

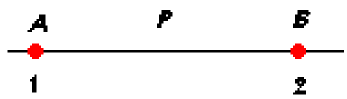
5. INTERVALOS EN R

También los números irracionales se pueden representar sobre una recta. Observa, por ejemplo, como representamos a $\sqrt{2}$ en el dibujo.



El punto se encuentra entre 1’4 y 1’5. Siempre podemos representar cualquier número irracional en una recta graduada mediante un punto situado entre los correspondientes a sus aproximaciones decimales por defecto y por exceso.

Observa los puntos *A* y *B* en la recta que aparece en el dibujo, donde *A* y *B* corresponden a los números reales 1 y 2. Cualquier punto *P* situado entre *A* y *B* corresponderá a un número real comprendido entre 1 y 2. Al conjunto de dichos números se le denomina intervalo de extremos 1 y 2. Hay distintos tipos de intervalos según se incluyan o no los extremos.



Llamamos **intervalo abierto** de extremos 1 y 2 y lo representamos por **]1, 2[** al conjunto de números entre el 1 y el 2, pero sin incluir ni al 1 ni al 2. A este intervalo pertenecen los números 1’0000001, 1’26, raíz de 2, 1’67, 1’998, 1’9999999,…

Llamamos **intervalo cerrado** de extremos 1 y 2 y lo representamos por **[1, 2]** al conjunto de números entre el 1 y el 2, ambos incluidos.

También hablaremos de intervalos semiabiertos o semicerrados si incluyen uno de los extremos y el otro no. Por tanto, el intervalo **[1, 2[** incluye el 1 pero no el 2; sin embargo, al intervalo **]1, 2]** pertenece el 2, pero no el 1.

6. CÁLCULO CON RADICALES

6.1. Multiplicación y división

Sin calculadora no podemos obtener $\sqrt{2}\cdot\sqrt{8}$, pero si este producto lo expresamos en forma potencial nos queda: $2^{1/2} \cdot 8^{1/2}$ = $(2 \cdot 8)^{1/2}$ = $16^{1/2}$ = = $\sqrt{16}$ = 4

Por tanto, podemos escribir:

$$\sqrt{2} \cdot \sqrt{8} = \sqrt{16} = 4$$

De igual manera procedemos con la división: al calcular $\sqrt{8} : \sqrt{2}$ obtenemos $8^{1/2} : 2^{1/2}$ = $4^{1/2}$ = $\sqrt{4}$ = 2.

6.2. Potencia de radicales

Para calcular potencias de números irracionales lo haremos de la misma forma que con los números racionales. Si se trata de radicales, bastará con expresarlos como potencias fraccionarias y aplicar las propiedades de las potencias.

Ejemplo:

$$\left(\sqrt{2}\right)^3 = \left(2^{1/2}\right)^3 = 2^{3/2} = \sqrt{2^3}$$

6.3. Suma y resta de radicales semejantes

Con la suma no ocurre lo mismo que con la multiplicación, ya que

$\sqrt{4} + \sqrt{9}$ no es $\sqrt{13}$, puesto que 2 + 3 ≠ $\sqrt{13}$ ≈ 3'6.

No obstante, expresiones como $\sqrt{5} + 2\sqrt{5}$ sí se pueden agrupar:

$$\sqrt{5} + 2\sqrt{5} = 3\sqrt{5}$$

Decimos que $\sqrt{5}$ y $2\sqrt{5}$ son **radicales semejantes**.

6.4. Racionalización

Llamamos **racionalización** al proceso de eliminación de los radicales en los denominadores.

Ejemplo 1:

$$\frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{\left(\sqrt{3}\right)^2} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

Ejemplo 2:

$$\frac{1}{\sqrt{3}+1} = \frac{1}{\sqrt{3}+1} \cdot \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}-1} = \qquad =$$

$$\frac{\sqrt{3}-1}{\left(\sqrt{3}\right)^2 + \sqrt{3} - \sqrt{3} - 1} = \frac{\sqrt{3}-1}{\left(\sqrt{3}\right)^2 - 1^2} =$$

$$= \frac{\sqrt{3}-1}{3-1} = \frac{\sqrt{3}-1}{2}$$

Realiza las actividades de la 4 a la 16.

7. NÚMEROS APROXIMADOS

Ciertos números no pueden expresarse de manera, exacta, como es el caso del número π, que sabemos posee infinitas cifras decimales.

En la práctica, trabajamos con precisión finita, lo cual quiere decir que sólo podemos trabajar utilizar un número finito de decimales. Para ello, tenemos dos formas de aproximar: por **truncamiento** o por **redondeo**.

El **truncamiento** consiste en cortar el número decimal por la cifra decimal que nos digan.

El **redondeo** consiste en cortar el número decimal por la cifra decimal que nos digan, si es menor que cinco la cifra decimal siguiente, y se le añade de una unidad a la última cifra si ésta es mayor o igual que cinco.

Ejemplo:

π = 3'141592654...

T = 3'1415
R = 3'1416

8. NOTACIÓN CIENTÍFICA

La notación científica sirve para expresar de forma abreviada números muy grandes o muy pequeños, facilitando su comprensión. Por ejemplo, el peso de una molécula de agua es de M=0’00000000000000000000003 g, un número largo y difícil. Podemos expresar dicho número mediante potencias de 10 de la siguiente manera:

$$M = 3\cdot 10^{-23}$$

De igual manera, podemos expresar la velocidad de la luz en el vacío, que es de 300.000 km/s, como $3\cdot 10^5$ km/s.

Realiza la actividad 3.

9. NÚMEROS ALGEBRAICOS Y TRASCENDENTES

Los **números algebraicos** son aquéllos que son solución de una ecuación y los **números trascendentes** son los que no son algebraicos.

Ejemplo:

Números algebraicos:
2/5; ($5x - 2 = 0$)
$\sqrt{2}$; ($x^2 - 2 = 0$)

Números trascendentes famosos:
π, ***e***, **γ** (constante de Euler),...

10. IDENTIDADES NOTABLES

10.1. Cuadrado de una suma

El cuadrado de una suma es igual al cuadrado del primer término, más el cuadrado del segundo, **más** el doble del producto del primero por el segundo.

$$(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$$

$$(5a + 2b)^2 = 25a^2 + 4b^2 + 20ab$$

10.2. Cuadrado de una resta

El cuadrado de una resta es igual al cuadrado del primer término, más el cuadrado del segundo, **menos** el doble del producto del primero por el segundo.

$$(a - b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab$$

$$(2a - 3b)^2 = 4a^2 + 9b^2 - 12ab$$

10.3. Suma por diferencia

El producto de una suma por una diferencia, cuando los términos son iguales, es igual al cuadrado del primer término menos el cuadrado del segundo término; es decir, suma por diferencia es igual a diferencia de cuadrados.

$$(a + b)\cdot(a - b) = a^2 - b^2$$

$$(5 + b)\cdot(5 - b) = 5^2 - b^2 = 25 - b^2$$

A C T I V I D A D E S

1. Expresa mediante un número decimal, los siguientes números decimales:

a) $\frac{12}{5}$; **c)** $\frac{5}{12}$;
b) $\frac{17}{35}$; **d)** $\frac{35}{18}$

2. Halla la fracción generatriz de:

a) $1'03\overline{5}$; **c)** $1'\overline{035}$;
b) $1'0\overline{35}$; **d)** 1’035

3. Resuelve las siguientes operaciones y expresa su resultado en notación científica:

a) $0'1\cdot 10^{-14} + 9'9\cdot 10^{-14}$
b) $2'1\cdot 10^{-18} - 0'9\cdot 10^{-18}$

c) $0'9 \cdot 10^{-9} \times 2'1 \cdot 10^{-9}$
d) $0'9 \cdot 10^{9} : 2'1 \cdot 10^{9}$
e) $0'9 \cdot 10^{-4} \times 2'1 \cdot 10^{9}$
f) $0'9 \cdot 10^{4} : 2'1 \cdot 10^{-9}$

4. Calcula el valor de los siguientes radicales. Indica si hay más de una solución, una o ninguna:

a) $\sqrt{-100};$ f) $\sqrt{100 \cdot 36}$;
b) $\sqrt[3]{-125}$; g) $\sqrt[3]{\frac{8}{27}}$;
c) $\sqrt{64}$; h) $\sqrt[4]{\frac{10000}{16}}$;
d) $\sqrt[4]{16}$; i) $\sqrt{-\frac{4}{25}}$;
e) $\sqrt{\frac{1}{100}}$;

5. Extrae fuera del signo radical todos los factores que sea posible:

a) $\sqrt{72};$ f) $\sqrt{2205}$;
b) $\sqrt{250}$; g) $\sqrt{384}$;
c) $\sqrt{500}$; h) $\sqrt[5]{9216}$;
d) $\sqrt[3]{648}$; i) $\sqrt{147}$
e) $\sqrt[4]{11664}$;

6. Introduce, dentro del signo radical, los factores:

a) $3\sqrt{5}$; e) $2\sqrt[4]{5}$;
b) $4\sqrt{7}$; f) $7\sqrt{3}$;
c) $3\sqrt[3]{2}$; g) $2\sqrt[3]{\frac{1}{8}}$;
d) $2\sqrt{2}$; h) $\frac{2}{5}\sqrt{\frac{5}{2}}$

7. Convierte en irreducibles los siguientes radicales:

a) $\sqrt[32]{5^{10}}$; e) $\sqrt[8]{5^4 \cdot 6^6 \cdot 2^8}$;
b) $\sqrt[12]{3^{10}}$; f) $\sqrt[11]{3^{22}}$;
c) $\sqrt[8]{12^6}$; g) $\sqrt[36]{7^{12}}$;
d) $\sqrt[10]{3^2 \cdot 5^4}$; h) $\sqrt[30]{\frac{2^{10}}{3^{15}}}$

8. Reduce a índice común:

a) $\sqrt{2}, \sqrt[3]{5}, \sqrt[6]{7^5}$;
b) $\sqrt[8]{a^3}, \sqrt[4]{b^5}, \sqrt{ab}$

9. Calcula:

a) $8^{\frac{1}{3}}$; d) $4^{-\frac{1}{2}}$;
b) $16^{-\frac{1}{2}}$; e) $\left(\frac{25}{4}\right)^{-\frac{1}{2}}$;
c) $125^{-\frac{1}{3}}$; f) $\left(\frac{27}{8}\right)^{\frac{1}{3}}$

10. Efectúa los siguientes productos de radicales:

a) $\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{2^4}$; c) $\sqrt{8} \cdot \sqrt[4]{2}$;
b) $\sqrt{a^3} \cdot \sqrt[3]{a}$; d) $\sqrt[4]{ab} \cdot \sqrt[5]{ac} \cdot \sqrt[10]{bc}$.

11. Efectúa los siguientes cocientes de radicales:

a) $\frac{\sqrt[5]{a^2}}{\sqrt[5]{a}}$; c) $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt[4]{125}}$;

b) $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt[3]{9}}$; d) $\frac{\sqrt[3]{4}}{\sqrt{2}}$

12. Efectúa las siguientes sumas y restas de radicales:

a) $\sqrt{8}-3\sqrt{98}+5\sqrt{32}$;

b) $5\sqrt{27}+\sqrt{500}-2\sqrt{12}+\sqrt{20}$;

c) $4\sqrt{175}-12\sqrt{28}+5\sqrt{63}-\sqrt{700}$;

d) $\sqrt{45}+\sqrt{8}-\sqrt{80}+\sqrt{98}+\sqrt{18}-\sqrt{180}$;

e) $2\sqrt{45}+\sqrt{500}-3\sqrt{245}$

13. Calcula:

a) $\left(3\sqrt{8}-\sqrt{50}+\sqrt{32}\right)\cdot\sqrt{2}$;

b) $\frac{6\sqrt{50}}{3\sqrt{32}}$;

c) $\frac{\sqrt{27}}{3\sqrt{2}}$

14. Expresa, mediante un único radical:

a) $\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}$; d) $\sqrt{5\sqrt{5\sqrt{25}}}$;

b) $\sqrt{7\sqrt[3]{7}}$; e) $\sqrt{2\sqrt{4\sqrt{64}}}$;

c) $\sqrt{3\sqrt{9\sqrt{3}}}$; f) $\sqrt{7\sqrt[3]{7\sqrt{7}}}$

15. Calcula:

a) $\left(\sqrt{12}-\sqrt{8}\right)\cdot\left(\sqrt{12}+\sqrt{8}\right)$;

b) $\left(\sqrt{8}+\sqrt{2}\right)^2$;

c) $\left(\sqrt{27}-\sqrt{3}\right)^2$

16. Racionaliza:

a) $\frac{2}{3\sqrt{2}}$; f) $\frac{2}{\sqrt{5}-2\sqrt{3}}$;

b) $\frac{1}{\sqrt[3]{5}}$; g) $\frac{\sqrt{2}}{1-2\sqrt{2}}$;

c) $\frac{3}{\sqrt[5]{9}}$; h) $\frac{1+\sqrt{5}}{3-\sqrt{5}}$;

d) $\frac{2}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$; i) $\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{1+2\sqrt{3}}$

e) $\frac{1}{\sqrt{5}-1}$;

2

Álgebra. Ecuación de Primer Grado con una Incógnita

TEMA 2

ÁLGEBRA: ECUACIÓN DE PRIMER GRADO CON UNA INCÓGNITA

La palabra ***álgebra*** proviene del árabe. Aparece por primera vez en un tratado del siglo IX, «Al–jebr W'almugabala», que significa transposición y eliminación.

Transposición es la traslación de términos de un lado a otro de una igualdad y eliminación es la supresión de términos iguales.

1. LENGUAJE ALGEBRAICO

El **lenguaje algebraico** es el formado por números, letras que representan a números y los símbolos de las operaciones aritméticas. Este lenguaje nos va a permitir traducir problemas formulados verbalmente a lenguaje matemático de manera exacta, lo cual facilitará su resolución.

Las expresiones formadas por números, letras que representan a números y los signos de las operaciones aritméticas que se realizan entre ellos se llaman **expresiones algebraicas**.

Cada una de las letras que intervienen en una expresión algebraica se denomina **variable**.

Ejemplo:

$2x + 7 = 2(2x - 3)$, donde ***x*** es la variable.

Hallar el **valor numérico de una expresión algebraica** consiste en dar valores concretos a las variables. Por ejemplo: sabemos que el área de un rectángulo es ***A= b · h***. Si necesitamos saber el área de una habitación de 5 m de largo y 7 de ancho, sustituimos la letra ***b*** por 5 y la ***h*** por 7. El resultado es **A = 35 m²**.

Llamamos **identidad** a una igualdad cierta para cualquier valor de las variables.

Ejemplo:

$$x + 3 = x + 5 - 2$$

En Matemáticas existen identidades muy importantes que reciben el nombre de **identidades notables**. Son las siguientes:

$(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$
$(a - b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab$
$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$
Recuerda que la igualdad es **reversible**

Realiza las actividades 1, 2, 4 y 5.

2. ECUACIONES

Se denomina **ecuación** a toda igualdad que sólo es cierta para algunos valores de las variables. En este caso, las variables se llaman **incógnitas** y, cada sumando, **término de la ecuación**. Los términos numéricos se denominan **términos independientes**.

Al valor de la variable (o los valores de las variables) para el cual es cierta la igualdad se le llama **solución** de una ecuación. Ésta puede ser única, pueden ser varias o incluso puede que la ecuación no tenga solución. En este caso concreto a la ecuación la llamaremos **ecuación imposible**.

Realiza la actividad 3.

3. RESOLUCIÓN DE ECUACIONES

Resolver una ecuación es hallar el valor de la incógnita:

$$x + 12 = 46$$

En esta igualdad, $x + 12$ está en el **primer miembro** (a la izquierda del signo =), y 46 está en el **segundo miembro** (a la derecha del signo =). Nuestro objetivo es aislar la ***x***, es decir, dejarla **sola** en alguno de los miembros. En este caso, tenemos que trasponer el 12.

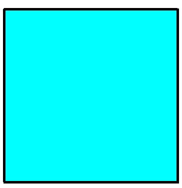
$$x + 12 - 12 = 46 - 12$$

$x = 46 - 12$, de donde $x = 34$

Para simplificar el proceso, podemos generalizar diciendo que, para despejar (dejar sola) la ***x***, podemos trasponer los términos que la acompañan pasándolos al otro miembro haciendo la operación contraria. (Si estaba sumando, pasa restando; si estaba restando, pasa sumando; si estaba multiplicando, pasa dividiendo; si estaba dividiendo, pasa multiplicando).

Ejemplo:

El perímetro de un cuadrado es 12 m. ¿Cuánto mide cada uno de los lados?



$$4 \cdot x = 12$$

$$x = \frac{12}{4};\ x = 3$$

Solución: Cada lado mide 3 m.

Es importante que, una vez resuelta la ecuación, compruebes el resultado. Esto se hace sustituyendo la ***x*** por el valor que has hallado y comprobando que se mantiene la igualdad. En este caso:

$$4 \cdot 3 = 12$$

Realiza las actividades de la 6 a la 11.

4. RESOLUCIÓN DE ECUACIONES MÁS COMPLEJAS

A veces nos encontramos ecuaciones donde la incógnita nos aparece repetida y en ambos miembros:

Método de resolver ecuaciones de primer grado con una incógnita

1. Quitar paréntesis. Si no los hay, pasar al paso 2.
2. Quitar denominadores. Si al quitar denominadores aparecen paréntesis, volver al paso 1. Si no hay denominadores, pasar al paso 3.
3. Agrupar en un miembro los términos con **x** y en el otro los que no la tengan.
4. Simplificar.
5. Despejar la **x**.

