Curso 2019-2020

ACCESO CFGM
MATEMÁTICAS

Profesor: Jaime Espinosa
jaespimon@hotmail.com
Blog para consultar: https://jaespimon.wordpress.com/

Contenidos

Unidad didáctica 1 .... **4**

1. El número natural 4
2. Números enteros 6
3. Los números racionales 9
4. La medida. Sistemas de unidades 12

Unidad didáctica 2 .... **17**

1. Magnitudes directa e inversamente proporcionales 17
2. Lenguaje algebraico 22
3. Ecuaciones de primer grado con una variable 26
4. Sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas. 31
5. Funciones y gráficas 34

Unidad didáctica 3 .... **37**

1. Las figuras geométricas en el plano 37
2. Teorema de Pitágoras. 40
3. Cálculo de perímetros y áreas 41
4. El círculo y la circunferencia 42
5. Cuerpos geométricos. Poliedros 43

Unidad didáctica 4 .... **47**

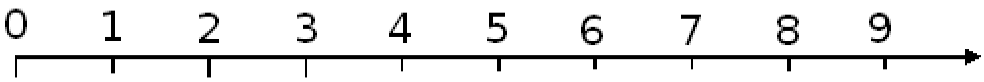
1. La estadística 47
2. Elección de muestras significativas. Recuento de datos y frecuencias 48
3. Elaboración de gráficos estadísticos 50
4. Cálculo de las medidas de centralización 53
5. Cálculo de las medidas de dispersión 56
6. Azar y probabilidad. Espacio muestral 60
7. Análisis de la posibilidad de que un suceso ocurra: Ley de Laplace 63
8. Probabilidad compuesta 65
9. Aplicación de la probabilidad en los juegos de azar 67

Unidad didáctica 1

1. El número natural

Para contar los objetos y los seres que nos rodean empleamos los **números naturales (N)**. Los números naturales son infinitos.

N ={0,1,2,3,4,5,.......,43,44,45,.......,1528,1529,1530,1531,....... }



1.1. Múltiplos y divisores de un número natural

Los **múltiplos** de un número son los que se obtienen al multiplicar dicho número por todos los números naturales salvo el 0. Puesto que hay infinitos números naturales, un número tiene infinitos múltiplos.

Por ejemplo: los múltiplos del número 3 son 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21,...

Los **divisores** de un número natural son aquellos números que se pueden dividir entre él, siendo el resto cero.

El número 7 es divisor de 364"; también se dice que "el número 364 es divisible entre 7", ya que al dividir 364 entre 7 el resto es 0.

Para saber si un número es divisor de otro solo tienes que hacer la división y comprobar si el resto es cero.

Observa que "un número tiene infinitos múltiplos pero solo unos cuantos divisores".

1. Contesta en el cuaderno:

a) ¿Es 50 múltiplo de 6?
b) ¿6 es divisor de 240?
c) ¿El número 17 es divisible por 3? ¿y por 2?
d) Escribe dos divisores de 12

2. Escribe seis múltiplos de cada uno de estos números: 8, 7, 4 y 15.

3. Escribe todos los divisores de los números:

a) 45 b) 36 c) 25 d) 60

4. Calcula 4 múltiplos de 6 comprendidos entre 100 y 125.

1.2. Criterios de divisibilidad

- ✓ Un número es divisible por **dos** si acaba en cero o cifra par.
- ✓ Un número es divisible por **cinco** si acaba en cero o en cinco.
- ✓ Un número es divisible por **3** cuando la suma de sus cifras es múltiplo de 3.

5. Dados los números 121, 7392, 6061, 4320, 1915, 3276, 428, 505, 400, 936 indica, empleando los criterios de divisibilidad:

a) cuales son divisibles por 2
b) cuáles son divisibles por 3
c) cuáles son divisibles por 5

6. ¿Cuál es el valor que debe tener la letra *a* para que los números siguientes sean divisibles por 3?

a) 2 *a* 46
b) 301 *a*
c) 413 *a*
d) *a* 314

7. Contesta, sin realizar la división, si los números 102, 210, 387, 225, 360, 121 y 3.600 son múltiplos de 2, 3, y 5.

8. - Escribe en cada caso dos números que cumplan las siguientes condiciones:

a) Sea múltiplo de 12:
b) Tengan 3 cifras y sea divisible entre 3:
c) Tengan 4 cifras y sean divisibles entre 5:
d) Sean primos y estén comprendidos entre 50 y 60:

1. 3. Números primos y compuestos

Un número natural distinto de 1 es número **primo** si sólo tiene como divisores el 1 y él mismo.

Un número natural es **compuesto** si tiene otros divisores además del 1 y de él mismo.

