FUNCIONES Y GRÁFICAS

1. Funciones reales

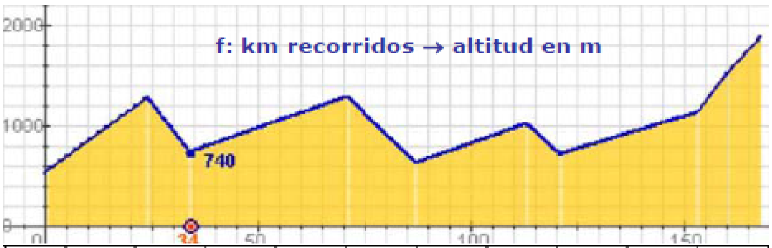
Concepto de función

Una función es una **correspondencia** entre dos conjuntos numéricos, de tal forma que a cada elemento del conjunto inicial le corresponde un elemento y sólo uno del conjunto final.

Se relacionan así dos variables numéricas que suelen desisgnarse con x e y.

f: x → y=f(x)

- ✓ x es la variable independiente
- ✓ y es la variable dependiente



km	0	24	34	71	87	113	121	153	160	168
alt	540	1280	740	1290	630	1020	720	1130	1520	1882

El grafico describe el recorrido de la 9ª Etapa de la Vuelta Ciclista 2007, indicando los km totales y la altitud en los puntos principales del trayecto.

A la izquierda aparece la gráfica anterior trazada sobre unos ejes cartesianos, para simplificarla se han unido los puntos principales mediante segmentos. Se trata de una función que da la altitud según los km recorridos, observa la tabla de valores.

Gráfica de una función

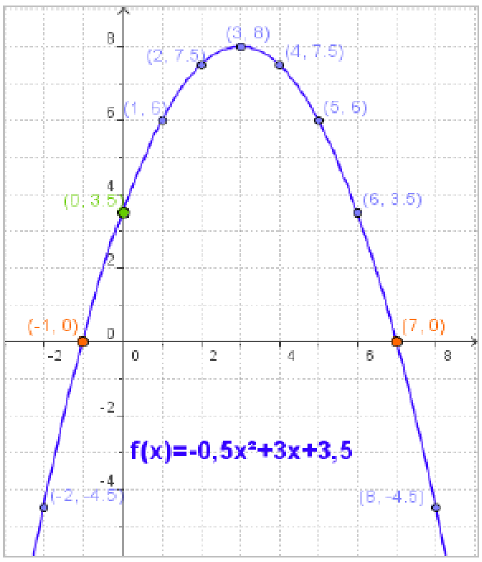
Para ver el comportamiento de una función, **f: x → y**, recurrimos a su **representación gráfica** sobre los ejes cartesianos, en el eje de abscisas (OX) la variable independiente y en el de ordenadas (OY) la independiente; siendo las coordenadas de cada punto de la gráfica: **(x, f(x))**.

En la figura está representada la función:

$$f(x)= 0,5x^2+3x+3,5$$

Haciendo una tabla de valores, se representan los puntos obtenidos, x en el eje de abscisas (OX), f(x) en el de ordenadas (OY).

x	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8
f(x)	-4,5	0	3,5	6	7,5	8	7,5	6	3,5	0	-4,5



Hay unos puntos que tienen especial interés, los que la gráfica corta a los ejes coordenados. Para calcularlos:

- ✓ Corte con el eje OY:
  Los puntos del eje de ordenadas tienen abscisa 0, basta hacer **x=0** en la fórmula de la función.
- ✓ Cortes con el eje OX:
  Los puntos del eje de abscisas tienen y=0. Se resuelve la ecuación **f(x)=0**

Cortes con los ejes

EJE OY: f(0)=3,5 Punto (0, 3,5)

EJE OX: Resolviendo la ecuación: $0,5x^2+3x+3,5=0$

Resulta:

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{9+7}}{-2 \cdot 0,5} = 3 \pm 4 = \begin{matrix} 7 \\ -1 \end{matrix}$$