Ejemplo:

$$6x + 5 - 3x = 15 - 2x$$

Cuando nos encontremos una ecuación de este tipo, es conveniente agrupar en un miembro los términos con ***x*** y en el otro los que no la tengan.

$$6x - 3x + 2x = 15 - 5$$

$$5x = 10$$

$$x = \frac{10}{5}\text{, de donde } x = 2$$

En las ecuaciones donde aparecen fracciones, lo primero que hemos de procurar es eliminarlos. Esto lo haremos reduciendo todos los términos a común denominador.

Ejemplo:

$$\frac{x}{2} + \frac{x}{5} - 6 = 8$$

$$\frac{5x}{10} + \frac{2x}{10} - \frac{60}{10} = \frac{80}{10}$$

Prescindiendo de los denominadores:

$$5x + 2x - 60 = 80$$

Y ya podemos resolver trasponiendo términos:

$$5x + 2x = 80 + 60$$

$$7x = 140$$

$$x = \frac{140}{7}\text{, de donde } x = 20$$

De igual manera se aplica este método si hemos de despejar fórmulas matemáticas. Por ejemplo, si tenemos que despejar el radio, ***r***, en la fórmula de la superficie del círculo:

$$S = \pi \cdot r^2$$

$$r^2 = \frac{S}{\pi}$$

$$r = \sqrt{\frac{S}{\pi}}$$

Realiza las actividades 12 y 13.

5. APLICACIÓN A LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

No existe una receta única que nos conduzca a un final feliz en la resolución de un problema, aunque te vamos a facilitar un procedimiento que, junto con la práctica, te lo va a allanar bastante.

Procedimiento para resolver un problema

1. Lee atentamente el enunciado del problema hasta comprenderlo.
2. Elige adecuadamente la incógnita.
3. Traduce el enunciado del problema a lenguaje algebraico.
4. Resuelve la ecuación obtenida.
5. Comprueba la solución en la ecuación.
6. Da una respuesta al problema
7. Comprueba dicha respuesta con el enunciado del problema

5.1. Problemas de tipo aritmético

La suma de tres números impares consecutivos es 1.845. Determina de qué números se trata.

Planteamiento:

Un número impar se puede escribir así: $2x + 1$.

Tengo que considerar que sean consecutivos. Vendrán dados por:

$\mathbf{2x + 1}$
$2x + 1 + 2 = \mathbf{2x + 3}$
$2x + 3 + 2 = \mathbf{2x + 5}$

La suma de los tres ha de ser 1.845

$$\mathbf{(2x + 1) + (2x + 3) + (2x + 5) = 1.845}$$

Resolvemos la ecuación:

$$\mathbf{6x + 9 = 1.845;\ x = 306}$$

Solución:

Primer número: $2 \cdot 306 + 1 =$ **613**
Segundo número: $2 \cdot 306 + 3 =$ **615**
Tercer número: $2 \cdot 306 + 5 =$ **617**

Comprobación:

Son todos impares y su suma es 1.845.

5.2. Problemas de edades

Un hombre de 40 años tiene un hijo de 10 años. ¿Cuántos años han de transcurrir para que la edad del padre sea el doble que la del hijo?

Planteamiento:

Sea ***a*** el número de años que deben transcurrir. Entonces el padre tendrá $40 + a$ años y el hijo $10 + a$ años.

Nos dicen que la edad del padre será doble que la del hijo, por tanto:

$$\mathbf{40 + a = 2(10 + a)}$$

Resolvemos la ecuación:

$$\mathbf{40 + a = 20 + 2a;\ a = 20\ años}$$

Solución:

El padre tendrá 40 + 20 = 60 años.
El hijo tendrá 10 + 20 = 30 años.

Comprobación:

$$60 = 2 \cdot 30$$

5.3. Problemas de mezclas

¿Cuántos litros de vino de 3 euros/l hay que mezclar con 40 litros de vino de 2 euros/l para obtener vino a 2’75 euros/l?

Planteamiento:

Designemos por ***x*** la cantidad de litros de vino que hemos de mezclar. Su valor será $3x$ euros. El valor de los 40 litros de vino a 2 euros por litro es:

$$40 \cdot 2 = 80 \text{ euros.}$$

En total tendremos $x + 40$ litros que deseamos vender a 2’75 euros el litro y cuyo importe es:

$(x + 40)$ 2'75 euros

Resolvemos la ecuación:

$$\mathbf{3x + 40 \cdot 2 = (x + 40)\ 2'75}$$

Solución:

x = 120 litros de vino de 3 € por litro

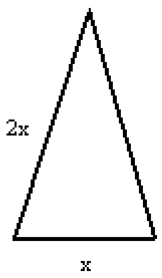
Comprobación:

$$3 \cdot 120 + 40 \cdot 2 = (120 + 40) \cdot 2'75$$

5.4. Problemas geométricos

El perímetro de un triángulo isósceles mide 15 cm. Calcula la longitud de sus lados sabiendo que el lado desigual mide la mitad de cada uno de los otros dos.

Planteamiento:



Un dibujo como el que aparece en el margen nos podría aclarar el problema. Recuerda que un triángulo isósceles tiene dos lados iguales. Si llamamos ***x*** al lado desigual, los otros miden **2*x*** cada uno (el doble).

El perímetro es la suma de todos los lados:

$$\mathbf{x + 2x + 2x = 15}$$

Resolvemos la ecuación:

$$\mathbf{5x = 15;\ x = \frac{15}{2};\ x = 3}$$

Solución:

x = 3, por lo que un lado mide 3 cm y cada uno de los otros dos miden 6 cm.

Comprobación:

Si sumamos los tres lados obtenemos el perímetro: 3 + 6 + 6 = 15.

5.5. Problemas de móviles con el mismo sentido

Un tren de mercancías parte desde Madrid hacia Sevilla a las siete de la mañana a una velocidad constante de 50 km/h. A las once de la mañana parte desde la misma estación el AVE hacia Sevilla a una velocidad constante de 220 km/h. ¿Cuánto tiempo tardará el AVE en alcanzar al mercancías y a qué distancia de Madrid lo alcanzará? La distancia entre Madrid y Sevilla es de 471 kilómetros.

Planteamiento:

Como la velocidad es constante, cada móvil habrá recorrido en un tiempo t un espacio $v \cdot t$. Cuando el AVE alcance al mercancías ambos habrán recorrido el mismo espacio, el AVE en un tiempo t y el mercancías, como ha salido cuatro horas antes, en un tiempo $t + 4$.

El espacio recorrido por el AVE en t horas será:

$$\mathbf{e_1 = 220t}$$

El espacio recorrido por el mercancías en t + 4 horas será:

$$\mathbf{e_2 = 50\ (t + 4)}$$

Como ambos habrán recorrido el mismo espacio, resulta:

$$\mathbf{220 \cdot t = 50 \cdot (t + 4)}$$

Solución:

$t = \frac{20}{17}$ horas, es decir, 1h 10m 35'3s.

Calculamos la distancia recorrida sustituyendo en una de las expresiones de tiempo.

$e_1 = 220 \cdot \frac{20}{17}$ = 258’82 km de Madrid

<u>Comprobación</u>:

Calculamos la distancia recorrida por el otro tren. Si coincide, es que el AVE alcanza al mercancías en ese instante:

$e_2 = 50(\frac{20}{17} + 4) = 258'82$ km.

5.6. Problemas de móviles con sentido contrario

A las 9 de la mañana parte un AVE desde Madrid en sentido Sevilla a una velocidad constante de 200 km/h. Una hora más tarde parte un mercancías desde Sevilla en dirección Madrid a una velocidad constante de 60 km/h. ¿A qué hora se encuentran y a qué distancia de los puntos de salida? La distancia entre Madrid y Sevilla es de 471 kilómetros.

<u>Planteamiento</u>:

Desde que sale el AVE hasta que se encuentra con el mercancías habrá estado un tiempo *t* andando y habrá recorrido un espacio $e_1 = 200 \cdot t$.

De igual manera, el mercancías habrá andado durante un tiempo $t - 1$ y recorrido un espacio $e_2 = 60\ (t - 1)$ hasta que se encuentre con el AVE. Lógicamente, la suma de los dos espacios es la distancia entre ambas ciudades: $e_1 + e_2 = 471$

<u>Solución</u>:

Así que: $\mathbf{200t + 60\ (t - 1) = 471}$

Resolviendo la ecuación tenemos: $t = 531 / 260$ horas, es decir, 2h 2m 32’3s. Para saber a qué distancia de ambas ciudades se produce el encuentro basta calcular los valores numéricos de e_1 y de e_2 una vez que sabemos el valor *t*.

<u>Comprobación</u>:

La suma de ambas distancias ha de ser igual a 471 km.

5.7. Problemas de trabajadores, grifos,...

Un grifo llena un depósito en 3 horas y otro grifo lo hace en 4 horas. ¿Cuánto tiempo tardarán en llenarlo los dos a la vez?

<u>Planteamiento</u>:

Llamemos *x* al tiempo que tardarán ambos grifos en llenar el depósito y veamos la parte del depósito que llena cada uno en una hora.

Como el primero tarda 3 horas en llenarlo, en 1 hora llenará la tercera parte (1/3) del depósito; el segundo llenará 1/4 del depósito en una hora, y los dos juntos, en una hora, habrán llenado los 1/*x* del depósito.

Por lo tanto:

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{1}{x}$$

<u>Solución</u>:

$x = \frac{12}{7}$ horas, es decir, 1h 42m 51’43s.

Realiza las actividades de la 14 a la 47.

A C T I V I D A D E S

1. Traduce al lenguaje algebraico las siguientes frases:

a) la mitad de un número más ocho.

b) el doble de un número menos su mitad
c) aumenta en cuatro el triple de un número
d) la suma de los cuadrados de dos números
e) disminuye en seis el doble del cuadrado de un número

2. Escribe en lenguaje algebraico las siguientes informaciones relativas a la base y la altura de un rectángulo:

a) la base es el doble que la altura.
b) la base excede en cinco unidades a la altura.
c) La altura es dos quintos de la base.
d) El área del rectángulo es de 75 cm^2.
e) La base y la altura difieren en 3 unidades

3. Halla el valor numérico de las siguientes expresiones para el valor de la variable que se indica:

a) $3x + 2y$, para $x = 1$; $y = 0$
b) $3(x + 2)^2$, para $x = 1$; $x = -2$; $x = 3/2$
c) $2(x - y)^2$, para $x = 2$; $y = -3$

4. Desarrolla las siguientes igualdades:

a) $(a + b)^2$
b) $(a - b)^2$
c) $(1 - a)(1 + a)$
d) $(3 + b)^2$
e) $(b + 6)(b - 6)$
f) $(2a - 1)^2$
g) Comprueba que son identidades cada uno de los apartados anteriores dando diversos valores y viendo que los resultados coinciden.

5. Expresa como potencias o productos las siguientes sumas:

a) $x^2 - 1$
b) $x^2 + 4 + 4x$
c) $49 - 9x^2$
d) $9x^2 - 6x + 1$
e) $x^2 - 12x + 36$
f) $x^2 - y^2$

6. Resuelve las ecuaciones siguientes:

a) $x + 28 = 12$
b) $x - 10 = 12$
c) $x + 2 = 8$
d) $5 - x = 3$
e) $9 - x = 0$
f) $x + 5 = 81$
g) $8 - x = 1$

7. Resuelve estas ecuaciones:

a) $3x = 6$
b) $5x = 25$
c) $9x = 99$
d) $2x = 64$
e) $2x = 5$
f) $6x = 1$
g) $7x = 3$
h) $12x = 21$

8. Halla el valor de la incógnita en cada ecuación:

a) $3x - 6 = 0$
b) $5s - 4 = 16$
c) $7y + 5 = 33$
d) $1 - 2x = 0$
e) $190 - 9z = 100$
f) $37 - 3x = 1$

9. Encuentra el valor de x:

a) $5x + 7x = 12$
b) $9x + 14x = 50$
c) $3x - 2 = 4x - 7$
d) $2x - 7 = 3x + 8$
e) $11x + 7x + 3x = 7$
f) $4x + 12x = 30 + 15x$
g) $29 - 17x = 5x$
h) $-3x + 2 = x - 10$

10. Resuelve:

a) $2(x – 1) = 0$
b) $5(1 – x) = 0$
c) $7(x – 2) = 42$
d) $9(2x – 3) = 9$
e) $3(3 + x) = 2x + 10$
f) $(x – 1)9 = 6x + 18$
g) $x + 7 = 2(x – 3)$
h) $12 + 2(x – 3) = 3$

11. Resuelve las ecuaciones:

a) $2 (x + 3) – 6 (5 + x) = 4x + 8$

b) $5 (2 – x) + 3 (x + 6) = 10 – 4 (6 + 2x)$

c) $3x + 8 – 5x – 5 = 2 (x + 6) – 7x$

d) $4x – 2 + 6 (x – 4) = 6 + 2x$

12. Resuelve las ecuaciones:

a) $\frac{(-3)+x}{-2} = 4$ b) $\frac{x+3}{3} = x+5$

c) $\frac{x-1}{-5} = 3$ d) $\frac{2x+6}{-2} = x-5$

13. Resuelve las ecuaciones:

a) $\frac{x}{4} + \frac{2}{3} = \frac{35}{12}$

b) $\frac{3x}{7} + \frac{4}{5} = \frac{2x}{2} - \frac{12}{35}$

c) $\frac{x+3}{8} - \frac{x-3}{10} = \frac{x-5}{4} - 1$

d) $10x - \frac{95-10x}{2} = \frac{10x-55}{2}$

e) $-\frac{5x-3}{4} = 5x - \frac{10+5x}{5} - \frac{5}{2}$

f) $5x - \left(\frac{3x}{3} + \frac{5x}{5}\right) = 6x + \frac{5x+40}{5}$

g) $\frac{5x+2}{3} - \left(x - \frac{3x-1}{2}\right) = \frac{3x+20}{2} - \left(\frac{x+4}{6} + 5\right)$

h) $3x + 2\left(4x - \frac{5}{6}\right) = 9x + 5 - \frac{x - \frac{20}{3}}{2}$

14. ¿Qué número sumado con 15 da 28?

15. ¿Qué número multiplicado por 3 y sumando luego 7 da 19?

16. La suma de dos números impares consecutivos es 32. ¿Cuáles son dichos números?

17. Tres números pares consecutivos suman 150. ¿De qué números se trata?

18. Halla tres números consecutivos que sumen 663. ¿Existirán tres números pares consecutivos que sumen 663?

19. halla dos números impares consecutivos sabiendo que la diferencia de sus cuadrados es 24.

20. Si al doble de un número le sumamos 5 obtenemos su triple. ¿De qué número hablamos?

21. Encuentra dos números naturales que sumen 48 y que al dividir uno entre otro se obtenga 3 de cociente y 4 de resto.

22. Juan tiene 28 años menos que su padre. Dentro de 15 años, la edad de éste será el doble de la de Juan. ¿Cuál es la edad de cada uno?

23. Un padre tiene 30 años y su hijo, 8. ¿Dentro de cuánto tiempo tendrá el padre el doble de la edad del hijo?

24. Un profesor tiene 42 años y su alumno 12. ¿Cuántos años faltan para que la edad del profesor sea el triple que la del alumno?

25. La edad de una madre es el triple de la de su hijo y, dentro de 16 años, sólo será el doble. ¿Cuántos años tiene cada uno?

26. Un padre tiene 48 años y su hijo 25. Averigua cuántos años han de transcurrir para que la edad del padre sea doble que la del hijo.

27. Juan le preguntó a María cuántos años tenía y ésta le respondió: “El doble de los años que tenía hace quince años más los que tengo ahora es el triple de los que tenía hace diez años”. ¿Cuántos años tiene María?

28. Una madre tiene el triple de edad que su hija. Si la madre tuviera treinta años menos y la hija 8 años más, tendrían la misma edad. ¿Qué edades tienen ahora la madre y la hija?

29. La base de un rectángulo es 3 cm mayor que la altura. Si aumentamos en 2 cm tanto la base como la altura del rectángulo, su área aumenta en 26 cm^2. ¿Cuáles son las dimensiones del rectángulo inicial?

30. Si aumentamos en 3 cm el lado de un cuadrado obtenemos otro cuadrado con 51 cm^2 más de área. ¿Cuánto mide el lado del primer cuadrado?

31. Los dos catetos de un triángulo rectángulo se diferencian en 2 cm. Si disminuimos 2 cm en cada uno de los lados obtenemos otro triángulo con 12 cm^2 menos de área. ¿Cuál es el área del triángulo original?

32. De un cuadrado de cartón reciclado recortamos un rectángulo cuya base tenga 2 cm menos que el lado del cuadrado y cuya altura sea también 2 cm. ¿Qué medida debe tener el cuadrado de cartón para que el área de la segunda figura sea la misma que el área de otro cuadrado, que resulta de restar 2 cm a cada lado del primero?

33. Una circunferencia tiene un radio que mide 8 cm. ¿Cuánto hemos de aumentar el radio para que la longitud de una nueva circunferencia sea el triple de la longitud de la primera?

34. Tengo una habitación cuadrada. Para ampliarla corro el tabique un metro, con lo que obtengo una habitación rectangular cuya superficie ha aumentado 4 m^2. Calcula los lados de la nueva habitación.