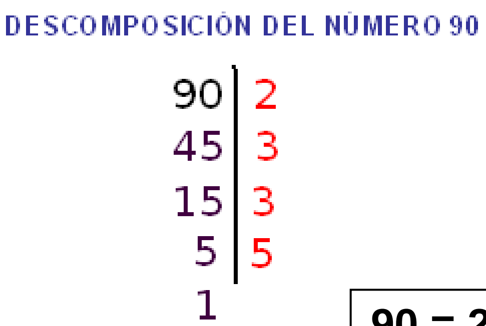
13 es primo, sus divisores son 1 y 13

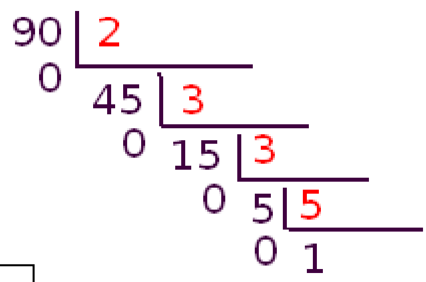
12 es compuesto, sus divisores son 1, 2, 3, 4, 6, 12

9. De los siguientes números señala cuales son primos: 43, 47, 49, 55, 74, 83, 96, 107, 121.

1.4. Descomposición de un número en factores primos

Para descomponer un número en factores primos se divide por el menor número primo del que sea múltiplo . Lo mismo se hace con los cocientes que se vayan obteniendo.





$$\boxed{90 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5}$$

10. Haz la descomposición en factores primos de 40, 50, 60, 100, 240, 180, 75, 2250, 1400, 1690, 1440, 2560

1.5. Mínimo común múltiplo

Mínimo común múltiplo es el menor de los múltiplos comunes a varios números. Se obtiene descomponiendo los números en factores primos. A continuación se multiplican los factores **comunes y no comunes** afectados por el **mayor exponente**.

m.c.m. (12, 15, 20)	$12=2^2\cdot 3$	$15=3\cdot 5$	$20=2^2\cdot 5$
	m.c.m. $= 2^2 \cdot 3 \cdot 5 = 60$		

Si dos números no tienen divisores comunes, se dice que son primos entre sí.

11. **Calcula :**

a) **m.c.m** (56, 84)
b) **m.c.m. *(12, 20)***
c) **m.c.m** (24, 56, 110)
d) **mcm** de 60 y 108

12. **Hallar el m.c.m. de:**

a) 870 y 261
b) 930 y 1240
c) 6, 9, 15
d) 340, 560 y 720
e) 105, 140, y 700

13. **Un padre y dos hijos tiene ocupaciones tales que el primero no puede estar en casa más que cada 15 días, uno de los hijos cada 10 días, y el otro, cada 12. El día de Navidad están juntos los tres. Indica la primera fecha en que vuelvan a coincidir los tres en casa**

14. **Para medir exactamente el contenido de 3 recipientes de 30, 45 y 105 l de capacidad con un recipiente del mayor tamaño posible¿ Qué capacidad deberá tener la vasija que emplearemos?**

15. **Tres aviones salen de un mismo aeropuerto, uno cada 7 días, otro cada 12 y el tercero cada 18. Si hoy salen los tres juntos,¿ Cuándo volverán a hacerlo de nuevo por primera vez?**

16. **Resuelve los siguientes apartados:**

a) m.c.m (90, 15, 40)
b) m.c.m (12, 42, 90)
c) Descompón en factores primos el número 1260.

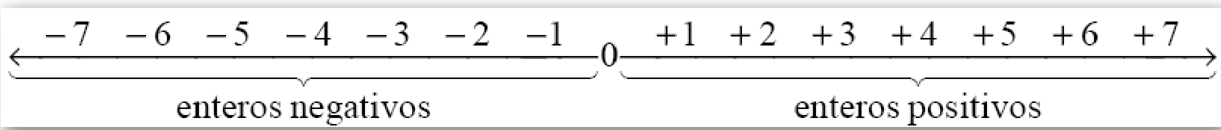
17. **Julia visita a su madre cada 14 días mientras que su hermano Luis la visita cada 21 días. ¿Cada cuanto tiempo se encontrarán ambos en casa de su madre?**

2. Números enteros

A todos estos números, los negativos, el cero y los positivos, se les llama **números enteros** y se representan por la letra **Z**:

$$Z = \{\ldots,-5,-4,-3,-2,-1,0,+1,+2,+3,+4,+5,\ldots\}$$

Estos números tienen un orden. El mayor de los números enteros es el que está situado más a la



derecha en la recta numérica:

Si a los números enteros +3 y -3 les quitamos su signo obtenemos el 3. A este valor se le llama **valor absoluto**.

18. **Expresa con números y con el signo correspondiente:**

a) Arquímedes nació en el año 287 antes de Cristo.
b) El año 620 antes de Cristo.
c) El año 1492 después de Cristo.
d) El año actual.
e) Siete grado sobre cero
f) Ocho grados bajo cero
g) Elena gano 30 euros
h) Antonio perdió 2 euros.