Puntos (7, 0) (-1, 0)

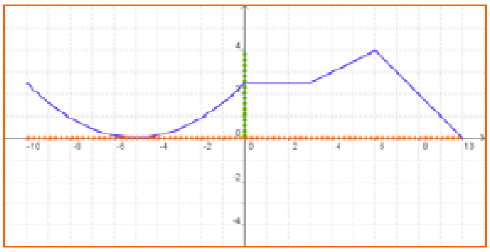
Dominio y recorrido

Dada una función y=f(x)

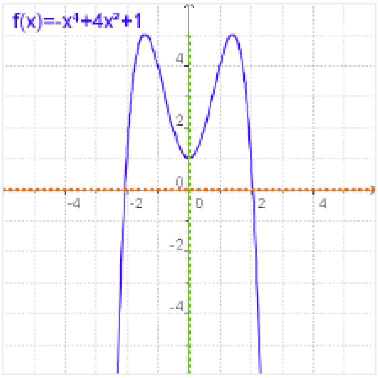
- ✓ Se llama **dominio** de f al conjunto de valores que toma la variable independiente, **x**. Se indica como **Dom f**.

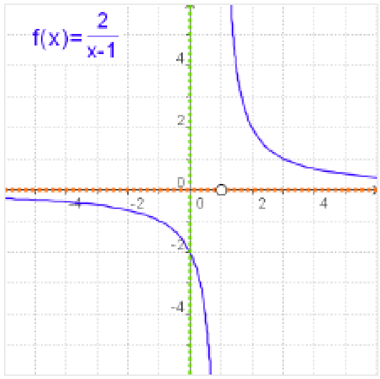
  El dominio está formado, por tanto, por los valores de x para los que existe la función, es decir, para los que hay un f(x).

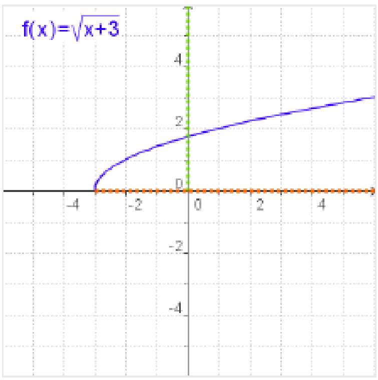
- ✓ El **recorrido** es el conjunto de valores que puede tomar la variable dependiente, **y**, esto es el conjunto de las imágenes. Se representa como **Im f**.

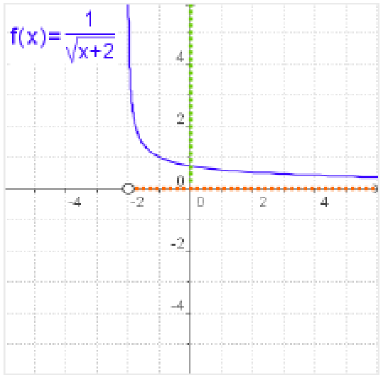


Dom f=[-10, 10]









Calcular Dominios

- Si la expresión analítica de la función es un polinomio, el dominio son todos los números reales.

  $f(x)=-x^4+4x^2+1$

  Dom f = $\mathbb{R}$
  Im f = $(-\infty , 5]$

- Si la expresión analítica de la función es un cociente, el dominio son todos los reales excepto los que anulan el denominador.

  $f(x) = \dfrac{2}{x-1}$

  Dom f = $\mathbb{R} - \{1\}$
  Im f = $(-\infty , 0) \cup (0, +\infty)$

- Si la expresión analítica de la función es una raíz cuadrada, el dominio está formado por los números reales para los que el radicando es positivo o cero.