35. El área de un rectángulo aumenta en 185 cm^2 cuando la base y la altura vienen aumentadas en 5 cm cada una. Halla las dimensiones del rectángulo sabiendo que la primera es el triple de la segunda.

36. La longitud de la base de un rectángulo es 4 m mayor que la longitud de su altura. Si la longitud de la base aumenta en 2 cm y la altura en 3 cm, el área aumenta en 58 cm^2. Halla las dimensiones del rectángulo

37. Dos fuentes abiertas simultáneamente llenan un depósito en 3 horas. Una de ellas, en solitario, lo llenaría en 4 horas. ¿Cuántas horas tardaría la segunda en llenarlo ella sola?

38. Dos hombres tardan 5 horas en levantar una pequeña tapia de ladrillo. Uno de ellos, que trabaja más que el otro, lo haría él solo en 6 horas. ¿Cuánto tiempo tardaría el segundo trabajando en solitario?

39. Un depósito se llena con un grifo en 2 horas y, con otro, en tres horas. Averigua el tiempo que tarda en llenarse el depósito si se abren los dos grifos a la vez.

40. Un obrero ha empleado 25 días en la realización de un trabajo. Si hubiera dedicado dos horas más por día hubiera terminado en 20 días. ¿Durante cuántas horas trabajó diariamente?

41. Un depósito se llena con un grifo en 4 horas; con otro tarda en llenarse 6 horas, y se vacía por un desagüe en 3 horas. Halla el tiempo que tarda en llenarse estando abiertos los tres.

42. Dos personas, A y B, que distan entre sí 45 km, empiezan a caminar por la misma carretera pero en sentido contrario. La primera (A) con velocidad de 5 km/h y la segunda (B) con velocidad de 4 km/h. ¿Cuándo y dónde se encontrarán?

43. Dos ciclistas, A y B, se dirigen al mismo punto y salen también del mismo punto. La velocidad de A es de 30 km/h y la de B es de 37’5 km/h. El ciclista B sale 2 horas más tarde que A y lo alcanza en el momento de llegar ambos al punto de cita. ¿Cuánto tiempo ha empleado B y qué distancia ha recorrido?

44. Una persona va de una población a otra en un tranvía que lleva una velocidad de 14 km/h y regresa andando con una velocidad de 4 km/h. ¿Qué distancia hay entre las dos poblaciones si tarda seis horas en ir y volver?

45. A las 10h 45 m sale un avión de Madrid hacia Nueva York, siendo su velocidad de crucero de 1.000 km/h. A la misma hora sale de Nueva York un reactor hacia Madrid con una velocidad de 800 km/h. ¿A qué distancia de Madrid y a qué hora se cruzarán ambos aviones? (La distancia de Nueva York a Madrid es de 7.800 km)

46. A un vinatero le encargaron 60 l de vino a un precio de 1’1 euros/l. El comerciante sólo dispone de vino a 1’2 euros/l, así que decide echarle agua hasta obtener una mezcla del precio pedido. ¿Cómo debe hacerse la mezcla si suponemos que el agua es gratis?

47. El agua del mar tiene un 3 % de sal. ¿Cuántos litros de agua debemos agregar a 25 kg de agua de mar para que tenga sólo un 2 % de sal?

3

Ecuaciones de Segundo Grado e Irracionales

TEMA 3

ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO E IRRACIONALES

1. LAS ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO. TIPOS

Una **ecuación de segundo grado** con una incógnita es una ecuación equivalente a otra de la forma:

$\mathbf{a}x^2 + \mathbf{b}x + \mathbf{c} = 0$, siendo $a \neq 0$.

La x recibe el nombre de **incógnita**.

Las letras **a**, **b**, **c** las llamamos **coeficientes**. Hemos dicho en la definición que el coeficiente de x^2 ha de ser siempre distinto de cero, pero es posible que **b** o **c** sí lo sean. En este caso diremos que la ecuación es **incompleta**. En caso contrario diremos que es **completa**.

Ejemplos:

$3x^2 + 5x + 4 = 0$ es una ecuación de segundo grado completa con coeficientes **a** = 3, **b** = 5 y **c** = 4.

$x^2 – 2x – 9 = 0$ es una ecuación de segundo grado completa con coeficientes **a** = 1, **b** = –2 y **c** = –9

$–5x^2 + 6 = 0$ es una ecuación de segundo grado incompleta con coeficientes **a** = –5 y **c** = 6

Realiza las actividades 1 y 2.

2. NÚMERO DE SOLUCIONES DE UNA ECUACIÓN DE SEGUNDO GRADO

Encontrar una solución de la ecuación es hallar el número que, sustituido en lugar de la x, hace que los dos miembros de la igualdad sean iguales.

El número de soluciones de una ecuación de este tipo puede ser dos, una o ninguna. Veamos ejemplos donde ocurre esto:

- $x^2 = 0$ tiene sólo la solución 0
- $x^2 = 4$ tiene como soluciones 2 y –2, ya que $2^2 = 4$ y $(–2)^2 = 4$
- $x^2 = –4$ no tiene ninguna solución puesto que no hay ningún número cuyo cuadrado sea un número negativo.

Realiza las actividades 4 y 5.

3. RESOLUCIÓN DE ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO

Resolver una ecuación consiste en utilizar un procedimiento para encontrar sus soluciones. Como la resolución de este tipo de ecuaciones tiene cierta dificultad vamos a distinguir diversos casos:

3.1. Ecuaciones de la forma: $ax^2+c = 0$

Se soluciona despejando x^2 y extrayendo la raíz cuadrada:

$$x^2 = \frac{-c}{a} \Rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{-c}{a}}$$

Luego, si c = 0, la única solución es $x = 0$; si $\frac{-c}{a}>0$, tendremos dos soluciones; y si $\frac{-c}{a}< 0$, la ecuación no tiene solución.

Ejemplo:

$2x^2 - 8 = 0$; $2x^2 = 8$; $x^2 = 4$;
$x = \pm\sqrt{4}$; $x = 2$ y $x = -2$

3.2. Ecuaciones $ax^2 + bx = 0$

Para resolver este tipo de ecuaciones en primer lugar debemos sacar factor común x:

$$x\,(ax + b) = 0$$

Este producto es cero cuando uno de los dos factores es cero:

$$x = 0\ ;\ ax + b = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ ó } x = \frac{-b}{a}$$

En el caso en que la ecuación tenga la forma $(x + p)(x + q) = 0$ podremos obtener las raíces teniendo en cuenta que cada factor puede ser nulo. Por tanto las soluciones son: $x = -p$ y $x = -q$

Ejemplos:

a) $3x^2 - 4x = 0$; $x(3x - 4) = 0$; $x = 0$ ó $x = 4/3$

b) $(x - 3)(x + 7) = 0$; $x = 3$ y $x = -7$

3.3. Fórmula general para resolver ecuaciones de segundo grado

Vamos a utilizar el método de completar cuadrados en la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$, para obtener la fórmula que nos permita obtener directamente sus soluciones.

Trabajamos con la ecuación equivalente: $ax^2 + bx = -c$

Para asegurarnos un cuadrado perfecto cómodo de manejar, multiplicamos la ecuación por 4a, obteniendo:

$$4a^2x^2 + 4abx = -4ac \qquad \textbf{(1)}$$

El primer miembro es $(2ax)^2 + 2\cdot 2ax\cdot b$, casi el desarrollo de un cuadrado:

$$(2ax + b)^2 = (2ax)^2 + 2\cdot 2ax\cdot b + b^2 =$$

$$= 4a\ \ x^2 + 4abx + b^2$$

luego basta sumar b^2 en **(1)** para obtener:

$$4a^2x^2 + 4abx + b^2 = -4ac + b^2\,;$$

$$(2ax + b)^2 = b^2 - 4ac\,;$$

$$2ax + b = \pm\sqrt{b^2 - 4ac}\,;$$

$$x = \frac{-b \pm\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

3.4. Número de soluciones y factorización de la ecuación de segundo grado

Factorizar una ecuación es expresarla como producto, de forma que si multiplicamos los factores obtenemos la ecuación dada.

Si llamamos

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

y

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\,,$$

se verifican las siguientes posibilidades:

a) Si b – 4ac < 0, entonces no existe su raíz cuadrada: la ecuación no tiene soluciones y se dice que es **irreducible**.
b) Si b – 4ac = 0, entonces $x_1 = x_2 = \frac{-b}{2a}$ y se dice que $x_1 = -\frac{b}{2a}$ es una raíz doble y la ecuación se puede factorizar de la forma

$$a(x - x_1)^2 = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = 0$$

c) Si b – 4ac > 0, entonces la ecuación tiene dos raíces reales y distintas y se puede factorizar así: $a(x - x_1)(x - x_2) = 0$

Se llama **discriminante** de la ecuación a la expresión $\Delta = b^2 - 4ac$, que permite distinguir o discriminar el número de soluciones que tiene.

3.5. Propiedades de las soluciones de la ecuación de segundo grado

Para conocer las propiedades vamos a calcular el producto y la suma de las raíces:

$$s = x_1 + x_2 =$$

$$= \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} + \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} =$$

$$= \frac{-2b}{2a} = \frac{-b}{a}$$

$$p = x_1 x_2 = \frac{(-b)^2 - \left(\sqrt{b^2 - 4ac}\right)^2}{4a^2} = \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a}$$

Por tanto, si dividimos $ax^2 + bx + c = 0$ por *a* obtenemos:

$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$, es decir, $x^2 - sx + p = 0$, siendo **p** y **s** los valores del producto y la suma de las raíces, respectivamente.

Realiza las actividades 3, 6, 7 y 9.

4. ECUACIONES BICUADRADAS

Son ecuaciones de la forma $ax^4 + bx^2 + c = 0$ y para resolverlas necesitamos realizar el cambio, $x^2 = t$. De este modo convertimos la ecuación bicuadrada en una ecuación de segundo grado que sabemos resolver: $at^2 + bt + c = 0$.

El número de soluciones de la ecuación bicuadrada puede ser 4, 2 ó 0. Veamos todo lo descrito con un ejemplo:

$$x^4 - 3x^2 - 4 = 0$$

1) Cambio $x^2 = t \Rightarrow t^2 - 3t - 4 = 0$
2) Resolvemos la ecuación de segundo grado: $t_1 = 4$ y $t_2 = -1$
3) Deshacer el cambio:
   Si $t_1 = 4 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm\sqrt{4} = \pm 2$
   Si $t_2 = -1 \Rightarrow x^2 = -1 \Rightarrow$ No tiene solución.
4) Las soluciones de la bicuadrada son: $x_1 = 2$ y $x_2 = -2$

Realiza la actividad 8.

5. ECUACIONES IRRACIONALES CON UNA SOLA RAÍZ

Las ecuaciones irracionales son aquellas que tienen la incógnita bajo el signo de la raíz cuadrada:

$\sqrt{x-1}+3=x$. La forma de resolverlas es:

1) Dejar en un miembro de la igualdad todas las raíces y en el otro miembro lo demás.

2) Reducir términos.

3) Elevar al cuadrado los dos miembros de la igualdad

4) Hay que comprobar las soluciones que hemos obtenido ya que no todas pueden ser ciertas.

Ejemplo:

$$\sqrt{x-1}+3=x;\ \sqrt{x-1}=x-3;$$

$$\left(\sqrt{x-1}\right)^2=(x-3)^2;\ x-1=x^2+9-6x;$$

$$x^2-7x+10=0 \Rightarrow x_1=2 \text{ y } x_2=5$$

<u>Comprobemos las soluciones</u>:

$\sqrt{2-1}+3=4\neq 2 \Rightarrow$ No es solución.

$\sqrt{5-1}+3=5 \Rightarrow$ Sí es solución.

Realiza la actividad 10.

6. RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

6.1. Problemas aritméticos

El cuadrado del doble de un número es 1.024. ¿Cuál es este número?

$(2x)^2 = 1024 \Rightarrow 4x^2 = 1.024 \Rightarrow$
$\Rightarrow x^2 = 256 \Rightarrow x = \pm\sqrt{256} \Rightarrow x = \pm 16$

NOTA: ¡Cuidado: salen dos soluciones!

6.2. Problemas de edades

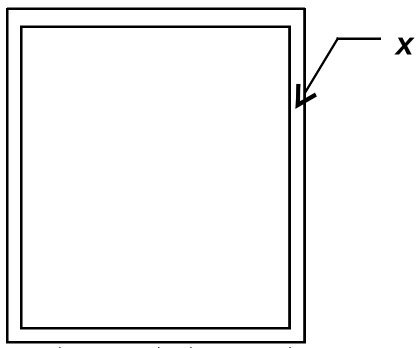
Dentro de tres años mi edad será el cuadrado de la tercera parte de la edad que tenía hace 25 años. ¿Cuántos años tengo?

$$x+3=\left(\frac{x-25}{3}\right)^2 \Rightarrow$$

$\Rightarrow x = 46$ años tengo ahora

6.3. Problemas geométricos

Para empotrar un espejo antiguo de 90 x 60 cm en el cuarto de baño, los alicatadores me han dejado un hueco rectangular de 8.800 cm^2. ¿De qué anchura debe ser la cenefa que compre para enmarcarlo?



$$(2x+90)\cdot(2x+60)=8800 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4x^2+300x-3400=0 \Rightarrow x=\pm 10 \Rightarrow$$

La anchura debe ser de 10 cm.

Realiza las actividades de la 11 a la 20.

A C T I V I D A D E S

1. Averigua si las siguientes ecuaciones son o no de segundo grado y especifica el valor de cada coeficiente:

a) $x(5x-2)=5(x^2-1)$
b) $(x+1)(x-2)+3=0$
c) $(2x-1)(3-x)+3=0$
d) $(x-2)(x+2)=0$
e) $x^2+9=25$

2. Plantea las ecuaciones que se corresponden con los siguientes enunciados:

a) La suma de un número y su cuadrado es quíntuplo de dicho número.
b) El producto de dos números pares consecutivos es 168.
c) Halla un número tal que el doble de su cuadrado es igual a seis veces ese número.
d) La suma de los cuadrados de dos números consecutivos es 265.

3. Resuelve las siguientes ecuaciones incompletas sin utilizar la fórmula general:

a) $3x^2=48$
b) $(x+1)(x-2)=0$
c) $(x+2)^2=4$
d) $x^2+x=0$
e) $7x^2-175=0$
f) $3x(1-5x)=0$
g) $(2x+1)(4-3x)=0$
h) $x-3x^2=0$

4. Escribe ecuaciones de segundo grado cuyas raíces sean:

a) 5 y 6
b) 3 y –1
c) –2 y 4
d) 9 y 9
e) 2/3 y –1/4
f) 3/2 y 1/3

5. ¿Cuáles de estas ecuaciones de segundo grado tienen como soluciones $x=1$ y $x=3$?

a) $(x-1)(x+3)=0$
b) $(x+1)(x+3)=0$
c) $-2(x+1)(x-3)=0$
d) $4(x-1)(x-3)=0$

6. Resuelve las ecuaciones aplicando la fórmula general:

a) $2x^2-5x+2=0$
b) $4x^2+4x-3=0$
c) $x^2+x+1=0$
d) $x^2-x-6=0$
e) $2x^2+x-1=0$
f) $x^2-2x+1=0$
g) $-x^2+3x+4=0$
h) $-2x^2+x+1=0$
i) $6x-8=x^2$
j) $-8=-10x-3x^2$

7. Ordena y resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $(2x+5)(1-x)=x^2-1$
b) $(x-2)(2x+1)=-(x+3)(x+7)$
c) $x(3x-5)+6=8$
d) $3(3x+4)=x(3-x)+3$
e) $(x-3)^2-(x+3)^2=x^2$

8. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $x^4-5x^2+4=0$
b) $x^4-4x^2=0$
c) $x^4+2x^2-3=0$
d) $x^4+x^2-2=0$

9. Haz las operaciones y reducciones que sean necesarias para calcular las soluciones de las ecuaciones:

a) $4x^2+x-2=2x-2x^2$
b) $\dfrac{x-2}{9}=\dfrac{1}{x-2}$
c) $(3x-2)^2-1=-(x-1)^2$
d) $x^2-\dfrac{x}{2}=\dfrac{1}{3}-\dfrac{2x}{3}$

e) $$\frac{x+3}{2} = \frac{2}{x+3}$$

10. Resuelve las siguientes ecuaciones irracionales:

a) $\sqrt{x+3} - x = x$

b) $\sqrt{2x-1} + 3x = 4x - 22$

c) $2x - 3 = \sqrt{x} + x - 1$

d) $x = 1 + \sqrt{25 - x^2}$

11. Halla dos números cuya suma sea 5 y su producto 4.

12. Averigua dos números cuya diferencia sea 5 y su producto –4.

13. Calcula *a* y *b* para que las soluciones de $ax^2 + bx + 3 = 0$ sean 1/2 y 3/2.

14. Encuentra un número tal que el doble de su cuadrado sea igual a seis veces este número.

15. La suma de los cuadrados de dos números consecutivos es 265. ¿Cuáles son esos números?

16. Si tenemos un cuadrado de 3 cm de lado, ¿cuánto debe valer el lado de otro cuadrado para que su área sea el doble que el área del anterior?

17. El área de una parcela rectangular mide 37.500 m^2. Si la base de la parcela mide 100 m más que la altura, ¿cuáles son sus dimensiones?

18. Halla las longitudes de los lados de un triángulo rectángulo tal que un cateto mide 3 cm más que el otro y que la hipotenusa mide 3 cm más que el cateto mayor.