2.1. Suma y resta de números enteros

A.-Suma de dos números enteros del mismo signo

Para sumar dos números enteros del mismo signo se suman los valores absolutos y se pone el mismo signo de los sumandos.

(-60) + (-40) = -100 (+60) + (+40) = +100

19. **Calcula:**

a)	(+13) + (+8)	b)	(-13) + (-8)	c)	(+15) + (+20)
d)	(+18) + (+13)	e)	(-14) + (-20)	f)	(-30) + (-70)
g)	(-50) + (-70)	h)	(+80) + (+40)	i)	(-6) + (+12)

B-Suma de dos números enteros de distinto signo

Para sumar dos números enteros de distinto signo se restan sus valores absolutos y se pone el signo del sumando de mayor valor absoluto.

(+60) + (-40)= +20 (-60) + (+40) = -20

20. **Calcula:**

a)	(+12) + (-8)	b)	(-12) + (+8)	c)	(-30) +(+20)
d)	(+30) + (-20)	e)	(+50) + (-80)	f)	(-50) + (+80)
g)	(+3) + (-28)	h)	(-5) + (+7)	i)	(-2) + (+14)
j)	(-8) + (+7)	k)	(-9) + (-8)	l)	(-13) + (-15)

2.2. Multiplicación y división de números enteros

Para multiplicar o dividir dos números enteros, se multiplican o dividen sus valores absolutos. El signo del producto o cociente vendrá dado por las siguientes **reglas de los signos:**

+ · + = +	+ : + = +
- · - = +	- : - = +
+ · - = -	+ : - = -
- · + = -	- : + = -

21. **Calcula los siguientes productos**

a) (+5) · (+8)	b)(-5) · (-8)	c)(-5) · (+8)	d) (+5) · (-8)
e) (+9) · (-6)	f) (-9) · (-6)	g) (+9) · (+6)	h) (-9) · (+6)

22. **Calcula los cocientes:**

a) (-12) : (+6)	b) (+48) : (-6)	c) (+32) : (-4)	d) (-26) : (-13)
f) (-15) : (-15)	g) (+40) : (-8)	h) (-30) : (+5)	i) (-2) : (-1)
j) (-8) : (+2)	k) (-28) : (-7)		

2.3. Potencias de exponente natural. Raíces cuadradas

Una **potencia** es un producto de factores iguales. El número que se repite se llama **base** y el número de veces que se repite la base se llama **exponente**.

a) $(+5)^2 = (+5)\cdot(+5) = +25$ "5 elevado al cuadrado".

b) (- 4)3 = (- 4)× (- 4)× (- 4) = -64 "-4 elevado al cubo"

La **raíz cuadrada** exacta de un número es otro número que elevado al cuadrado es igual al número dado.

4 es el cuadrado de 2, $(+2)^2 = 4$, luego 2 es la raíz cuadrada de 4, $\sqrt{4} = +2$

25 es el cuadrado de 5, $(+5)^2 = 25$, luego 5 es la raíz cuadrada de 25, $\sqrt{25} = +5$

23. **Escribe en forma de potencia:**

a) 3 x 3 x 3 x 3 = b) 10 x 10 = c) 16 x 16 x 16 = d) m x m x m =

24. **Calcula:**

a) 5^2 ; 5^3

b) 2^2 ; 2^3 ; 2^4 ; 2^5

c) 3^2 ; 3^3 ; 3^4

25. **Halla los números cuyos cuadrados sean:**

a) ( )^2 = 9 b) ( )^2 = 64 c) ( )^2 =100 d) ( )^2= 81

e) ( )^2 = 49 f) ( )^2 = 121

26. **Calcula:**

$\sqrt{1}$ $\sqrt{4}$ $\sqrt{9}$

$\sqrt{16}$ $\sqrt{25}$ $\sqrt{36}$

$\sqrt{49}$ $\sqrt{64}$ $\sqrt{81}$

2.4. Operaciones combinadas

Si en nuestro cálculo aparecen operaciones variadas, primero hacemos las operaciones indicadas entre paréntesis, después las multiplicaciones y divisiones, y por último las sumas y las restas. Una potencia es una multiplicación.