  $f(x) = \sqrt{x+3}$

  Dom f = $[-3,+\infty)$
  Im f = $[0,+\infty)$

  $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x+2}}$

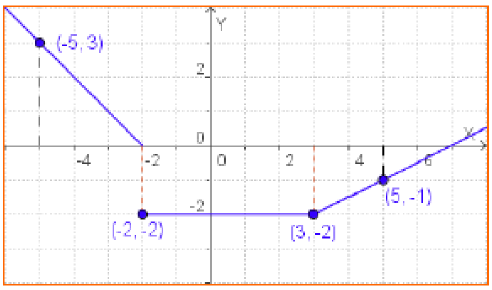
  Dom f = $(-2,+\infty)$
  Im f = $(0,+\infty)$

Funciones definidas a trozos

Hay un tipo de funciones que vienen definidas con distintas expresiones algebraicas según los valores de x, se dice que están **definidas a trozos**.

Para describir analíticamente una función formada por trozos de otras funciones, se dan las expresiones de los distintos tramos, por orden de izquierda a derecha, indicando en cada tramo los valores de x para los que la función está definida.

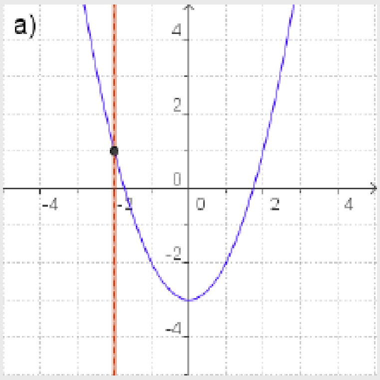
En la figura puedes ver un ejemplo de este tipo de funciones y su representación gráfica.

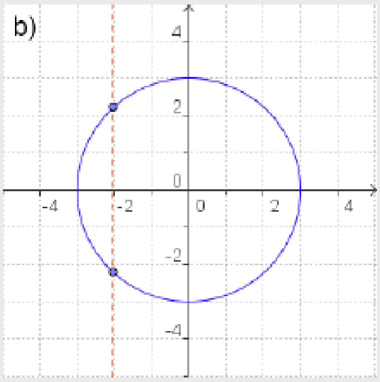


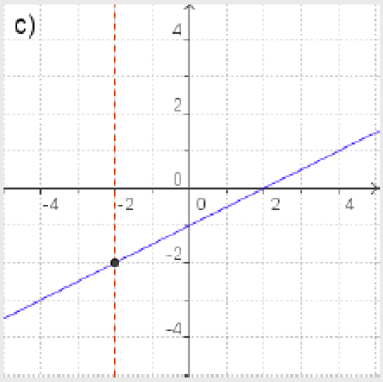
$$f(x) = \begin{cases} -x-2 & x < -2 \\ -2 & -2 \le x \le 3 \\ 0{,}5x - 3{,}5 & x > 3 \end{cases}$$

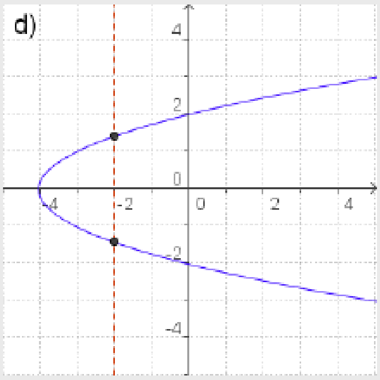
EJERCICIOS resueltos

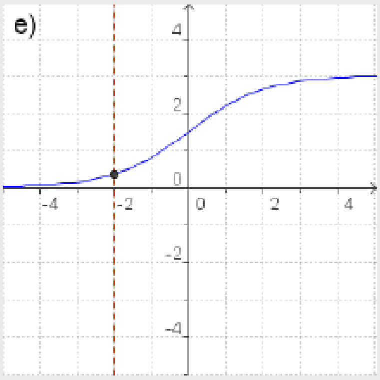
5. De las siguientes gráficas indica las que corresponden a una función y las que no.