19. Los lados de un triángulo rectángulo lo tienen de medida, en cm, tres números enteros consecutivos. Busca la longitud de los tres lados.

20. Si el radio de un círculo aumenta 2 cm, el área aumenta 20π cm^2. Averigua el radio de este círculo y su área.

4

Sistemas de Ecuaciones Lineales

TEMA 4

SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

1. ECUACIONES DE PRIMER GRADO CON DOS INCÓGNITAS

La siguiente igualdad es una ecuación de primer grado con dos incógnitas:

$$3x + y = 7$$

Esta ecuación tiene infinitas soluciones. Por ejemplo, ***x*** = 2 e ***y*** = 1 satisface la igualdad. Para hallar esas infinitas soluciones, en primer lugar se procede a despejar una de las incógnitas:

$$y = 7 - 3x$$

y a continuación damos valores a ***x*** para hallar los de ***y***:

x	***y***
–2	13
–1	10
0	7
1	4
2	1
3	–2

Realiza la actividad 1.

2. SISTEMAS DE ECUACIONES

Un sistema de ecuaciones está formado por dos ecuaciones. Al resolver un sistema hallamos un valor de ***x*** y otro de ***y*** que, entre todos los posibles, satisface a ambas al mismo tiempo.

Existen varios métodos de resolución de un sistema de ecuaciones. Todas se pueden resolver siguiendo cualquiera de ellos, aunque la práctica dictará cual es más aconsejable en cada caso.

2.1. Método de Reducción

Consiste en multiplicar una o las dos ecuaciones por el número apropiado con el fin de eliminar una de las incógnitas, de modo que *reduzcamos* el sistema de ecuaciones a una sola ecuación de primer grado con una incógnita.

Ejemplo:

$$\begin{aligned} 2x + 4y &= 10 \\ 3x - 2y &= -9 \end{aligned}$$

Multiplicamos por 2 la segunda ecuación con el fin de igualar los coeficientes de la incógnita ***y***.

$$\begin{aligned} 2x + 4y &= 10 \\ \underline{6x - 4y} &\underline{= -18} \\ \text{Sumando: } 8x + 0 &= -8 \end{aligned}$$

Y despejando la ***x***:

$$x = \frac{-8}{8}$$

$$x = -1$$

Si sustituimos ahora el valor de ***x*** en cualquiera de las ecuaciones primitivas, hallaremos el valor de ***y***.

$$2 \cdot (-1) + 4y = 10$$

$$-2 + 4y = 10$$

$$4y = 10 + 2$$

$$y = \frac{12}{4} \rightarrow y = 3$$

Por lo tanto, la solución del sistema de ecuaciones es

$$\boldsymbol{x} = -1;\ \boldsymbol{y} = 3$$

2.2. Método de Sustitución

Este método consiste en despejar una cualquiera de las incógnitas en cualquiera de las ecuaciones del sistema, y sustituir su valor en la otra.

Ejemplo:

$$3x + 4y = -2$$
$$2x - 3y = 10$$

Despejamos ***x*** en la segunda ecuación:

$$2x - 3y = 10\ ;\ x = \frac{10 + 3y}{2}$$

Sustituimos en la primera ecuación la incógnita ***x*** por su valor:

$$3 \bullet \left(\frac{10 + 3y}{2}\right) + 4y = -2$$

A continuación, resolvemos la expresión.

$$\frac{30 + 9y}{2} + 4y = -2$$

$$30 + 9y + 8y = -4$$

$$17y = -4 - 30$$

$$y = \frac{-34}{17} \rightarrow y = -2$$

Una vez hallado el valor de ***y***, buscamos el de ***x*** sustituyendo el valor encontrado en la ecuación que hemos despejado con anterioridad.

$$x = \frac{10+3y}{2}$$

$$x = \frac{10 + 3 \bullet (-2)}{2} = \frac{10 - 6}{2} = -2$$

La solución de este sistema es:

$$\boldsymbol{x} = 2;\ \boldsymbol{y} = -2$$

2.3. Método de Igualación

Consiste en despejar la misma incógnita en las dos ecuaciones y luego igualar sus valores.

Ejemplo:

$$5x - 4y = -3$$
$$3x + 2y = 7$$

Despejamos la ***x*** en ambas ecuaciones:

$$5x - 4y = -3;\ x = \frac{4y - 3}{5}$$

$$3x + 2y = 7;\ x = \frac{7 - 2y}{3}$$

Ahora igualamos los valores y resolvemos:

$$\frac{4y - 3}{5} = \frac{7 - 2y}{3}$$

$$3(4y - 3) = 5(7 - 2y)$$

$$12y - 9 = 35 - 10y$$

$$12y + 10y = 35 + 9$$

$$22y = 44$$

$$y = \frac{44}{22} \rightarrow y = 2$$

Sustituimos ***y*** por su valor en cualquiera de las dos ecuaciones para hallar el valor de ***x***:

$$x = \frac{4y - 3}{5}$$

$$x = \frac{4 \bullet 2 - 3}{5} = \frac{8 - 3}{5} = 1$$

La solución del sistema es:

$\boldsymbol{x} = 1$; $\boldsymbol{y} = 2$

Realiza la actividad 2.

3. APLICACIÓN A LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Muchos problemas que pueden resolverse gracias a una ecuación con una incógnita resultan más sencillo plantearlos con dos incógnitas, teniendo en cuenta que hemos de tener tantas ecuaciones como incógnitas.

Ejemplo:

En un corral hay gallinas y conejos. Si en total hay 23 cabezas y 78 patas, ¿cuántas gallinas y conejos hay?

Planteamiento:

x	gallinas
y	conejos
$2x$	patas gallinas
$4y$	patas conejos

$$x + y = 23$$
$$2x + 4y = 78$$

Por el método de reducción:

$$\begin{array}{r} -2x - 2y = -46 \\ 2x + 4y = 78 \\ \hline 0 + 2y = 32 \end{array}$$

$$y = \frac{32}{2} = 16$$

Si de un total de 23 cabezas, 16 son las que corresponden a los conejos, la diferencia 23 – 16 = 7 serán las de las gallinas.

Realiza las actividades de la 3 a la 17.

A C T I V I D A D E S

1. Comprueba si los siguientes pares de números son soluciones de la ecuación $x - 2y = 6$.

a) $x=8$, $y=1$ | b) $x=4$, $y=3$ | c) $x=5$, $y=3$ | d) $x=10$, $y=2$ | e) $x=5$, $y=0$

f) $x=6$, $y=0$ | g) $x=8$, $y=0$ | h) $x=5$, $y=2$ | i) $x=9$, $y=2$ | j) $x=15$, $y=3$

2. Resuelve por cualquier método, (empleando todos):

a) $6x - 5y = 33$

b) $2x + 3y = 17$

c) $5x + 6y = 32$

d) $3x - 4y = 7$

$x - y = 4$

e)

f) $5x + 9 = 3y$

g) $3x - 4y = 26$

h) $\begin{array}{l} 4y = 10 - x \\ y - x = -5 \end{array}$

i) $x + 3 = y - 3$

j) $4(2 - x) = 3y$

k) $3x - 2y = 24$

l) $\begin{array}{l} 2x - 10y = 15 \\ 2x - 4y = 18 \end{array}$

m) $3x + 6y = 18$

n) $3x + 4y = 25$

ñ) $6x - 7y = 45$

o) $6x - 10y = 14$

3. La suma de dos números es 52 y su diferencia 16. Halla dichos números.

4. Encuentra dos números tales que añadiendo 5 al primero se obtenga el segundo y en cambio, añadiendo 1 al segundo se obtenga el doble del primero.

5. Encuentra dos números tales que el triple del primero aumentado en 10 unidades sea igual al segundo, mientras que el doble del segundo disminuido en 4 sea igual a 8 veces el primero.

6. La suma de dos números es 35; si aumentamos el primero en 10 unidades y el segundo lo disminuimos en 5, entonces el primero es triple del segundo. ¿Cuáles son los números?

7. Busca dos números tales que la suma de la quinta parte del primero con la tercera parte del segundo sea 13, mientras que los 2/7 del primero disminuido en los 2/9 del segundo sea igual a 6.

8. Busca dos números tales que la suma del triple del primero más el cuádruple del segundo sea 8, y el doble del primero más el segundo igual a 12.

9. Al sumar dos números nos da 14. Añadiendo uno al mayor nos da el doble del menor. Halla los dos números.

10. Pagamos 1’18 € por 3 gomas y 5 lápices. Si compramos 2 gomas y un lápiz pagamos 0’32 €. Calcula el precio de la goma y el lápiz.

11. Un librero vendió 20 libros, unos a 2 € y otros a 2’50 €. Si obtuvo 43’50 € de la venta, ¿cuántos libros vendió de cada clase?

12. Dos tabletas de chocolate, uno negro y otro blanco cuestan 1’50 €. Si hemos comprado 7 tabletas de chocolate negro y 9 de blanco y nos ha costado todo 12’60 €, ¿cuánto cuesta cada tableta?

13. Por cada problema resuelto, un chico recibe 4 puntos, y pierde 3 puntos por cada ejercicio mal resuelto. Si se le han planteado 40 ejercicios y ha ganado un total de 55 puntos, ¿cuántos ejercicios resolvió bien y cuántos mal?

14. Halla dos números cuya diferencia sea 94 y su cociente 3, dando 22 como resto de la división.

15. El total de monedas que guardo en las dos manos es 12. Si pasamos una moneda de la mano derecha a la izquierda, tendría en la derecha el triple de monedas que en la izquierda. ¿Cuántas guardo en cada mano?

16. En un corral hay gallinas y cabras. En total hay 55 cabezas y 180 patas. ¿Cuántas cabras y gallinas hay?

17. Halla un número de dos cifras, sabiendo que si se suman nos da 13, y la diferencia entre este número y el que se obtiene al permutar sus cifras es 45.

5

Polinomios en una Indeterminada y Ecuaciones de Grado Mayor de Tres

TEMA 5

POLINOMIOS EN UNA INDETERMINADA Y ECUACIONES DE GRADO MAYOR DE TRES

1. LOS POLINOMIOS Y SUS OPERACIONES

1.1. Los monomios. Operaciones con monomios

Un **monomio** es una expresión algebraica con una sola indeterminada en el que las únicas operaciones que aparecen son el producto y la potencia de exponente natural.

La parte numérica se denomina **coeficiente** y al resto **parte literal**. El exponente de la indeterminada es el **grado del monomio**.

Por ejemplo: $2x^3$ y $7y^4$ son monomios donde sus coeficientes son 2 y 7, sus partes literales son x^3 e y^4, y sus grados 3 y 4, respectivamente.

Se dice que dos monomios son **semejantes** cuando tienen la misma parte literal. Así, por ejemplo, $6az^7$ y $-3bz^7$ son semejantes.

Para **sumar y/o restar** monomios tienen que ser semejantes, el resultado es otro monomio semejante cuyo coeficiente es suma y/o resta de los coeficientes de los sumandos.

Ejemplo:

$$x^3 + x^3 + x^3 + x^3 = 4x^3$$

$$7x^6 + \frac{3}{4}x^6 = \left(7 + \frac{3}{4}\right)x^6 = \frac{31}{4}x^6$$

Es decir, para sumar dos monomios basta recordar la propiedad distributiva del producto respecto de la suma y sacar como factor común la parte literal.

La **multiplicación y/o división** de monomios es otro monomio que se obtiene siguiendo las reglas de multiplicación, división y potenciación de números enteros.

Ejemplo:

$$7x.2x^2 = 14x^3$$

$$3x^2 : \frac{1}{3}x = 9x^{2-1} = 9x$$

1.2. Los polinomios

Se denomina **polinomio** a la expresión algebraica formada por la suma de varios monomios.

Cada monomio recibe el nombre de **término**. El que no tiene parte literal se llama **término independiente** y el mayor de los grados de sus términos es el **grado del polinomio**. El término de mayor grado se denomina **término principal**.

Así, $P(x) = 3x^4 + 3x - 8$ es un polinomio de grado 4, su término independiente es –8 y su término principal es $3x^4$.

Los polinomios se suelen dar de forma ordenada y reducida; es decir, sumados los monomios semejantes y ordenándolos según su grado.

1.3. Operaciones con polinomios

Suma y resta de polinomios

Para sumar o restar polinomios basta sumar o restar sus términos semejantes.

Ejemplo:

P(x) = $3x^3 + 2x^2 – x + 5$

Q(x) = $2x^3 + 5x^2 – 7$

P(x) + Q(x) = $5x^3 + 7x^2 – x – 2$

Puesto que restar es sumar el opuesto, para calcular $P(x)-Q(x)$ basta sumarle a $P(x)$ el opuesto de $Q(x)$, es decir:

$$P(x)-Q(x)=P(x)+(-Q(x)).$$

Multiplicación de polinomios

El producto de dos polinomios es otro polinomio que se obtiene multiplicando cada uno de los términos de un polinomio por todos los términos del otro y reduciendo los términos semejantes.

Ejemplo:

P(x)= $3x^2+2x-1$; y Q(x)= $2x^3+5x$

$$P(x).Q(x)=(3x^2+2x-1).(2x^3+5x) =$$

$$=3x^2\cdot 2x^3+3x^2\cdot 5x+2x\cdot 2x^3+2x\cdot 5x-1\cdot 2x^3-1\cdot 5x=$$
$$=6x^5+15x^3+4x^4+10x^2-2x^3-5x$$

División entera de polinomios

De la misma manera que realizamos la división entera de números naturales dividiremos polinomios. Dados dos polinomios D(x) y d(x) llamados dividendo y divisor, efectuar la división entera de D(x) entre d(x) es encontrar dos nuevos polinomios C(x) y R(x) llamados cociente y resto de la división tales que: D(x)= d(x) · C(x) + + R(x), siendo el grado del resto menor que el grado del divisor. Cuando el resto es 0, se dice que D(x) es divisible entre d(x) y que d(x) es un factor de D(x).

Si el divisor en un monomio se divide cada uno de los términos del dividendo entre dicho monomio.

Ejemplo:

$$(2x^4-5x^3+3):(3x^2)=\frac{2x^4}{3x^2}-\frac{5x^3}{3x^2}+\frac{3}{3x^2}=$$
$$=\frac{2}{3}x^2-\frac{5}{3}x+\frac{1}{x^2}$$

Si el divisor es otro polinomio, se efectúa una división “en caja”.

En la práctica, se procede de la forma siguiente:

- Colocamos los polinomios ordenados por potencias de mayor a menor, dejando espacios en el dividendo, que corresponden a los términos que faltan, y dividimos el primer monomio del dividendo entre el primer monomio del divisor.

$$\begin{array}{llll|l} 2x^3 & +3x^2 & & +1 & x^2+x-5 \\ \cline{5-5} & & & & 2x \end{array}$$

- Multiplicamos el resultado por todo el divisor y se lo restamos al dividendo. Hemos obtenido el primer resto parcial.

$$\begin{array}{llll|l} 2x^3 & +3x^2 & & +1 & x^2+x-5 \\ \cline{5-5} -2x^3 & -2x^2 & +10x & & 2x \\ \cline{1-3} & x^2 & +10x & +1 & \end{array}$$

- Repetimos el proceso hasta que el grado del resto sea menor que el grado del divisor. En ese momento hemos terminado la división.

$$\begin{array}{llll|l} 2x^3 & +3x^2 & & +1 & x^2+x-5 \\ \cline{5-5} -2x^3 & -2x^2 & +10x & & 2x+1 \\ \cline{1-3} \end{array}$$

x^2	$+10x$	$+1$
$-x^2$	$-x$	$+5$
	$9x$	$+6$

Realiza las actividades 1, 2 y 3.

2. VALOR NUMÉRICO DE UN POLINOMIO

Dado un polinomio P(x), llamaremos **valor numérico de P(x) en x=*a*** al número que se obtiene al sustituir, en P(x), x por a.

Si P(x) = $2x^3 - 3x^2 + x - 5$, el valor numérico en $x = 3$ es:

$$P(3) = 2.3^3 - 3.3^2 + 3 - 5 = 25$$

El valor numérico de un polinomio P(x) en $x = a$ coincide con el resto de la división de P(x) entre $x = a$. A esto se le llama **teorema del resto**.

Por lo tanto, para calcular el valor numérico de un polinomio en x=a podemos sustituir la x por la a o podemos calcular el resto de dividir P(x) entre $x - a$.

Realiza la actividad 5.

3. TEOREMA DEL RESTO Y REGLA DE RUFFINI

Para efectuar la división de P(x) entre (x – a) tenemos un algoritmo muy fácil encontrado por un matemático italiano llamado Ruffini a principio del siglo XIX.

Observa cómo se hace:

1) Se escriben los coeficientes del dividendo con su signo. En caso de que no haya término de algún grado, se escribe 0 como coeficiente.

2) Debajo y a la izquierda de esos coeficientes se coloca el número a.

3) Se opera de la siguiente forma: Se baja el primer coeficiente del dividendo, se multiplica por a y se suma al segundo coeficiente, y así, sucesivamente.

Se obtienen de esta manera una serie de números que coinciden con los coeficientes del cociente de la división, y el último número es el resto.

Ejemplo:

Efectúa la división del polinomio $2x^4 - 3x^3 + 2x^2 + x - 1$ *entre x – 2.*

	2	–3	2	1	–1
2		4	2	8	18
	2	1	4	9	$\boxed{17}$

Así el cociente de la división será $C(x) = 2x^3 + x^2 + 4x + 9$ y de resto R(x) = 17.