27. **Calcula:**

a) 8 + 7 – (-9) + (-4) + (-8) b) 2 -12 -15 + 12 + 4 – 15 + 3 c)(-40) + (-12) + 8 -6

d) (-13) – (+6) + (5) – (-9) e) (+5) + (-3) + (-6) + (-8) f) (-7) + (-4) + (+9) + (12)

g) (-3) + (-4) + (-5) + (-6) h)(-7) + (+8) + (-3) + (-4)

28. **Realiza estas operaciones:**

a) (+12) - [- (+ 7) – (- 4) – (+ 8)] = b) (+ 16) - [(-8) - (-4)] - (-5) =

c) (+13) · [(+6) – (-5) + (+4) - (+ 2)] + (+1) =

29. **Calcula:**

a) (+3) - (+4) · [(+2) - (+5)] - [(+1) + (+6)] · (+3) =

b) (-5) · [(+2) - (-3) + (+5)] + (+8) · [(-9) + (- 3)] =

30. **Realiza las siguientes operaciones utilizando la jerarquía:**

a) (+ 4) - (-3) + (-7) =

b) (-5) - (+ 4) - (+3) =

c) 22 + 5 - 21 + 15 =

d) 4 · 3 – 18 : 6 =

e) 50 - [(5 - 1) - (4 - 3)] =

f) 5 · (- 5) + 5 - 4 · (- 8 + 2) =

g) 29 – 4 ·12 - (34 - 18) + 2 · (18 - 10)

h) 2 3 – 2 2 + 2 5 =

3. Los números racionales

Una **fracción o numero fraccionario** es un par de números naturales a y b en la forma: $\frac{a}{b}$ de los cuales b es el **denominador** y nos indica el número de partes iguales en que dividimos la unidad y a es el **numerador** y nos indica cuántas de estas partes cogemos.

Es decir, una fracción es una división que no se ha realizado. Ejemplo: $\frac{28}{14} = 28 : 14$

¡Ojo! No podemos dividir por cero, luego el número b no puede ser cero.

Si en lugar de aparecer números naturales, hubiera números enteros (recuerda, números que pueden ser negativos), diríamos que el número es **racional**.

$\frac{-28}{14} = (-28) : 14 = -2$ $\qquad$ $\frac{5}{-4} = 5 : (-4)$ $\qquad$ $-\frac{4}{3} = -(4 : 3)$

¿Sabrías identificar las fracciones en los ejemplos anteriores?

– Un tercio de las patatas “chips” es grasa. Solución $\frac{1}{3}$

– El tren con destino a Madrid trae un retraso de tres cuartos de hora. Solución $\frac{3}{4}$

– Uno de cada 100 nacidos en España es celiaco. Solución $\frac{1}{100}$

– 3.450 €, tienen que repartirse entre los 12 vecinos del inmueble. Solución $\frac{3450}{12}$

31. **Una persona adulta dedica $\frac{1}{3}$ del día a dormir. ¿Cuántas horas dedica a dormir diariamente?**

32. **En el presupuesto de una familia se dedica $\frac{2}{5}$ de los ingresos a la vivienda. Si los ingresos son 2.120 €, ¿cuánto se dedica a vivienda?**

3.1. Fracciones equivalentes

Si se reparten 6 € entre tres personas, ¿cuánto recibe cada una? ¿Y si se reparten 12€ entre seis personas? Puedes comprobar que en ambos casos el resultado es el mismo.

$\frac{6}{3} = \frac{12}{6} = 2$ €

Dos **fracciones son equivalentes** cuando escritas de distintas maneras tienen el mismo resultado.

Para comprobar que dos fracciones son equivalentes, basta con multiplicar en cruz y observar que el resultado obtenido es el mismo.

6.6 = 3.12

Para obtener fracciones equivalentes a una dada basta con multiplicar o dividir el numerador y el denominador por el mismo número.

Ejemplo: $\frac{5}{6} = \frac{5.2}{6.2} = \frac{10}{12}$

33. **Busca tres fracciones equivalentes a cada una de las siguientes. Ten en cuenta que hay muchas posibles soluciones.**

$\frac{3}{7}$ $\qquad$ $\frac{4}{9}$ $\qquad$ $\frac{2}{3}$

34. **Forma fracciones equivalentes a:**

$\frac{1}{5}, \frac{7}{9}, \frac{1}{100}, \frac{10}{15}, \frac{6}{7}$

35. **Dos personas salen de su casa con 9 €. Una se gasta en el cine $\frac{4}{6}$ y la otra $\frac{6}{9}$.**

a) ¿Quién se ha gastado más en el cine? **b)** Son equivalentes $\frac{4}{6}$ y $\frac{6}{9}$

36. **Comprueba si son las siguientes fracciones son equivalentes o no:**

a) $\frac{4}{9} y \frac{12}{25}$ b) $\frac{5}{10} y \frac{6}{12}$ c) $\frac{3}{81} y \frac{2}{1542}$

37. **Completa las siguientes fracciones para que sean equivalentes:**

a) $\frac{4}{12} = \frac{3}{?} = \frac{?}{6}$ b) $\frac{?}{3} = \frac{14}{21} = \frac{20}{?}$

38. **Vamos a ver qué sucede cuando la fracción tiene un signo negativo en el numerador o en el denominador.**

a) ¿Serán equivalentes las fracciones $\frac{-3}{5} y \frac{-6}{10}$? b) ¿Será $\frac{-3}{5}$ equivalente a $\frac{3}{-5}$?