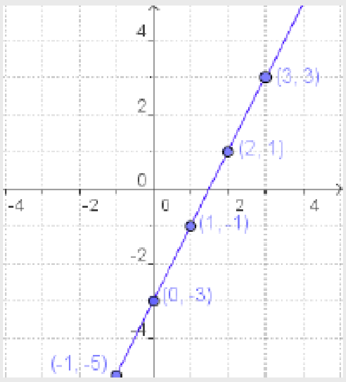


- Son gráficas de una función a), c) y e), ya que a cada x del dominio le corresponde un único valor de y.
- No son gráficas de una función b) y d)

6. Haz una tabla de valores, dibuja los puntos obtenidos y representa la función.

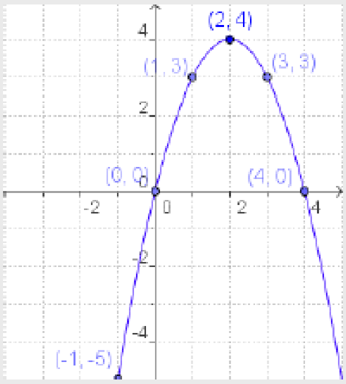
a) $f(x)=2x-3$

x	f(x)
0	-3
1	-1
2	1
3	3
-1	-5
-2	-7



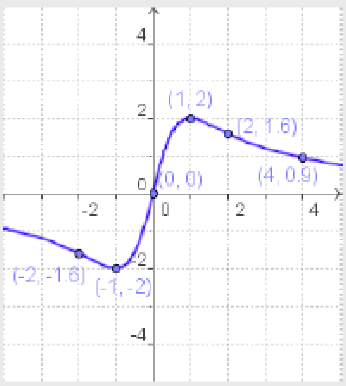
b) $f(x)=-x^2+4x$

x	f(x)
0	0
1	3
2	4
3	3
4	0
-1	-5



c) $f(x)=\dfrac{4x}{x^2+1}$

x	f(x)
0	0
1	2
-1	-2
2	1,67
-2	-1,67
4	0,9



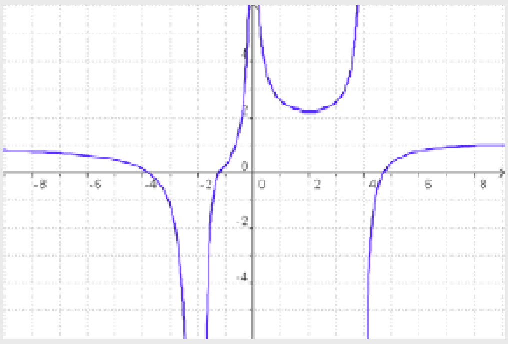
- RECUERDA

  Para hacer una tabla de valores, a partir de la expresión de una función, sustituye en la fórmula la x por los valores que desees, opera y calcula los correspondientes de y=f(x). En general procura alternar valores positivos y negativos.

  Dibuja los puntos (x,y) así obtenidos, y únelos.

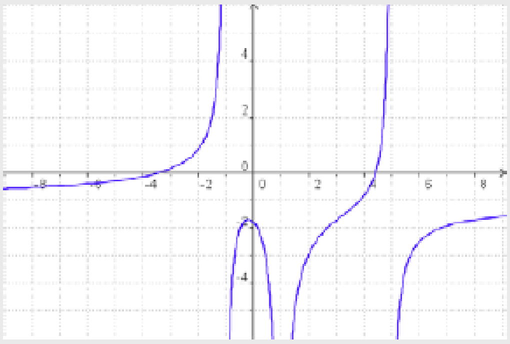
3. Calcula el dominio de las siguientes funciones.

a)



Dom f = $\mathbb{R}$– {-2, 0, 4}

b)



Dom f = $\mathbb{R}$ – {-1, 1, 5}

En los puntos indicados, en ambos casos, no se puede encontrar f(x) en la gráfica.