Realiza las actividades 4, 6, 7 y 8.

4. RAÍCES DE UN POLINOMIO

Dado un polinomio P(x), diremos que el número ***a* es una raíz de ese polinomio** si el valor numérico de P(x) en a, P(a), es 0.

Así, si tenemos el polinomio P(x) = $x^3 - 2x^2 + 5$ y queremos saber si $x = -2$ es, o no, una raíz de P(x), podemos sustituir:

$$P(-2) = (-2)^3 - 2(-2)^2 + 5 = \\ = -8 - 8 + 5 = -11 \neq 0,$$

Luego –2 no es una raíz de P(x).

Para comprobar si $x = 3$ es raíz del polinomio $2x^3 - 2x^2 - 8x - 12$, lo determinamos calculando el resto de dividir dicho polinomio por $x - 3$.

$$\begin{array}{c|cccc} & 2 & -2 & -8 & -12 \\ 3 & & 6 & 12 & 12 \\ \hline & 2 & 4 & 4 & \boxed{0} \end{array}$$

Como el resto es 0, significa que P(3) = 0; luego 3 sí es una raíz del polinomio dado. Esto nos permite escribir la siguiente igualdad:

$$2x^3 - 2x^2 - 8x - 12 = (x - 3)(2x^2 + 4x + 4)$$

es decir, el polinomio P(x) es divisible por $x - 3$ y el cociente de la división, es $2x^2 + 4x + 4$.

Si un polinomio P(x) admite como raíz al número a, podemos asegurar que:

- El valor numérico de P(x) en a es 0, P(a) = 0.
- P(x) es divisible por $x - a$; $x - a$ es divisor de P(x).

Observamos que las raíces de un polinomio P(x) son las soluciones de la ecuación P(x) = 0. Esto puede servirnos para la determinación de raíces de un polinomio, que no es fácil de hacer con carácter general, y no parece un buen método ir probando, de forma indiscriminada, con cualquier valor de x.

El siguiente resultado delimita algunos valores que pueden ser raíces de un polinomio.

Las raíces enteras de un polinomio P(x) deben ser divisores de su término independiente.

Considerando el polinomio:

$$P(x) = x^3 + 3x^2 - 4x - 12$$

las raíces enteras del polinomio deben estar entre los divisores de su término independiente:

$$\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \pm 12.$$

Una vez formada la lista de divisores iremos probando cada uno de ellos, utilizando el método de Ruffini, hasta localizar aquellos cuyo valor numérico sea 0.

Realiza las actividades 9, 10, 11 y 12.

5. FACTORIZACIÓN Y RESOLUCIONES DE ECUACIONES DE GRADO MAYOR DE TRES

La determinación de una raíz a de un polinomio permite expresar éste como producto del polinomio ($x - a$) por otro de un grado inferior al del polinomio dado. Si seguimos determinando raíces, podemos ir descomponiendo los sucesivos factores en otros irreducibles. A este proceso de descomposición de un polinomio en producto de factores más sencillos se le llama **factorización.**

Vamos a ver los pasos a seguir por medio de un ejemplo. Para realizar la descomposición del polinomio $P(x)=x^3 + 2x^2 - 4x - 8$, seguiremos los siguientes pasos:

1º. Hacemos la lista de los divisores del término independiente, entre los que se deben encontrar las raíces enteras:

$$\pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 8$$

2º. A continuación vamos probando con los divisores comenzando por los más sencillos, hasta obtener alguna raíz:

	1	2	–4	–8
2		2	8	8
	1	4	4	$\boxed{0}$

esto significa que podemos escribir:

$x^3 + 2x^2 – 4x – 8 =(x – 2)\ (x^2 + 4x + 4)$

Las raíces las buscamos en el polinomio cociente. Hay que tener en cuenta que el número 2 puede volver a ser raíz:

	1	4	4
–2		–2	–4
	1	2	$\boxed{0}$

Por tanto, podemos escribir:

$x^3 + 2x^2 – 4x – 8 = (x – 2)\ (x + 2)\ (x + 2)$

Cuando el polinomio que queremos factorizar no tiene término independiente, el primer paso que daremos de cara a su factorización será sacar factor común *x* elevado a la potencia correspondiente al término de menor grado.

Hay que tener en cuenta, para factorizar $P(x) = x^4 + 3x^3 + 2x^2$, que:

$x^4 + 3x^3 + 2x^2 = x^2(x^2 + 3x + 2)$

A continuación determinamos las raíces del polinomio $(x^2 + 3x + 2)$ de la forma ya conocida y obtenemos:

$x^4 + 3x^3 + 2x^2 = x^2(x + 1)(x + 2)$

Realiza la actividad 13.

A C T I V I D A D E S

1. Calcula las siguientes sumas y restas de polinomios:

a) $(6x^3 - x^2 - 11x + 8) + (5x^3 + 12x - 3)$
b) $(6x^3 - 42x + 36) - (5x^3 - 2x^2 - 4x + 2)$
c) $(2a^3 - 7a^2 - 3a) + (a^2 + 4a - 8)$
d) $\left(6x^3 - \frac{1}{2}x + 36\right) - \left(\frac{14}{3}x^3 + 7x^2 - 2x + 28\right)$

2. Calcula los siguientes productos:

a) $(6x^3 - x^2 - 11x + 8)(2x + 3)$
b) $(6x^4 - 42x + 36)(2x)$
c) $(6x^3 - 42x + 36)(x^2 - 3x + 2)$

3. Resuelve las siguientes divisiones de polinomios:

a) $(x^4 - x^3 + 7x^2 + x + 15) : (x^2 + 2)$
b) $(6x^3 - 17x^2 + 4x - 3) : (3x^2 - 4x + 1)$
c) $(3x^4 - 5x^2 - x + 4) : (x^2 + 2x - 1)$

4. Efectúa las siguientes divisiones utilizando la regla de Ruffini:

a) $(3x^5 + 2x^4 - 3x^2 + 1) : (x - 3)$
b) $(6x^4 - 2x + 1) : (x + 2)$
c) $(2x^3 + 3x^2 - 5x) : (x - 5)$
d) $(6x^2 + 12x + 6) : (x + 1)$
e) $(x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x) : (x - 2)$

5. Calcula el valor numérico de los siguientes polinomios en los puntos que se indican:

a) $P(x) = 2x^4 - 3x^2 + 5$, en x = 0, x =2
b) $P(x) = x^5 - x^3 + 2x$, en x = –1, x = 3
c) $P(x) = 2x^2 + 3x - 7$, en x = –5, x = 4

6. Determina, sin hacer la división, el resto de las siguientes divisiones:

a) $(x^4 - 3) : (x - 2)$
b) $(x^5 - x^3 + 1) : (x + 2)$

c) $\left(x^7+x^5-5x^4+3x^3+2\right):(x-1)$
d) $\left(4x^3-2x+3\right):(x-1)$

7. Determina el valor de *m* para que la división sea exacta:

a) $\left(x^4-3x^2+2x+m\right):(x-1)$
b) $\left(x^4+2x^2+2x-m\right):(x-2)$

8. ¿Son divisibles los siguientes polinomios por (x – 2)?

a) $2x^3+4x^2+3x+6$
b) x^4+16
c) x^2-4
d) x^2-4x+6
e) $x^4+2x^3+5x+10$

9. Sin efectuar ninguna operación, escribe las raíces de los polinomios siguientes:

a) $(x-3)\cdot(x-2)\cdot(x-1)$
b) $-3(x+3)\cdot(x-2)$
c) $x(x-7)\cdot(x+7)$

10. Escribe un polinomio de grado 2 cuyas raíces sean 2 y –1.

11. Escribe un polinomio de grado 3 cuyas raíces sean 1, –1 y 3.

12. Escribe un polinomio de grado 4 cuyas raíces sean 0 y 2.

13. Descompón en factores, escribiendo previamente la lista de posibles raíces, los siguientes polinomios:

a) x^3-2x^2+x-2
b) x^3+3x^2-x-3
c) x^2-x-12
d) $x^3-x^2-16x-20$
e) x^2+5x-6
f) x^3+2x^2-5x-6
g) $x^3-14x^2+55x-42$
h) $x^3-19x+30$
i) $5x^3-11x^2-4x+12$
j) x^3+x^2

6

Funciones Gráficas y Funciones Notables

TEMA 6

FUNCIONES GRÁFICAS Y FUNCIONES NOTABLES

Son muy frecuentes los fenómenos en los que resulta de gran interés conocer las relaciones que aparecen entre dos o más de sus magnitudes, ya que ello permite realizar predicciones sobre esos fenómenos.

Así, antes de que un fenómeno suceda, se pueden conocer las variables que intervienen en cada uno de los casos y las relaciones que existen entre ellas. Estas relaciones entre dos magnitudes, en donde la variación de una de ellas queda determinada en función de la otra, las podemos expresar mediante tablas de valores, gráficas y expresiones algebraicas.

1. LOS EJES CARTESIANOS. FUNCIONES: TERMINOLOGÍA

1.1. Los ejes cartesianos

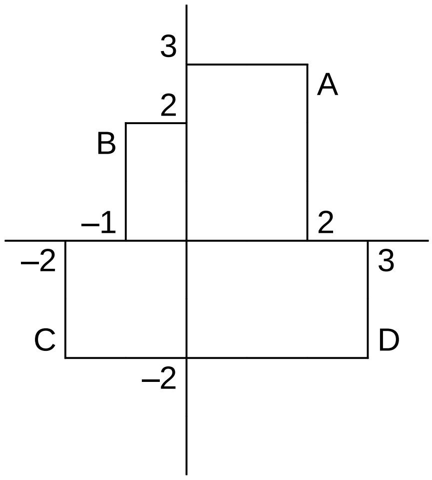
Unos **ejes cartesianos** no son más que un par de rectas perpendiculares, marcada cada una de ellas con una unidad de medida o **escala**.

Normalmente se suele dibujar una recta horizontal, que llamamos **eje de abscisas** o eje de las *x*, y una vertical que llamamos **eje de ordenadas** o eje de las y. El punto de corte de los dos ejes se denomina **origen de coordenadas**.

Un par de números ordenados (***a***,***b***) representan a un punto del plano y se denominan coordenadas de dicho punto. El primer valor del par (***a***), se llama **abscisa** y el segundo, (***b***), **ordenada**.

Ejemplo:

Vamos a representar los puntos A(2,3), B(–1,2), C(–2,–2) y D(3,–2).



Las coordenadas de **origen** son (**0**,**0**). Si la coordenada es (***x***,**0**), el punto estará sobre el eje de abscisas y si es de la forma (**0**,***y***), el punto estará situado sobre el eje de ordenadas.

1.2. Funciones. Terminología

Si escuchamos que el precio de la gasolina depende del barril de petróleo, estamos relacionando dos magnitudes, que pasaremos a llamar **variables** y las representaremos por ***x*** e ***y***, que dependen la una de la otra. En este caso, el precio del barril sería la

variable independiente y el precio de la gasolina sería la **variable dependiente**.

Una **función** es una relación entre dos variables, que a cada valor de la variable independiente le hace corresponder un único valor de la variable dependiente, al que llamamos **imagen**.

Consecuentemente, la relación que hay entre un número y su raíz cuadrada no es una función, puesto que a cada número se le puede asociar dos valores, uno positivo y otro negativo, como solución de su raíz cuadrada. En cambio, la relación que asocia un número con su mitad sí constituye una función, siendo única su imagen.

1.3. Puntos de corte con los ejes

Los puntos de corte de una función con el eje de abscisas son de la forma (x,0), siendo x un valor que anula a la función, es decir, 0 = f(x).

El punto de corte de una función con el eje de ordenadas, si existe, es de la forma (0,y), siendo y el valor que se obtiene cuando x = 0, es decir, y = f(0).

Ejemplo:

En la función f(x) = x^2 – 1, resolviendo la ecuación x^2 – 1 = 0 obtenemos los puntos de corte con el eje OX, que son (–1,0) y (1,0). Y sustituyendo la x por 0 obtenemos el punto de corte con el eje OY que es (0,–1).

Realiza las actividades de la 1 a la 5.

2. CRECIMIENTO Y DECRECIMIENTO. MÁXIMOS Y MÍNIMOS

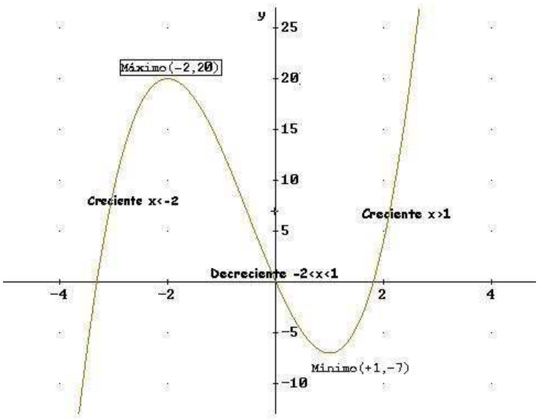
Una **función es creciente en un intervalo** si a medida que la variable independiente aumenta, los correspondientes valores de la función también aumentan.

Una **función es decreciente en un intervalo** si los valores de la función disminuyen a medida que la variable independiente aumenta en dicho intervalo.

Una **función es constante en un intervalo** si, para cualquier valor de la variable independiente que pertenezca a dicho intervalo, la función no varía.

Una función f(x) alcanza un **máximo relativo** en un punto de abscisa x = a cuando en un cierto entorno de a la función siempre toma valores por debajo de f(a).

Una función f(x) alcanza un **mínimo relativo** en un punto de abscisa x = a cuando en un cierto entorno de a la función siempre toma valores por encima de f(a).



Cuando hay un máximo relativo, a la izquierda del mismo la función es creciente, y a la derecha la función será decreciente, al menos en sus proximidades. Ocurre lo contrario cuando hay un mínimo relativo.

Realiza las actividades 7, 10, 11 y 12.

3. CONTINUIDAD DE UNA FUNCIÓN

Hay funciones en cuyas gráficas el trazado es continuo, no necesitamos levantar el lápiz del papel; en ese caso, diremos que la función es continua y, en caso contrario, discontinua.

Una **función es continua en un punto**, de abscisa $x = a$, si para valores muy próximos a dicho punto la función toma valores muy próximos a f(a). En caso contrario, hablaremos de **discontinuidad en $x = a$**, ya que la gráfica de la función en el punto de abscisa a, sufre una interrupción.

Realiza las actividades 6, 8 y 9.

4. LA FUNCIÓN LINEAL Y AFIN

4.1. La función lineal

Supongamos que un momento determinado queremos efectuar la relación entre dólares y euros. Si el cambio es de 1 euro = 1’12 dólares podemos realizar la tabla siguiente:

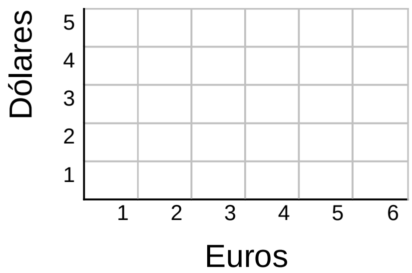
Euros	Dólares
1	1’12
1’5	1’68
2	2’24
2’5	2’8
3	3’36
4	4’48
...	

Podemos calcular el importe de cualquier cantidad de euros aplicando:

1’12 · (nº de euros) = (nº de dólares)

Esta situación se llama de proporcionalidad directa y puede expresarse matemáticamente de la forma f(x) = ax.

Si realizamos una gráfica con los valores de la tabla anterior obtendremos una recta que pasa por el origen de coordenadas, ya que si no das ningún euro, no te darán nada en dólares.



Una función del tipo **f(x) = ax** se denomina **función lineal o de proporcionalidad directa**. Suele escribirse de la forma $y = ax$ porque f(x) es la ordenada de la gráfica. El coeficiente a se llama **pendiente**.

4.2. La función afín

Vamos a suponer que la bajada de bandera de un taxi es de 1 euro en la tarifa y de 30 céntimos de euro cada 250 metros de recorrido.

El importe de cada trayecto, dependiendo del número de metros que se recorren en cada uno de ellos es el siguiente:

$$\frac{0'30}{250}x + 1$$

Esto lo podemos representar por la función:

$$f(x) = \frac{0'30}{250}x + 1$$

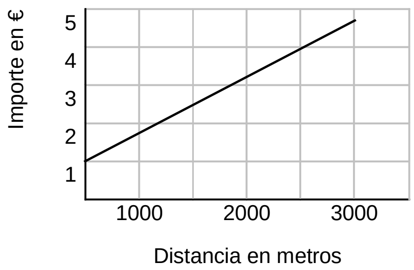
donde f(x) representa el coste. Dándole valores a x se puede obtener el precio de distintos trayectos.

La función que relaciona las anteriores variables tiene la forma:

f(*x*) = *ax* + *b*

que se denomina **función afín**. También se escribe ***y* = *ax* + *b***.

La gráfica de la función afín es también una recta, por tanto una función continua, aunque no pasará por el origen de coordenadas.



La recta corta al eje de ordenadas en el punto (*0,b*), por lo que el valor de *b* se conoce como **ordenada en el origen**. El coeficiente de la *x* determina la *inclinación* de la recta, por lo que se le denomina **pendiente**.

Realiza las actividades de la 13 a la 17.

5. LA FUNCIÓN CUADRÁTICA. LA CATENARIA

Una función de la forma **f(*x*) = = a*x*^{2} + b*x* + c**, en donde *x* aparece elevada al cuadrado se denomina función cuadrática o función polinómica de segundo grado. También se escribe de la forma ***y* = a*x*^{2} + b*x* + c**.