3.2. Operaciones con fracciones

Suma y resta de fracciones

a.-Para sumar o restar fracciones con el mismo denominador, se suman o se restan los numeradores y se deja el denominador común:

$$\frac{3}{4} + \frac{7}{4} = \frac{10}{4} \qquad \frac{7}{4} - \frac{2}{4} = \frac{5}{4}$$

b.-Para sumar o restar fracciones con distintos denominadores se reducen éstas a denominador común, y se realiza la suma o la resta.

m.c.m. (4, 2) = 4

$$\frac{3}{4} + \frac{2}{2} = \frac{3}{4} + \frac{4}{4} = \frac{7}{4} \qquad \frac{2}{2} - \frac{3}{4} = \frac{4}{4} - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$$

39. **Realiza las siguientes operaciones:**

a) $\frac{1}{2} + \frac{3}{8}$ **b)** $\frac{5}{9} - \frac{7}{12}$ **c)** $\frac{3}{5} - \frac{11}{20}$

40. **Realiza las siguientes operaciones:**

a) $\frac{4}{5} + \frac{5}{6} - \frac{1}{10} =$ **b)** $\frac{2}{20} + \frac{4}{5} - \frac{3}{10}$ **c)** $\frac{7}{20} - \frac{13}{15} - \frac{3}{10}$

41. **Realiza las siguientes operaciones:**

a) $\frac{7}{60} + \frac{2}{50} - \frac{3}{15}$ **b)** $\frac{3}{4} + \frac{1}{2} - \frac{1}{6}$ **c)** $\frac{1}{5} - \frac{2}{3} + \frac{7}{8}$

42. **Realiza las siguientes operaciones:**

a) $\frac{-1}{3} + \frac{3}{4} - \frac{2}{6}$ **b)** $\frac{3}{4} - \frac{1}{5} - \frac{1}{12}$ **c)** $\frac{1}{3} - \frac{1}{9} - \frac{1}{5}$

Producto

Para multiplicar dos fracciones se halla una nueva fracción cuyo numerador es el producto de los numeradores y cuyo denominador es el producto de los denominadores.

$$\frac{7}{4}\cdot\frac{2}{3}=\frac{14}{12}$$

43. **Realiza las siguientes operaciones:**

a) $\frac{4}{5}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{10}=$ **b)** $\frac{2}{20}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{3}{10}=$ **c)** $\frac{7}{20}\cdot\frac{13}{15}\cdot\frac{3}{10}=$

44. **Realiza las siguientes operaciones simplificando el resultado:**

a) $\frac{7}{60}\cdot\frac{20}{50}\cdot\frac{30}{15}=$ **b)** $\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6}=$ **c)** $\frac{1}{5}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{7}{8}=$

45. **Realiza las siguientes operaciones:**

a) $\frac{-1}{3}+\frac{3}{4}-\frac{2}{6}$ **b)** $\frac{3}{4}-\frac{1}{5}-\frac{1}{12}$ **c)** $\frac{1}{3}-\frac{1}{9}-\frac{1}{5}$ **d)** $3\cdot\frac{4}{5}$

División

Para dividir dos fracciones se multiplica el dividendo por el inverso del divisor

La fracción inversa de la fracción $\frac{a}{b}$ es $\frac{b}{a}$

$$\frac{7}{4}:\frac{2}{3}=\frac{7}{4}\cdot\frac{3}{2}=\frac{21}{8}$$

46. **Realiza las siguientes divisiones:**

a) $\frac{3}{-5}\div\frac{7}{8}$ **b)** $1\div\frac{6}{7}$ **c)** $\frac{-1}{2}\div\frac{1}{-2}$

d) $\frac{3}{5}\div\left(\frac{1}{2}\div\frac{7}{8}\right)$ **e)** $\left(\frac{3}{5}\div\frac{1}{2}\right)\div\frac{7}{8}$

47. **La cifra del número de parados en Extremadura en el mes de abril fue de 79.483. Si durante el mes de mayo se ha incrementado 1,6%, ¿cuántos parados hay en Extremadura actualmente?**

48. **Realiza las siguientes operaciones utilizando la jerarquía:**

a) $\frac{4}{3}+\frac{2}{5}+\frac{1}{6}=$ b) $4+\frac{3}{4}-\frac{7}{12}=$ c) $\frac{2}{5}\cdot\frac{6}{9}=$

d) $\frac{4}{11}:\frac{5}{6}=$ e) $\frac{1}{4}+\frac{3}{4}\cdot\left(\frac{4}{5}+\frac{3}{2}\right)=$ f) $\frac{5}{7}-\frac{2}{5}:\frac{1}{4}=$

g) $4-\left(\frac{2}{9}-\frac{4}{3}\right)=$ h) $(-3)\cdot\frac{(-2)}{5}=$

49. **Un vehículo puede transportar 1.800 kg. Si lleva las tres quintas partes de dicho peso, ¿cuántos kg le falta para llenar el vehículo?**

50. **Si un amigo me debe una cantidad igual a los siete octavos de 96 € y me paga los tres cuartos de lo que me debe, ¿cuánto me debe aún?**

4. La medida. Sistemas de unidades

Aquellas propiedades que se pueden medir se denominan **magnitudes**.