c) $f(x)= x^3-2x^2+5x$

Dom f = $\mathbb{R}$ ya que es un polinomio

d) $f(x)=\dfrac{x}{x-2}$

Dom f = $\mathbb{R}$ – {2}

e) $f(x)=\sqrt{x-5}$

$x-5\geq 0$, $x\geq 5$ $\Rightarrow$ Dom f = $[5, +\infty)$

f) $f(x)=\sqrt{5-x}$

$5-x\geq 0$, $5\geq x$ $\Rightarrow$ Dom f = $(-\infty , 5]$

g) $f(x)=\dfrac{3}{\sqrt{x+4}}$

$x+4>0$, $x>-4$ $\Rightarrow$ Dom f = $(-4, +\infty)$

h) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2-x}}$

$2-x>0$, $2>x$ $\Rightarrow$ Dom f = $(-\infty , 2)$

(En estos casos -4 y 2, respectivamente, no son del dominio ya que anulan el denominador)

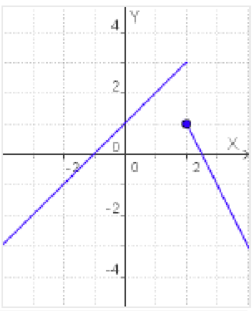
2. Propiedades de las funciones

Continuidad

La primera idea de función **continua** es la que puede ser representada de un solo trazo, sin levantar el lápiz del papel.

Cuando una función no es continua en un punto se dice que presenta una **discontinuidad**.

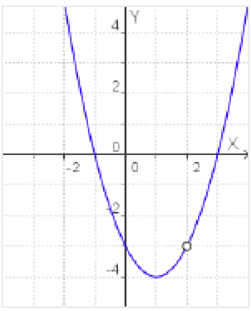
Las tres funciones dibujadas debajo son discontinuas en x=2, pero tienen distintos tipos de discontinuidad.



$f(x)=\begin{cases} x+1 & x<2 \\ -2x+5 & x\geq 2\end{cases}$

f(2)=1

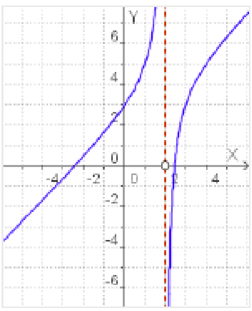
La gráfica presenta un salto.



$f(x)=\dfrac{x^3-2x^2+x+6}{x-2}$

x=2 no pertenece al dominio.

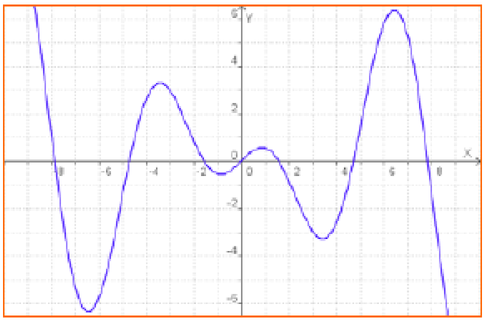
Esta discontinuidad se dice "evitable".



$f(x)=\dfrac{x^2-6}{x-2}$

x=2 no pertenece al dominio.

La gráfica presenta un salto infinito.



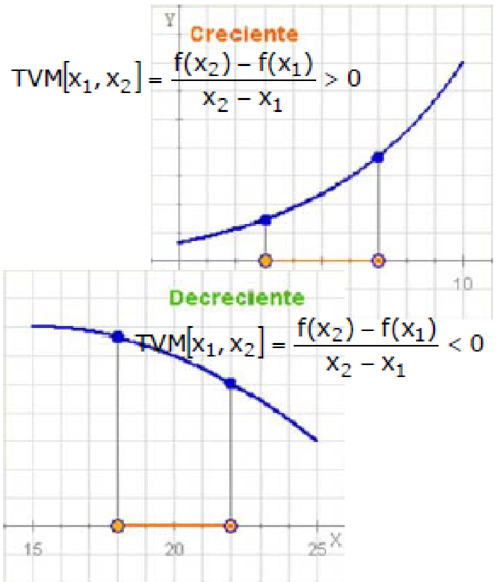
Una función y=f(x) es continua en x=a si:

- La función está definida en **x=a**, existe **f(a)=b**.
- Las imágenes de los valores próximos a **a** tienden a **b**.