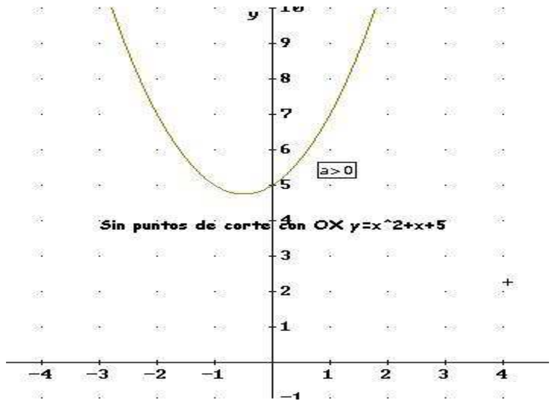
La gráfica de la función cuadrática es una parábola con vértice en el punto $V(V_x, V_y)$, donde $V_x = \frac{-b}{2a}$ y V_y se obtiene sustituyendo V_x en la ecuación de la parábola.

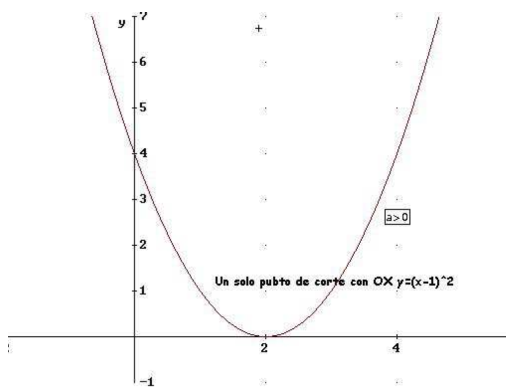
Otros puntos importantes de la parábola son aquellos en los que corta a los ejes de coordenadas.

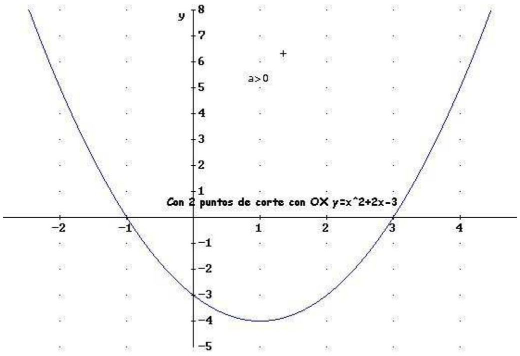
Punto de corte con el eje OY: $x = 0 \rightarrow [0, f(0)]$

Puntos de corte con el eje OX: $y = f(x) = 0$. Resolviendo la ecuación de segundo grado obtenemos los posibles puntos de corte.

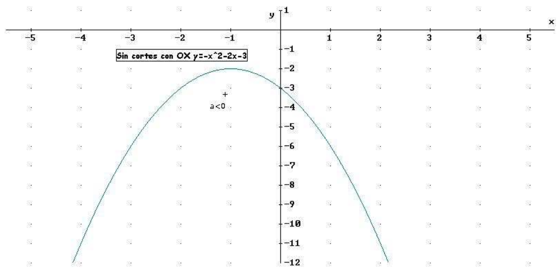
Al resolver la ecuación de segundo grado podremos obtener dos soluciones, una o ninguna según que el discriminante $(b^2 - 4ac)$ de la ecuación sea positivo, cero o negativo. Significa que existirán dos puntos de corte de la parábola con el eje de abscisas, uno o ninguno. Así, cuando $a > 0$ obtenemos:

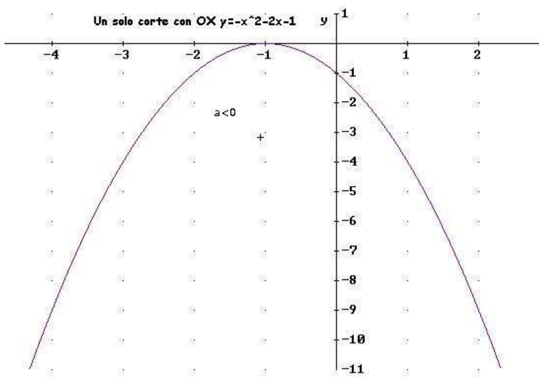


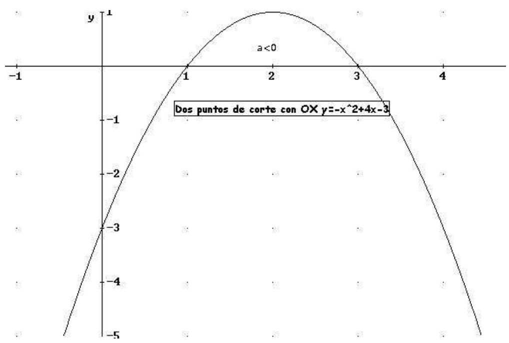




Y cuando sea $a < 0$







Esto nos viene a decir que, dependiendo del signo del coeficiente *a*, las ramas de la parábola van a estar dirigidas hacia arriba (*a* > 0) o hacia abajo (*a* < 0).

Además, una parábola siempre es simétrica respecto a la recta $x = V_x$; con estos puntos y alguno más que nosotros le demos podemos obtener una representación gráfica de la parábola que estemos viendo.

Como ejemplo vamos a representar gráficamente la función: $f(x) = x^2 + x - 6$, hallando previamente los puntos de corte con los ejes y el vértice.

El punto de corte con el eje de ordenadas (x = 0) es: f(0) = 0^2 + 0 – 6= = – 6 por lo que el punto de corte es: (0,–6).

Los puntos de corte con el eje de abscisas (y = 0) los calculamos resolviendo la ecuación de segundo grado 0 = $x^2 + x - 6$ obteniendo $x_1 = 2$, $x_2 = -3$ por lo que los puntos de corte son (2,0) y (–3,0).

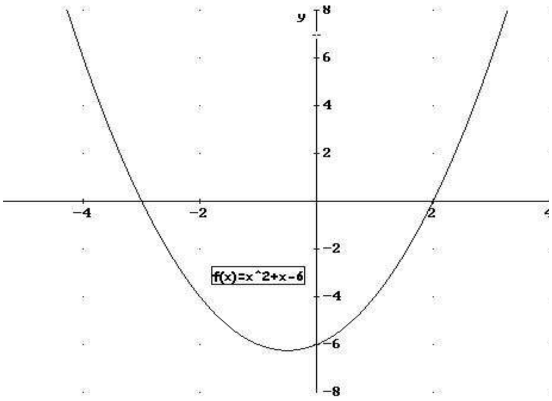
El vértice en x es $V_x = \frac{-1}{2}$ y

$$V_y = \left(\frac{-1}{2}\right)^2 + \frac{-1}{2} - 6 = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} - 6 = \frac{-25}{2}$$

con lo que el punto del vértice es $V\left(\frac{-1}{2}, \frac{-25}{2}\right)$.

Estos puntos son suficientes para representar la gráfica aproximada, pero podemos darle alguno más si queremos y obtendríamos la siguiente tabla de valores:

x	0	2	–3	$-\frac{1}{2}$	1	3
y	–6	0	0	$-\frac{25}{2}$	–4	6



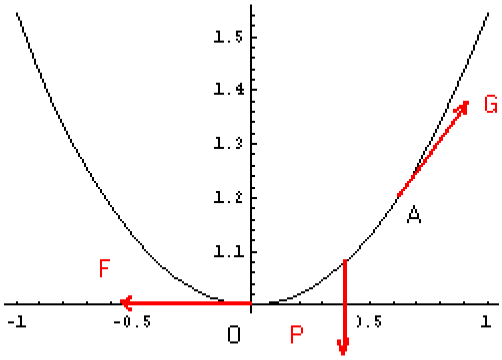
La catenaria es la curva que describe una cadena suspendida por sus extremos.

Los primeros matemáticos que abordaron el problema supusieron equivocadamente que la curva era una parábola. Huygens, a los 17 años, demostró que no era una parábola, pero no encontró la ecuación.

En 1691, en respuesta a un reto de Jacob Bernoulli, Leibnitz y Huygens, por métodos geométricos, y Johann Bernoulli encontraron la ecuación. Este reto de Jacob Bernoulli, resuelto por Johann, fue el comienzo de la rivalidad entre ellos.

El nombre de catenaria se debe a Huygens.

Johann Bernoulli resolvió el problema de la siguiente manera:



Consideró el trozo de cadena OA. Las fuerzas que actúan sobre ese trozo son el peso P, la fuerza F (que depende del lado izquierdo de la cadena y por lo tanto es constante) y G. Siendo α el ángulo que forma G con la horizontal, tenemos que, como el trozo OA está en equilibrio:

$$\mathbf{P = G\ sen}\ \alpha$$
$$\mathbf{F = G\ cos}\ \alpha$$

Dividiendo ambas ecuaciones tenemos: **tg** α **= P/F**

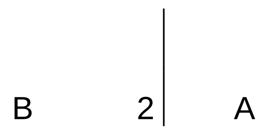
Aplicando conceptos matemáticos superiores a los que en este curso se imparten, se deduce que la fórmula es $y = a/2(e^{x/a} + e^{-x/a})$, siendo ***a*** la distancia desde el origen hasta la curva y **e** φ 2'71.

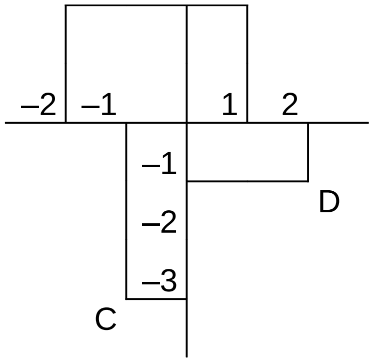
Realiza la actividad 18.

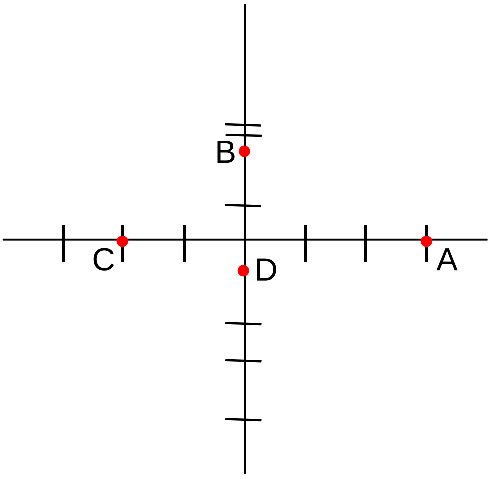
A C T I V I D A D E S

1. Representa en unos ejes coordenados los siguientes puntos del plano: (0,–3), (0,4) (2,0), (–1,0), (–3,2), (1, –2), (–5, –2) y (3,5).

2. Escribe las coordenadas de los puntos que aparecen a continuación.







3. El peso de una persona se relaciona con su estatura. ¿Es el peso función de la estatura? ¿Cuál sería la variable independiente y la variable dependiente?

4. La siguiente tabla muestra el incremento de riesgo de padecer cáncer de pulmón (en tantos por ciento) en función del número de cigarrillos fumados al día.

Cigarrillos	5	7	10	15	25	30	35	40
Incremento de riesgo (%)	7	10	12	15	20	22	25	30

Realiza una gráfica que represente a esta función. ¿Crees que se deben unir los puntos de la gráfica?

5. El contenido de vitamina C, en función del tiempo de cocción de una verdura, queda reflejado en la siguiente tabla.

Tiempo de cocción (min)	0	20	30	40	50	60	65	70	75	80
Cantidad de vitamina C(mg)	50	50	50	50	50	50	49	30	5	0

Haz un gráfico que represente la situación descrita. ¿Qué recomendaciones darías para cocer la verdura evitando que pierda valor nutritivo?

6. El precio de un litro de gasolina sin plomo es 0’75 €. Realiza una tabla que relacione los litros que se pueden consumir y su correspondiente coste. Dibuja la gráfica de la función. ¿Consideras que la función de coste es continua? ¿Unirías los puntos que representan los valores de la tabla?

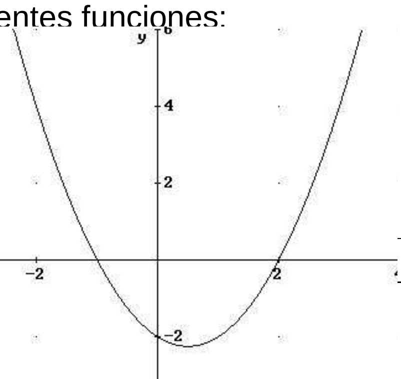
7. Un hipermercado rebaja todos sus artículos un 15 por 100. ¿Cuál es la función que relaciona el precio antiguo de los artículos con el nuevo? Elabora una tabla y representa dicha función. Al aumentar el precio, ¿aumenta el descuento? ¿La función es creciente o decreciente?

8. El precio del metro de manguera en un establecimiento es de 2 €. Elabora una tabla con el coste en función de los metros vendidos y representa estos valores en una gráfica.

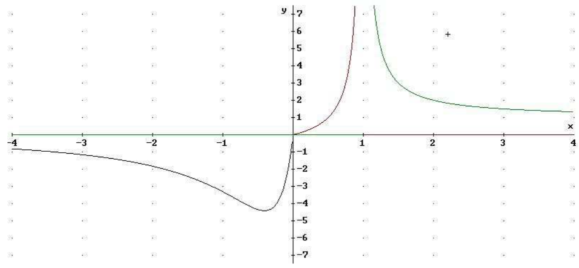
a) ¿Crees que se deben unir los puntos para formar la gráfica de la función? ¿Hay discontinuidades?
b) ¿Cuál sería la expresión algebraica de la función?
c) Si se tratase de vender bolígrafos, ¿es correcto unir los puntos del dibujo?

9. Describe la continuidad de las siguientes funciones:

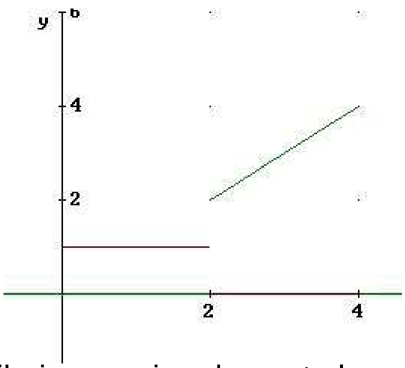
a)



b)



c)



10. Dibuja aproximadamente la gráfica de una función con las siguientes características:

a) Es una función definida y continua en el intervalo [–2, 5].
b) Corta al eje de ordenadas en (0,–3).
c) Corta al eje de abscisas en (1,0), (3,0) y (4,0).
d) Es creciente en (0,2) y (3'5,5].
e) Es decreciente en (2,3'5) y en [–2,0).
f) En *x* = 2 la función toma el valor 1, que es un máximo relativo. En *x* = 0 y *x* = 3'5 la función alcanza dos mínimos relativos, siendo el valor de este último –0'5.

11. Si en nuestra bicicleta vamos a una velocidad constante de 15 km/h, ¿cuál será la función lineal que relacione los kilómetros recorridos en función del tiempo? Realiza una gráfica.

12. La bajada de la bandera de un taxi cuesta 1 € en la tarifa diurna y 30 céntimos de euro cada 250 metros de recorrido.

a) Calcula el precio del recorrido si el trayecto es de 2'5 kilómetros.
b) Si en la tarifa nocturna la bajada de bandera es de 1'25 € y el importe cada 250 metros de 0'4 €, escribe la función afín que representa dicha situación. Dibuja la gráfica.
c) Calcula el importe para los recorridos de 2'5, 5 y 10 km.

13. Representa gráficamente las siguientes funciones:

a) f(x) = $3x + 1$
b) f(x) = $2x – 1$
c) f(x) = $–2x$
d) f(x) = $x – 1$
e) f(x) = $3x$

14. Representa gráficamente las siguientes funciones afines: f(x) = $4x – 2$; g(x) = $4x$; h(x) = $4x + 2$. ¿Qué observas? Haz un resumen de tus conclusiones.

15. Calcula las ecuaciones de las rectas que pasan por los puntos que se indican.

a) A(1,2) y B(0,5)
b) A(–1,3) y B(0,0)
c) A(1,0) y B(–2,3)

16. Determina el coeficiente *b* en la función afín f(x) = $2x + b$ para que la gráfica de dicha función pase por el punto (2,1).

17. ¿Qué valor debe tener *a* en la función afín $f(x) = ax + 1$ para que su gráfica sea paralela a la de la función $f(x) = -2x + 3$? Representa gráficamente ambas rectas.

18. Representa gráficamente, determinando los puntos de corte con los ejes y el vértice de cada una de las parábolas siguientes:

a) $f(x) = x^2 - 3x - 10$
b) $f(x) = -x^2 - 6x + 9$
c) $f(x) = 2x^2 + x - 1$
d) $f(x) = x^2 + x$
e) $f(x) = -x^2 - 2x + 8$
f) $f(x) = 2x^2 - 2$

7

El Concepto de Azar y Formas de Contar

TEMA 7

EL CONCEPTO DE AZAR Y FORMAS DE CONTAR

1. FENÓMENOS Y EXPERIMENTOS ALEATORIOS Y DETERMINISTAS

En la vida real, a veces, planteamos preguntas o se nos presentan situaciones cuyas respuestas o resultados son imposibles de predecir a ciencia cierta como por ejemplo: ¿Nevará mañana?, ¿Recibiré el martes una llamada de teléfono de mi tía?, ¿Aprobaré este curso?... A todas ellas las llamamos **situaciones de incertidumbre**.