Medir es **comparar un valor** de una magnitud en un objeto con otro valor de la misma magnitud que tomamos como referencia. En la imagen, donde aparece un termómetro digital, se compara cuantas veces es la temperatura de la habitación mayor que un grado centígrado: en este caso 13,4 veces.

El valor que se toma como referencia se denomina **unidad**. Es fundamental que todas las personas escojamos para medir la misma unidad Hasta el año 1791, después de la Revolución Francesa, no se propuso de forma oficial un sistema que unificara las unidades de medida. Esta propuesta se adoptó finalmente en la Conferencia General de Pesas y Medidas, de 1889. En el año 1960, y posteriormente en 1971, fue revisado, creándose el **Sistema Internacional de Unidades**.

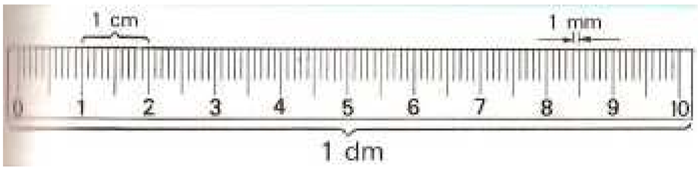
El Sistema Internacional de Unidades se compone de **siete unidades básicas o fundamentales** que se utilizan para medir sus correspondientes siete magnitudes físicas fundamentales. Estas son:

Magnitud física	Unidad	Abreviatura
Longitud	metro	m
Tiempo	segundo	s
Masa	kilogramo	kg
Intensidad de corriente eléctrica	amperio	A
Temperatura	kelvin	K
Cantidad de sustancia	mol	mol
Intensidad luminosa	candela	cd

El resto de las magnitudes pueden expresarse en función de esas siete: se denominan **magnitudes derivadas**.

Magnitud		Unidad
Superficie	longitud · longitud (m · m)	m^2 Metro cuadrado
Velocidad	longitud / tiempo (m/s)	m/s Metros por segundo
Volumen	longitude ·longitud · longitud (m·m·m)	m^3 Metro cúbico
Densidad	masa/volumen (Kg/m^3)	kg/m^3 Kilo por metro cúbico
Aceleración	velocidad/tiempo (m/s)/s	m/s^2 metro por segundo al cuadrado
Fuerza	masa · aceleración kg · (m/s^2)	kg.(m/s^2) Newton

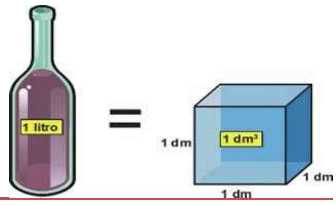
El **sistema métrico decimal** es un sistema de unidades basado en el metro, en el cual los múltiplos y submúltiplos de una unidad están relacionados entre sí, por múltiplos y submúltiplos de 10.



4.1. Medidas de longitud, masa y capacidad

En primer lugar, vamos a ver la longitud y la masa, que son, como ya sabes, magnitudes fundamentales, mientras que la capacidad es una magnitud derivada.

Medida	Unidad en el SI	Aparato de medida
Longitud	Metro	Cinta métrica
Masa	Kilogramo	Balanzas



4.2. Cambio de unidades

Kilómetro Hectómetro Decámetro Metro Decímetro Centímetro Milímetro

Cambio de unidades de masa:

Kilogramo Hectogramo Decagramo Gramo Decigramo Centigramo Miligramo

Cambio de unidades de capacidad:

Kilolitro Hectolitro Decalitro Litro Decilitro Centilitro Mililitro

51. **Transforma unas unidades en otras de orden inmediatamente inferior.**

a) ¿Cuántos hm hay en 7 km?
b) ¿Cuántos m hay en 5 dam?
c) ¿Cuántos cm hay en 43 dm?
d) ¿Qué tienes que hacer para transformar una unidad en otra inferiopr?

52. **Transforma unas unidades en otras de orden inmediatamente superior.**

a) ¿Cuántos km hay en 60hm?
b) ¿Cuántos dm hay en 75 cm?
c) ¿Qué tienes que hacer para transformar una unidad en la inmediata superior?