Hay varias razones por las que una función no es continua en un punto:

- Presenta un salto.
- La función no está definida en ese punto, o si lo está queda separado, hay un "agujero" en la gráfica.
- La función no está definida y su valor crece (o decrece) indefinidamente cuando nos acercamos al punto.

Crecimiento y decrecimiento



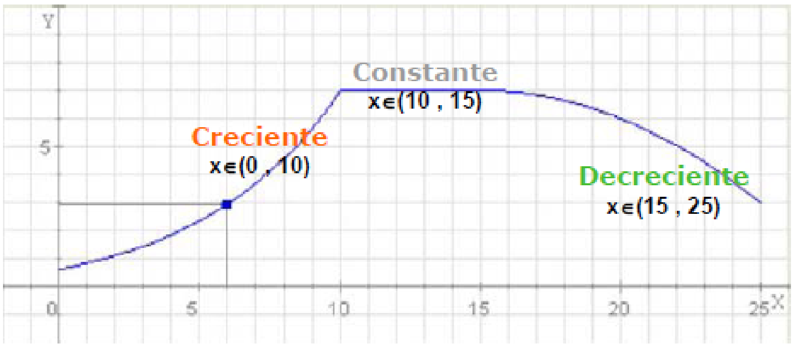
Una característica de las funciones que se puede visualizar fácilmente en las gráficas es la monotonía. Cuando al aumentar el valor de x aumenta el valor de y=f(x), la gráfica "asciende" y se dice que la función es **creciente**. Si por el contrario al aumentar x disminuye y, la gráfica "desciende", y la función **decrece**. Precisando un poco más:

Una **función** es **creciente** en un intervalo, cuando dados dos puntos cualesquiera del mismo

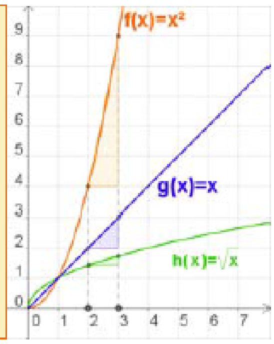
- Si $\mathbf{x_1<x_2}$ entonces $\mathbf{f(x_1)<f(x_2)}$

Y será **decreciente**:

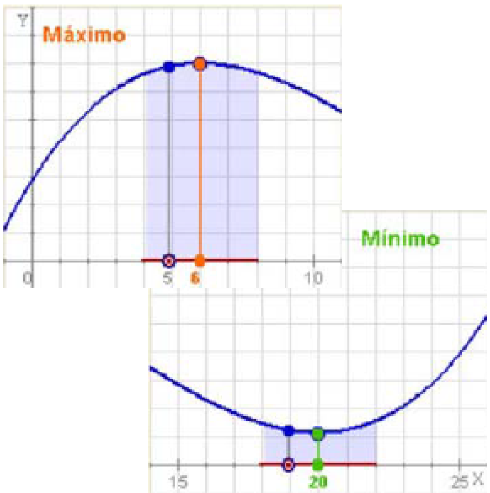
- Si $\mathbf{x_1<x_2}$ entonces $\mathbf{f(x_1)>f(x_2)}$



Todas las funciones no crecen o decrecen, de la misma manera.
$f(x)=x^2$ es la que crece más deprisa,
$g(x)=x$ tiene un crecimiento lineal,
$h(x)=\sqrt{x}$ crece más lentamente.

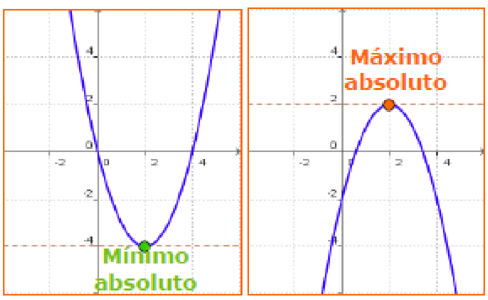


Máximos y mínimos



Dada una función continua en un punto x=a, se dice que presenta un **máximo relativo**, si a la izquierda de dicho punto la función es creciente y la derecha la función es decreciente.