Cuando un meteorólogo predice el tiempo atmosférico no ofrece una certeza absoluta sino que informa de la situación atmosférica más probable en función de los datos que tiene. Si nos dice que mañana hará un día soleado no debemos deducir, por ello, que no nevará.

Aunque todos los martes hasta la fecha me ha llamado por teléfono mi tía, nada me asegura que éste me llame: lo más probable es que sí, pero no lo podría asegurar con certeza.

En todos estos casos podemos dar una respuesta a la pregunta que nos planteamos en función de los datos que tenemos a partir de observaciones anteriores.

La **teoría de la probabilidad** pretende la descripción y el análisis matemático de unos determinados sucesos que provienen de la observación de un fenómeno. Hay que distinguir entre:

- Fenómenos **físicos**: aquellos que se verifican en las mismas condiciones y de la misma manera. Por ejemplo, calcular el tiempo que tarda un móvil en recorrer cierto espacio en cierto tiempo.

- Fenómenos **aleatorios**: aquellos que, aunque se realicen en las mismas condiciones y circunstancias, no se puede predecir su resultado. Por ejemplo, lanzar una moneda.

Nosotros estudiaremos estos últimos que, por depender del azar, se les llaman **sucesos aleatorios**.

Definimos, por tanto, como **experimento aleatorio** a todo aquel experimento que no pueda predecirse con certeza y como **experimento determinista** a los que sí se pueden predecir con certeza.

Realiza la actividad 1.

2. ESPACIO MUESTRAL

Se llama **espacio muestral** al conjunto de todos los resultados posibles de un experimento aleatorio. Se denota por E.

Ejemplo:

Si lanzamos una dado, el espacio muestral es:

$$E = \{1,2,3,4,5,6\}$$

Si lo que estudiamos es el estado civil de una persona, el espacio muestral será:

E = {soltero, casado, viudo, divorciado}

Si lanzamos dos veces una moneda, el espacio muestral será:

E = {cara cara, cara cruz, cruz cara, cruz cruz}

3. SUCESOS ELEMENTALES Y COMPUESTOS

Llamamos **suceso** a cada subconjunto del espacio muestral **E**. Los sucesos se denotan con letras mayúsculas.

Ejemplo:

Si el experimento es lanzar un dado, tendremos como espacio muestral E = {1,2,3,4,5,6}. Un suceso será cualquier subconjunto de E, como {1}, {3,4}, {1,3,6}, E...

Un **suceso elemental** es el suceso que está formado por un solo elemento, es decir, es el que está formado por un solo resultado posible de cada experimento.

Ejemplo:

Si el experimento es lanzar un dado, un suceso elemental será "obtener un 5". Este suceso se escribe {5}.

Si el experimento es lanzar dos veces una moneda, un suceso elemental será "obtener cara en el primer lanzamiento y cruz en el segundo". Este suceso se escribe {cara cruz}.

Todo suceso no elemental se llamará **compuesto**.

Ejemplo:

En el experimento del lanzamiento de un dado, son sucesos compuestos, {1,2},{1,4,5}, E, {2,5}...

En el experimento de lanzar dos veces una moneda, un suceso compuesto será {cara cara, cara cruz, cruz cara}.

Realiza las actividades 2, 3, 4, 5, 6 y 8

4. OPERACIONES CON SUCESOS

Dados dos sucesos A y B:

- Se llama **unión** de A y B al subconjunto de E formado por todos los sucesos elementales de A y B. Se denota por **A 4 B**.
- Se llama **intersección** de A y B al subconjunto de E formado por los sucesos elementales comunes a A y B. Se denota **A 3 B**.

Ejemplo:

En el lanzamiento de un dado, si

A={sacar un número par} = {2,4,6}

B={sacar un número primo} = {1,2,3,5}

Entonces: A 4 B = {1,2,3,4,5,6}
A 3 B = {2}

Dos **sucesos** A y B son **contrarios** si uno contiene los sucesos elementales que no contiene el otro. Dicho en otras palabras, la realización de uno supone la no-realización del otro. Al suceso contrario del suceso A se lo denota por $\overline{A}$. Matemáticamente $\overline{A}$ **= E – A** (siendo E el espacio muestral).

Ejemplo:

En el lanzamiento de un dado, los sucesos A = {1,2,4} y B = {3,5,6} son complementarios. También son complementarios C = {subconjunto de los números primos} = {1,2,3,5} y D = {subconjunto de los números no primos} = {4,6}.

Dos **sucesos** A y B son **incompatibles** cuando no pueden ocurrir a la vez, o lo que es lo mismo, cuando su intersección es el conjunto vacío.

Ejemplo:

Dos sucesos contrarios son incompatibles.

Dos **sucesos** A y B son **independientes** cuando la realización de uno no influye en la realización del otro.

Ejemplo:

Si extraemos dos cartas de una baraja de modo que, antes de sacar la segunda devolvemos la primera al mazo, el resultado obtenido en la segunda extracción no depende del obtenido en la primera.

Dos **sucesos** A y B son **dependientes** cuando la realización de uno sí que influye y condiciona la realización del otro.

Ejemplo:

Si extraemos dos cartas de una baraja de modo que la segunda se saca sin devolver la primera al mazo, el resultado obtenido en la segunda extracción sí que depende de lo obtenido en la primera.

Realiza las actividades 7, 9, 10, 11, 12, 13 y 14.

5. CONTAR. FORMAS DE CONTAR

Dado un conjunto finito, no vacío, pretendemos hacer grupos con sus elementos de modo que cumplan características bien definidas. Estudiaremos, por tanto, en este apartado, el numero de agrupaciones que podremos realizar con los elementos de un conjunto finito teniendo en cuenta su naturaleza, su orden o ambas cosas a la vez. Así surgirán, variaciones, permutaciones y combinaciones.

5.1. Variaciones sin repetición (V_p^q)

Se llama variación sin repetición de orden **q**, formada con elementos de un conjunto **P = {a1, a2, ..., ap}** a toda agrupación de **q** elementos elegidos entre los **p** dados en **P**, no repitiéndose ninguno y considerando como agrupaciones distintas aquellas que se diferencian en un elemento o en el orden de colocación de los mismos. Ahora vamos a contarlas:

- Es claro que el primer elemento de cada agrupación se puede elegir arbitrariamente, por tanto tenemos **p** posibilidades.
- El segundo elemento no puede coincidir con el primero por tanto nos quedan **p–1** posibilidades de elección.
- El tercer elemento no puede coincidir con ninguno de los anteriores así que nos quedan **p – 2** posibilidades.
- Si seguimos así, llegamos a que el número buscado es:

$$V_p^q = p \cdot (p-1) \cdot (p-2) \cdot \ldots (p-q+1) = \frac{p!}{(p-q)!}$$

Ejemplo:

El conjunto de las variaciones sin repetición de orden 2 de los elementos del conjunto P = {a, b, c} es:

{ab, ac, ba, bc, ca, cb}

El cardinal de ese conjunto es:
3 · (3 – 1) = 6

5.2. Variaciones con repetición (RV_p^q)

Se llama variación con repetición de orden **q**, formada con elementos de un conjunto **P = {a1, a2, ..., ap}** a toda agrupación de **q** elementos elegidos entre los **p** dados en **P**, pudiéndose repetir algunos y considerando como agrupaciones distintas aquellas que se diferencian en un elemento o en el orden de colocación de los mismos. Ahora vamos a contarlas:

- Es claro que el primer elemento de cada agrupación se puede elegir arbitrariamente, por tanto tenemos **p** posibilidades.
- El segundo elemento puede coincidir con el primero por tanto volvemos a tener **p** posibilidades de elección.
- Si seguimos así, llegamos a que el número buscado es:

RV_p^q **= p · p · ......p = p^q^**

Ejemplo:

El conjunto de las variaciones con repetición de orden 2 de los elementos del conjunto P = {a, b, c} es:

{aa, ab, ac, ba, bb, bc, ca, cb, cc }

El cardinal de ese conjunto es:
3 · 3 = 9

5.3. Permutaciones sin repetición (P_p)

Las permutaciones sin repetición son un caso particular de las variaciones sin repetición cuando p=q. Por tanto, si las contamos nos queda:

P_p **= p · (p–1) · (p–2) · .... (p–p+1)= p!**

Ejemplo:

El conjunto de las permutaciones sin repetición de los elementos del conjunto P = {a, b, c} es:

{ abc, acb, bac, bca, cab, cba}

El cardinal de ese conjunto es:
3 · 2= 6

5.4. Permutaciones con repetición (RP_p)

Se llaman permutaciones con repetición de órdenes **a**, **b**, **c**, **d** ..... **z** correspondiente a los elementos: **A**, **B**, **C**, **D**...... **Z** de un conjunto **P** de **p** elementos, a toda ordenación formada con esos elementos, de modo que, **a + b + c +...+ z = p** y además:

A se repita **a** veces
B se repita **b** veces
C se repita **c** veces
D se repita **d** veces
....
Z se repita **z** veces

Para contarlas consideramos a letras distintas **a1, a2, ..., a**; b letras distintas **b1, b2, ..., bb**;......; z letras distintas **z1, z2, ..., zz**.

- Con las **p** letras del conjunto **P = {a1, a2, ..., aa, b1, b2, ...bb, ..., z1, z2,..., zz}** se pueden formar p! permutaciones sin repetición.
- Al suprimir los subíndices en cada una de esas permutaciones ordinarias se obtie-

nen todas las permutaciones con repetición repetidas, puesto que cada permutación con repetición aparece **a! · b! · c! · ..... · z!** veces. Este número es el producto de las permutaciones de las a1, a2,..., aa, entre sí, por las permutaciones de las b1, b2,..., bb, entre sí, ..., y por las permutaciones de las z1, z2, ..., zz, entre sí.

- El cociente entre **p!** y **a! · b! · c! · ..... · z!** resuelve el problema**.** Por tanto el número buscado es:

$$RP_p = \frac{p!}{a!\cdot b!\cdot c!\cdot\ldots\cdot z!}$$

Ejemplo:

El conjunto de las permutaciones con repetición de órdenes 2 y 3 de los elementos a y b del conjunto P = {a, a, b, b, b} es:

aabbb
ababb baabb
abbab babab bbaab
abbba babba bbaba bbba

El cardinal de ese conjunto es:
5! / 2! · 3! = 5 · 4 · 3 · 2 / 2 · 3 · 2 = 10

5.5. Combinaciones sin repetición (C_p^q)

Se llama combinación sin repetición de orden **q**, formada con elementos de un conjunto **P = {a1, a2, ..., ap}** a toda agrupación de **q** elementos elegidos entre los **p** dados en **P**, no repitiéndose ninguno y considerando como agrupaciones distintas aquellas que se diferencian en un elemento no importando el orden de colocación de los mismos. Ahora vamos a contarlas:

- Como cada combinación sin repetición de orden q puede originar q! variaciones sin repetición de orden q de los elementos dados sin más que cambiar el orden de su colocación, tenemos que el número buscado es.

$$C_p^q = \frac{p!}{(p-q)!\bullet q!}$$

Ejemplo:

El conjunto de las combinaciones sin repetición de orden 2 de los elementos del conjunto P = {a, b, c, d} es:

{ ab, ac, ad, bc, bd, cd}

El cardinal de ese conjunto es:
4! / (4–2)! · 2! = 4 · 3 · 2 / 2 · 2 = 6

5.6. Combinaciones con repetición (RC_p^q)

Se llama combinación con repetición de orden **q**, formada con elementos de un conjunto **P = {a1, a2, ..., ap}** a toda agrupación de **q** elementos elegidos entre los **p** dados en **P**, pudiéndose repetir alguno y considerando como agrupaciones distintas solo aquellas que se diferencian en algún elemento no importando el orden de colocación de los mismos. Por tanto si dos agrupaciones tienen los mismos elementos aunque cambiados de orden, se considerarán como la misma.

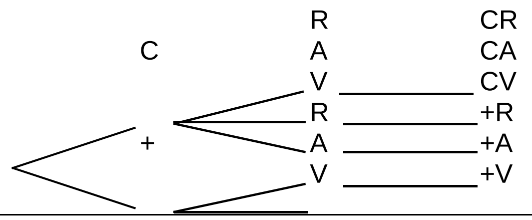
$$CR_{m,n} = \binom{m+n-1}{n}$$

Realiza las actividades de la 17 a la 21.

6. DIAGRAMAS DE ÁRBOL

Se llaman así a unas estructuras ramificadas (parecen árboles) muy útiles para calcular el espacio muestral de un experimento, sobre todo si éste es compuesto. La mejor manera de ver esto es por medio de un ejemplo:

Pensemos en una urna que tiene tres bolas de color rojo, una amarilla y dos verdes. Sea el experimento lanzar una moneda y a continuación extraer una bola de la urna. Veamos que podemos construir la siguiente estructura ramificada:



C = cara; + = cruz; R= roja; A = amarilla; V = verde

Pondremos en el primer nivel las posibles extracciones del primer experimento, en el segundo nivel las posibles del segundo experimento para cada una de las extracciones del primero (sin tener en cuenta, en este caso particular, el número de bolas de cada color) y así sucesivamente.

En el próximo tema veremos cómo se asocian a cada una de las ramas un valor que representará la probabilidad de que ocurra el suceso que dicha rama indica (será en este paso cuando tengamos en cuenta el número de bolas de cada clase).

Realiza las actividades 15 y 16.

A C T I V I D A D E S

1. Entre los fenómenos o experimentos siguientes, señala cuáles son aleatorios y cuáles son causales:

a) lanzar simultáneamente 3 dados de distintos colores sobre una mesa y anotar los números obtenidos.
b) preguntar, en una clase, a cada uno de los alumnos por el futbolista preferido.
c) tirar un cuerpo desde lo alto de una torre y anotar la velocidad de llegada al suelo.
d) sacar tres bolas de una bolsa que contiene siete bolas rojas y tres blancas y anotar los colores de las bolas extraídas.
e) engendrar hijos varones o hembras.

2. Se considera el fenómeno aleatorio lanzar un dado de quinielas (tres caras 1, dos caras x, una cara 2) sobre una mesa y anotar el resultado. Determina el espacio muestral E y el espacio de sucesos S.

3. Designando por S, el suceso consistente en sacar una ficha del dominó, cuya suma de puntos sea 7, determina S.

4. Se tira tres veces una moneda sobre una mesa y se anotan los resultados obtenidos. Determina el correspondiente espacio muestral y el suceso S obtener mayor número de cruces que de caras.

5. Se lanzan dos dados de distintos colores sobre una mesa y se anotan los resultados obtenidos. Determina los sucesos: A = {sacar al menos un cinco}; B = {sacar dos cincos}

6. Manolo y Luisa juegan una partida mixta de frontón. La partida termina cuando uno de ellos gana dos parciales seguidos o tres alternos. Determina el espacio muestral de los resultados correspondientes a los posibles finales de la partida. (Se puede usar un diagrama de árbol).

7. Se considera el fenómeno aleatorio extraer una carta de una baraja de cuarenta y anotar los sucesos siguientes: O = {sacar oro}, B = {sacar basto}, C = {sacar copa}, E = {sacar espada}, F = {sacar figura}. Determina:

a) $(O \cap F) \cup (B \cap F)$
b) $(C \cap F) \cap (\overline{E} \cup F)$

8. Designando por A_n el suceso consistente en sacar una ficha del dominó cuya suma de puntos sea múltiplo de *n*, determina los sucesos:

a) A_{12}
b) A_3
c) A_6

9. Con la notación del ejercicio anterior, di qué sucesos elementales forman los sucesos siguientes:

a) $A_4 \cup A_6$
b) $A_4 \cap A_6$
c) $\overline{A}_4 \cap \overline{A}_6$

10. Se considera el fenómeno aleatorio lanzar un dado sobre una mesa y anotar el número obtenido y los sucesos A = {obtener como mínimo dos puntos}, B = {obtener un punto}. Justifica si A y B son sucesos contrarios.

11. Sea el fenómeno aleatorio sacar una ficha del dominó y anotarla. Se consideran los sucesos A = {obtener ficha blanca}, B = {obtener ficha cuya suma de puntos sea ocho}. Justifica que A y B son sucesos incompatibles.

12. Prueba que si M y N son dos sucesos asociados a un fenómeno aleatorio y definimos la diferencia así: $M - N = M \cap \overline{N}$, entonces resulta que M – N contiene a los sucesos elementales de M que no están en N.

13. Si M y N son dos sucesos, se define la diferencia simétrica $M \Delta N$ como $M \Delta N = (M - N) \cup (N - M)$. Halla qué sucesos elementales forman $M \Delta N$.

14. Se considera el fenómeno aleatorio extraer una carta de una baraja de cuarenta y anotarla y los sucesos A = {sacar oro}, B = {sacar rey}, C = {sacar el rey de bastos}. Determina los sucesos siguientes:

a) $A \cap \overline{C}$
b) $A \cap B \cap C$
c) $\overline{A} \cup \overline{B} \cup \overline{C}$
d) $\overline{A} \cup \overline{B}$

15. Halla el número de resultados posibles al lanzar cuatro monedas al aire.

16. Con tres consonantes y dos vocales distintas, ¿cuántos vocablos de cinco letras se pueden formar sin que contengan dos consonantes seguidas?

17. ¿Cuántas diagonales tiene un polígono convexo de n lados? ¿Cuántos puntos de intersección interiores tienen las diagonales?

18. Disponiendo de siete colores distintos, ¿de cuántas maneras puede pintarse un tetraedro regular, no mezclando colores en una misma cara?