53. **Completa:**

a) 23,8 km =...dm
b) 4 dam = ... cm
c) 725 m = ... dm
d) 2,25 mam = ... dam
e) 4,35 km = ... hm
f) 6,34 hm = ... m

54. **Completa:**

a) 2,4 cm =...dm
b) 0,73m = ... dam
c) 64 hm = ...km
d) 235 mm = ... dm
e) 64 hm = ... km
f) 9.876 dm = ... km

55. **Une con flechas las cantidades de las dos columnas que sean iguales:**

a) 78 dm   0,78 dm
b) 7,8 km   7,8 m

c) 78 mam 780 dam
d) 7,8 dam 0,78 hm
e) 78 mm 780 km

56. **Entre las siguientes medidas, agrupas las que sean iguales:**
a) 0,1 hm **b)** 10 m **c)** 100 m **d)** 0,1 km **e)** 100 dm

57. **Expresa en km, m y cm las siguientes medidas:**
a) 0,035 dam **b)** 2,1 hm

58. **Calcula:**
a) Un ciclista recorre por la mañana 43,5 km y por la tarde 23 km 350m. ¿Qué distancia recorrió en total?
b) Para una falda necesitamos 2 m 20 cm de tela y para la camisa 1,90 m. ¿Cuánta tela tenemos que comprar?
c) Tenemos 8 m de cuerda y cortamos 3 m 22 cm. ¿Cuánta cuerda nos queda?

59. **Queremos vallar un terreno de 1 km, 7 hm, 86 dam y 325 m.**
a) ¿Cuántos metros de alambre necesitamos?
b) Si cada metro de alambre cuesta 0,85 €, ¿cuánto nos costará vallarlo?

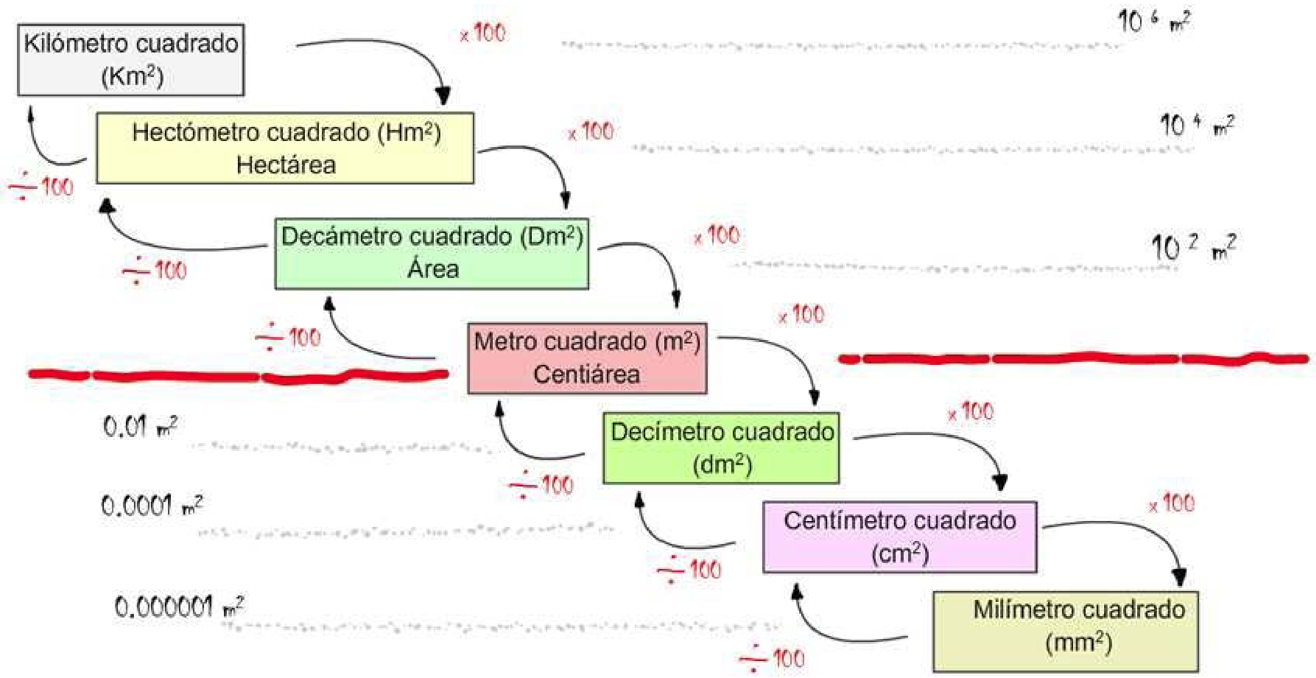
60. **Resuelve:**
a) Tenemos 27 m 40 cm de madera para hacer 8 estantes iguales. ¿Cuál será el tamaño de cada estante?
b) Tenemos que hacer un recorrido de 22 km 450 m y queremos dividirlo en 5 etapas iguales. ¿De cuánto ha de ser cada etapa?
c) En una pared de 8 m 20cm queremos poner una fila de azulejos de 20 cm cada uno. ¿Cuántos azulejos necesitamos?