Si, por el contrario, la función es creciente a la izquierda y decreciente a la izquierda hay un **mínimo relativo**.



Si se verifica que f(a)>f(x) para cualquier valor x del dominio, y no sólo para los valores de "alrededor", se habla de **máximo absoluto** en x=a.

Y análogamente se dice que en a hay un **mínimo absoluto** si f(a)<(f(x) para cualquier x del dominio.

Recuerda lo más importante

- Una **función** es una relación entre dos variables x e y, de modo que a cada valor de la variable independiente, **x**, le asocia un único valor de la variable **y**, la dependiente.
- El **dominio** de una función es el conjunto de todos los posibles valores que puede tomar x.
- La **gráfica** de una función es el conjunto de puntos **(x,f(x))** representados en el plano.

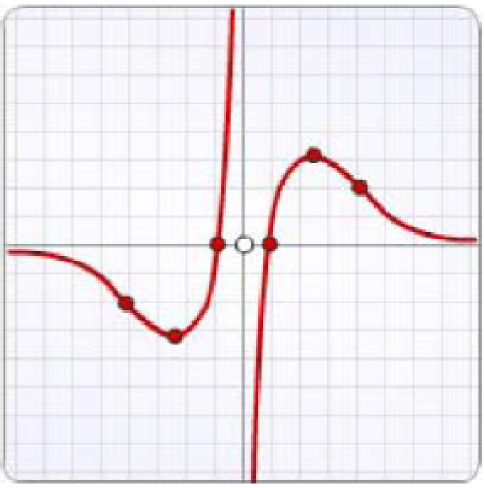
- Una función es **continua** si puede representarse con un solo trazo. Es **discontinua** en un punto si presenta un "salto" o no está definida en ese punto.
- Una función es **periódica** de periodo t, si su gráfica se repite cada t unidades, f(x+t)=f(x).
- Una función es **simétrica** respecto al eje OY, función par, si f(x)=f(-x); y es simétrica respecto al origen, función impar, si f(-x)=-f(x).

- La **tasa de variación** de una función entre dos puntos es la diferencia: $\mathbf{TV[x_1,x_2]=f(x_2)-f(x_1)}$
  La **tasa de variación media** es:

$$TVM[x_1,x_2]=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$$

- Una función es **creciente** en un intervalo, cuando dados dos puntos cualesquiera del mismo
  - Si $x_1<x_2$ entonces $f(x_1)<f(x_2)$

  Y es **decreciente**
  - Si $x_1<x_2$ entonces $f(x_1)>f(x_2)$
- Una función continua en un punto x=a, presenta un **máximo** relativo, si a la izquierda de dicho punto es creciente y la derecha es decreciente. Si, por el contrario, es decreciente antes y creciente después hay un **mínimo** relativo.
- La gráfica de una función puede ser **cóncava** (hacia abajo) o **convexa** (hacia arriba). Los puntos del dominio en los que cambia la concavidad, se llaman **puntos de inflexión**.



Dominio
Todos los reales excepto el 0

Continuidad
No es continua, en 0 presenta una discontinuidad de salto infinito.

Simetría
Es simétrica respecto al origen de coordenadas, función impar.

Cortes con los ejes
Al eje de abscisas en (-1,0) y (1,0); no corta al eje de ordenadas.

Crecimiento y decrecimiento
Es creciente en (-∞, -2,5)U(2,5 ,+∞)
Y decreciente en (-2,5 ,0)U(0, 2,5)

Máximos y mínimos
Máximo en (2,5 ,3);
Mínimo en (-2,5 ,3)

Concavidad y convexidad
Puntos de inflexión
Es cóncava en (-∞, -3)U(0 , 3)
Y convexa en (-3 ,0)U(3, +∞)
(-3,0) y (3,0) son puntos de inflexión.
En x=0 cambia la concavidad pero no hay punto de inflexión ya que no es del dominio.