19. ¿Cuántos números de cuatro cifras, mayores que 5.000, pueden formarse con las cifras 3, 4, 5 y 6:

a) sin repetir ninguna
b) repitiendo una o más.

20. En una carrera de caballos llegan a la meta cuatro jinetes. ¿De cuántas formas distintas pueden llegar?

21. ¿De cuántas maneras pueden distribuirse seis juguetes distintos entre cuatro niños, de modo que a cada niño le corresponda un juguete por lo menos?

8

Probabilidad. La Ley de los Grandes Números

TEMA 8

PROBABILIDAD. LA LEY DE LOS GRANDES NÚMEROS

Hacia el siglo XVII algunos apasionados a los juegos de azar plantearon a importantes científicos, como Pascal, problemas que hasta entonces no tenían explicación matemática. Las reflexiones que se vieron obligados a hacer para darles respuesta dieron origen a unos instrumentos matemáticos que actualmente se utilizan en diversas ciencias: economía, sociología, genética...

Cada vez es más frecuente oír, a través de los distintos medios de comunicación, frases como éstas: "Según un sondeo de opinión...un porcentaje elevado de...", "Las posibilidades de que este equipo gane la liga son...", "Según las últimas estadísticas, el índice de abstención es..."

Todas estas nociones forman parte de una rama de las Matemáticas conocida como Teoría General de la Probabilidad y su estudio nos servirá para entender mejor muchas de las informaciones que recibimos.

1. FRECUENCIA ABSOLUTA Y FRECUENCIA RELATIVA

Se define la **frecuencia absoluta (fa)** de un suceso A como el número de veces que se repite dicho suceso en un determinado número de experimentos aleatorios.

Se define la **frecuencia relativa (fr)** de un suceso A como el cociente entre la frecuencia absoluta y el número de experimentos aleatorios.

Ejemplo:

Si lanzamos un dado 15 veces y obtenemos 4 veces un 3, 5 veces un 2, 3 veces un 1, 3 veces un 4. Entonces tendremos que:

Suceso	fa	fr
Obtener 1	3	3/15
Obtener 2	5	5/15
Obtener 3	4	4/15
Obtener 4	3	3/15

Esta tabla representa la distribución del experimento.

Realiza las actividades 7, 8, 9 y 10.

2. LEY DE LOS GRANDES NÚMEROS. PROBABILIDAD

Vamos a considerar el experimento de lanzar una moneda 10 veces. A priori, podríamos pensar que cinco de esos lanzamientos nos darían cara y que otros cinco nos darían cruz, es decir, que la **distribución esperada** es:

Suceso	fa	fr
Cara	5	5/10=0’5
Cruz	5	5/10=0’5

Sin embargo cuando realizamos el experimento y anotamos los resultados, vemos que hemos obtenido 3 veces cara y 7 veces cruz. Por tanto la **distribución experimental** es:

Suceso	fa	fr
Cara	3	3/10=0’3

Cruz	7	7/10=0'7

¿Qué ha pasado? ¿Falla nuestra intuición?

Para responder a estas preguntas se nos ocurre repetir el experimento, pero aumentando sucesivamente el número de lanzamientos. Entonces veamos lo que obtenemos:

- 50 lanzamientos

Suceso	fa	fr
Cara	21	21/50=0'42
Cruz	29	29/50=0'58

- 100 lanzamientos

Suceso	fa	Fr
Cara	43	43/100=0'43
Cruz	57	57/100=0'57

- 200 lanzamientos

Suceso	fa	Fr
Cara	92	92/200=0'46
Cruz	108	108/200=0'54

Podemos observar que, a medida de que el número de lanzamientos es mayor, las frecuencias relativas de la distribución experimental y de la esperada se van acercando. Este resultado se conoce como **Ley de los grandes números**.

Dicha Ley nos permite, en casos más complejos que el anterior, aproximarnos a la distribución esperada a través de la experimentación. En todos estos casos, cuanto mayor es el número de experimentos más nos acercamos a la distribución esperada.

Llamaremos **probabilidad de un suceso** A a la **frecuencia relativa esperada del mismo**, y se escribe:

P(A) = fr (A)

3. CASOS FAVORABLES Y CASOS POSIBLES. LEY DE LAPLACE

Hemos visto que los fenómenos aleatorios (aquéllos en los que interviene el azar) obedecen a ciertas leyes que nos permitirán conocer con qué probabilidad puede ocurrir un suceso entre todos los posibles del espacio muestral. Si lanzamos un dado 20 veces puede ocurrir que salga 6 veces el 2; tendríamos, por tanto:

Suceso	fa	fr
Obtener 2	6	6/20=0'3

Donde resulta que la frecuencia relativa está muy por encima de la esperada (1/6 = 0'167), pero ya sabemos, por la **Ley de los grandes números**, que al aumentar el número de realizaciones del experimento, la distribución experimental se aproxima a la teórica. Podremos, por tanto, decir que la probabilidad de obtener 2 en esos 20 lanzamientos del dado es 1/6 de 20.

Así, cada una de las caras de un dado no trucado, tiene la misma probabilidad de ser obtenida. Son por tanto **equiprobables**.

A aquellos sucesos que tienen la misma probabilidad se les llama **equiprobables**.

Supongamos que Ana y Tono juegan con un solo dado y a una sola tirada. Ana apuesta que saldrá un número menor que 3 y Tono, mayor que 3. ¿Cuál es la probabilidad que gane Ana? ¿Cuál es la probabilidad de que no gane ninguno?

Para responder a esto debemos fijarnos en lo siguiente:

- al tirar un dado podemos obtener 6 **resultados posibles**, todos equiprobables.
    - de ésos hay 2 resultados que estarán por debajo del 3: decimos que hay dos **resultados favorables** para el suceso ser menor que tres.
    - de ésos hay 3 resultados que estarán por encima del 3: decimos que hay tres **resultados favorables** para el suceso ser mayor que tres.
- de los 6 casos posibles tenemos 2 posibilidades de que el número obtenido sea menor que 3, por tanto 2/6 será la probabilidad de que gane Ana.
- no ganará ninguno si sale un tres. Y ésa es una posibilidad (caso favorable) entre 6 (casos posibles). Por tanto 1/6 es la probabilidad de que no gane ninguno.

Llamamos **casos posibles** a todos los que pueden ocurrir al realizar un experimento.

Llamamos **casos favorables** a los que dentro de los posibles favorecen un determinado suceso.

Llamamos **probabilidad de un suceso** al cociente entre el número de casos favorables al suceso y el número de casos posibles. A esta regla se la conoce como **Ley de Laplace**. Pero **esta ley sólo se puede aplicar en el caso en que todos los sucesos tienen probabilidades predecibles de antemano y los casos posibles son equiprobables**.

Realiza las actividades 1, 2, 3, 4, 5, 6, 11 y 18.

4. PROPIEDADES DE LA PROBABILIDAD. SUCESOS COMPATIBLES E INCOMPATIBLES

Para este apartado recordaremos las **operaciones con sucesos** del tema anterior y usaremos como ejemplo la extracción de cartas de una baraja española de 40 cartas.

La probabilidad verifica las siguientes propiedades:

- La probabilidad de cualquier suceso A es siempre un número comprendido entre 0 y 1.

0 [P(A) [1

- La probabilidad de un suceso que ocurre siempre, al que se le llama **suceso seguro**, es 1.

P (obtener una carta cualquiera) = 1

- La probabilidad de un suceso que nunca ocurre, al que se le llama **suceso imposible**, es 0.

P (no obtener nada) = 0

- La probabilidad de la unión de dos sucesos A, B es igual a la suma de las probabilidades de dichos sucesos menos la probabilidad de la intersección de ambos.

P (A 4 B) = P(A) + P(B) – P(A 3 B)

Observación: Si los sucesos A y B son incompatibles sucede que

A 3 B =⇔.

Por tanto P(A3B)=0 y entonces:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

Sea A = "Obtener copas", B = "Obtener oros", C = "Obtener rey" entonces:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) =$$
$$= 10/40 + 10/40 - 0 = 20/40 = 1/2$$

$$P(A \cup C) = P(A) + P(C) - P(A \cap C) =$$
$$= 10/40 + 4/40 - 1/40 = 13/40$$

- Las probabilidades de un suceso A y su contrario $\overline{A}$ suman 1:

$$\mathbf{P(A) + P(\overline{A}) = 1}$$

De esta fórmula deducimos que: $\mathbf{P(\overline{A}) = 1 - P(A)}$

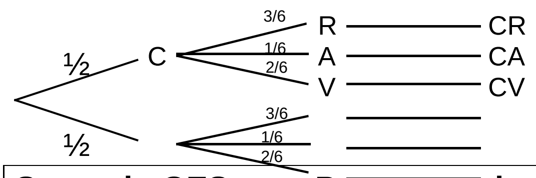
Sean los sucesos A = "sacar oros", B = "no sacar oros", entonces:

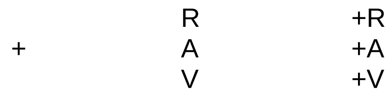
$A = \overline{B}$, por tanto $P(B) + P(\overline{B}) = 1$

5. EXPERIMENTOS COMPUESTOS

Llamamos **experimentos compuestos** a aquéllos que están formados por más de un experimento simple como, por ejemplo, lanzar una moneda y un dado, o hacer dos extracciones consecutivas de una baraja. Todos estos son ejemplos en los que se repiten experimentos simples. Recordemos un ejemplo ya visto en el tema anterior:

Sea el experimento lanzar una moneda y a continuación extraer una bola de la urna formada por tres bolas rojas, una amarilla y dos verdes. Veamos que podemos construir la siguiente estructura ramificada:





Ahora sobre cada rama pondremos la probabilidad de que ocurra el suceso que dicha rama indica:

- En el primer nivel podemos obtener cara o cruz, la probabilidad de cada una de ellas es ½.

- En el segundo nivel podremos obtener:

Bolas	Probabilidad
Rojas	3/6
Amarillas	1/6
Verdes	2/6

Ahora ya tenemos todos los datos para calcular las probabilidades de los sucesos compuestos, sin mas que multiplicar los valores que estén sobre las ramas correspondientes.

Suceso	Probabilidad
Cara roja	½ · 3/6
Cara amarilla	½ · 1/6
Cara verde	½ · 2/6
Cruz roja	½ · 3/6
Cruz amarilla	½ · 1/6
Cruz verde	½ · 2/6

Realiza las actividades de la 12 a la 17.

6. SUCESOS DEPENDIENTES E INDEPENDIENTES. PROBABILIDAD CONDICIONADA

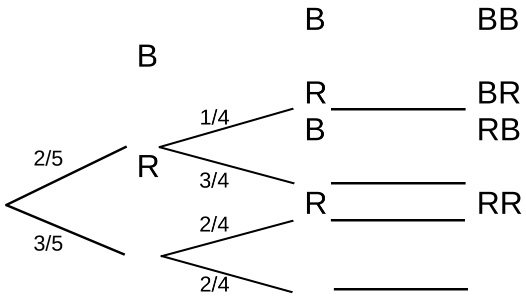
Si al tirar dos monedas gana el que antes obtenga dos caras, sabemos que el resultado del segundo lanzamiento no depende para nada de lo que haya ocurrido en el primero. Diremos entonces que los sucesos A= "obtener cara en la primera tirada" y B= "obtener cara en la segunda tirada" son **independientes.** La probabilidad del suceso formado por estos dos sucesos independientes la calculamos mediante la Ley de Laplace, luego, P(cara cara) = ½ · ½ = 1/4. Resumiendo:

$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$, cuando A y B son sucesos independientes.

Puede ocurrir, en determinados experimentos, que la probabilidad de que ocurra un suceso dependa de que se haya verificado o no otro suceso: en tal caso diremos que los sucesos son **dependientes.** Pensemos que en una bolsa tenemos 2 bolas blancas y 3 bolas rojas; extraemos una bola, la dejamos aparte y a continuación extraemos otra. Queremos conocer la probabilidad de obtener una bola roja en la segunda extracción, cuando en la primera obtuvimos una blanca. Para ello tenemos en cuenta lo que sigue:

- En la segunda extracción hay cuatro bolas en la bolsa.
- El número de bolas blancas o rojas en la segunda extracción dependerá de lo sucedido en la primera extracción, en nuestro caso, para la segunda extracción nos quedan 3 bolas rojas y una blanca, por tanto, la probabilidad pedida es ¾.

Si representamos el experimento usando un diagrama de árbol tenemos:



Nótese que en el segundo nivel ahora hay que tener en cuenta lo que ocurre en la primera extracción.

Resumiendo:

$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B|A)$ (condicionado a que ocurra A), cuando A y B son sucesos dependientes.

A C T I V I D A D E S

1. ¿Cuál es la probabilidad de que el lanzar una moneda salga cara?

2. La probabilidad de que salga un múltiplo de 2 al lanzar un dado es ½ ¿Cuál es la probabilidad de que no salga múltiplo de 2?

3. ¿Cuál es la probabilidad de que al lanzar una moneda salga cara y cruz?

4. ¿Cuál es la probabilidad de que al lanzar un dado salga múltiplo de 3 o múltiplo de 5?

5. ¿Cuál es la probabilidad de que al lanzar un dado salga múltiplo de 2 o múltiplo de 3?

6. Si sacamos una carta de una baraja de 40 cartas, calcula la probabilidad de:

a) sacar la sota de oros
b) sacar oros o sota.

7. Varias parejas han jugado a pares y nones cierto número de veces. Los resultados se ofrecen en la siguiente tabla:

	Julia/ Luis	Pablo/ Lola	Ana/ Rosa	Diego/ Raúl	Laura/ Daniel
Pares	3	7	18	23	24
Nones	7	13	12	17	26
Total	10	20	30	40	50

a) Elabora una tabla con las frecuencias relativas de cada uno de los casos.
b) Halla las frecuencias relativas resultantes de sumar las jugadas de las tres primeras parejas.
c) Haz lo mismo con la tercera y la cuarta, la tercera y la quinta, y así sucesivamente hasta sumarlas todas
d) ¿Cómo evoluciona la frecuencia experimental a medida que aumenta el número de datos? ¿Cuál es la distribución de frecuencias relativas esperada?

8. Durante las primeras 6 jornadas de la liga se ha contabilizado el número de unos, equis y doses de las correspondientes quinielas obteniéndose los siguientes resultados:

	Jornada					
	1ª	**2ª**	**3ª**	**4ª**	**5ª**	**6ª**
1	6	5	8	8	7	6
x	4	7	4	5	6	6
2	5	3	3	2	2	3

a) Halla las frecuencias relativas correspondientes a la primera jornada, las dos primeras, las tres primeras, y así sucesivamente las seis primeras jornadas.
b) ¿Cuál es la probabilidad experimental de que un partido cualquiera acabe en empate?

9. Se han lanzado dos dados y anotado la suma de sus caras en 100 ocasiones. Cada 20 tiradas se han anotado los resultados en la siguiente tabla indicando sólo si la suma es 7 (Sí) o no lo es (No):

	Nº de tiradas				
	20	40	60	80	100
sí	4	9	12	15	18
no	16	31	48	65	82

a) halla una tabla de frecuencias relativas
b) ¿Cuál es la probabilidad experimental de obtener 7? ¿Cuál crees que es la probabilidad esperada?

10. En una bolsa hay bolas de varios colores pero no sabemos cuántas ni de qué colores son. Sacamos una, anotamos el color y la devolvemos a la bolsa. Después de repetir el experimento 200 veces, hemos sacado 80 veces una bola amarilla, 95 veces una azul y 25 veces una roja.

a) Elabora una tabla de frecuencias relativas.
b) Si hubiera en total 30 bolas en la bolsa ¿cuántas serían de cada color?

11. En una clase hay 17 alumnos y 13 alumnas. ¿Cuál es la probabilidad de que al sortear un viaje entre ellos le toque a una alumna?

12. ¿Cuál es la probabilidad de obtener 8 al lanzar dos dados y sumar los resultados de las caras superiores? ¿Y al tirar tres?

13. Tres amigas con distinto número de pie han salido juntas a comprar cada una un par de zapatos. Al salir, cada una ha cogido una caja sin reparar en si era la suya. ¿Cuál es la probabilidad de que:

a) cada una se haya llevado la suya?
b) al menos una encuentre sus zapatos al llegar a casa?

14. La final de un torneo de tenis se juega al mejor de 5 sets (vence el que primero gane 3 sets). ¿Cuál es la probabilidad de que el partido termine después de 4 sets disputados? Supón que los dos finalistas tienen la misma probabilidad de ganar.

15. Hemos lanzado un dado trucado un gran número de veces obteniendo como resultado las siguientes probabilidades: P(1) = 0’11; P(2) = 0’15; P(3) = 0’18; P(4) = 0’16, P(5) = 0’16, P(6) = 0’24. Calcula la probabilidad de, al lanzar un dado, obtener:

a) Un número par
b) un número impar
c) un múltiplo de 3.
d) Un 1 en la primera tirada y un 3 en la segunda

16. Calcula la probabilidad de acertar catorce resultados en una quiniela con un boleto completo de ocho apuestas.

17. Se dispone de una caja con 5 bolas blancas y 3 negras. Halla la probabilidad de que, al extraer dos bolas al mismo tiempo, ambas sean blancas.

18. En una caja hay 5 letras de las cuales 3 son E y 2 son L. Extraemos una letra, a continuación otra y luego otra. ¿Cuál es la probabilidad de obtener las letras de la palabra ELE y en ese orden?