61. **Un camión cisterna lleva gasoil en 4 tanques de 10 Kl, 8 Hl, 7 Dl, y 900 dl. ¿Cuántos litros transporta?**

62. **Victoria toma 50 mg de vitamina C al día. ¿Cuántos g de esta vitamina tomará en un mes?**

63. **Adrián recorre 1,5 Km para ir de su casa al colegio todos los días. ¿Cuántos m caminará en 5 días?**

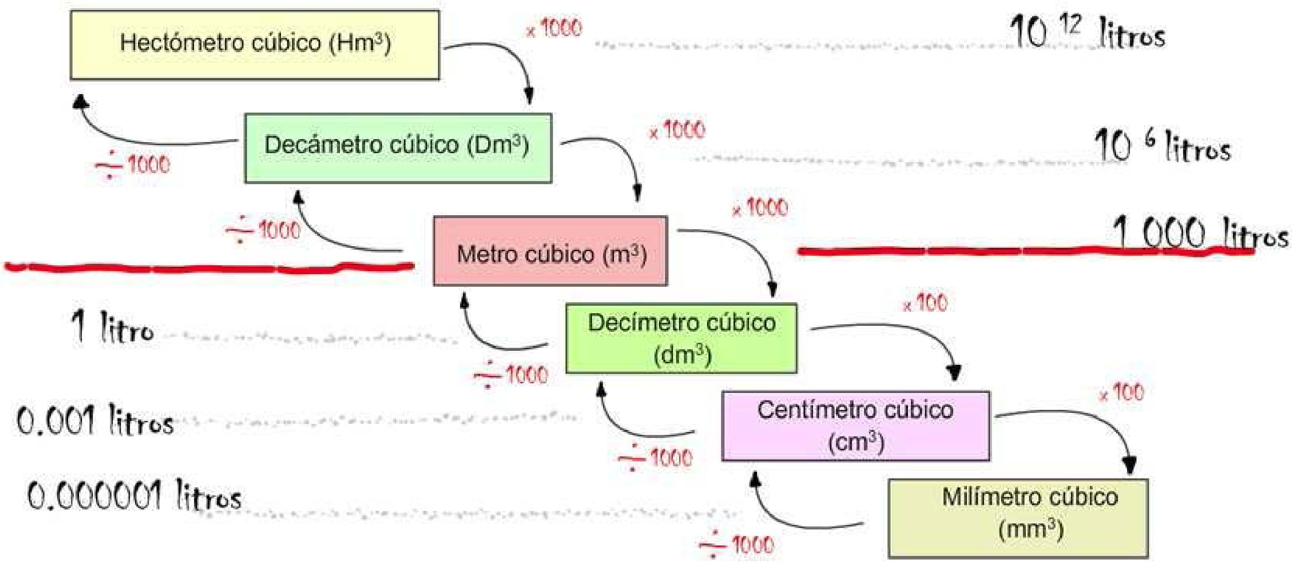
4.3. Medidas de superficie



Para transformar una unidad de superficie en la inmediata inferior hay que multiplicar por 100, y para transformarla en la inmediata superior hay que dividir por 100.

4.4. Medidas de volumen y capacidad

El volumen se expresa en unidades como el cm^3, dm^3, m^3



64. Completa:

1 km²= .... hm²	1 dam² = ... m²	1 dm² = ... cm²
1 hm² = ... dam²	1 m² = ... dm²	1 cm² = ... mm²
3m² = ... dm²	135 dm²= .... cm²	22 km² = ... hm²
4,5 hm² = ... m²	213 dm² = ... mm²	3,32 cm² = ... mm²

65. Expresa las siguientes unidades en m²,

a) 45 dm² **b)** 545 mm² **c)** 5,4 dm² **d)** 0,987 km²

66. Expresa 67, 1 dam² en:

a) m² **b)** km² **c)** cm² **d)** dm²

67. Une las cantidades que sean equivalentes:

17 m²	0,017 km²
1,7 dm²	170 cm²
0,17 dm²	1700 dm²
170 dam²	17 cm²

68. Expresar en m²:

a) 4,2 ha **b)** 23,45 a **c)** 7 ca

69. Calcula:

a) En 1994 se quemaron en España 432.252 ha de terreno. Exprésalo en m².

b) La superficie de España es de 504.759 km². Exprésalo en ha y en a.

70. Supongamos que tu salón mide 6 m de largo, 4 m de ancho y 3 m de alto.

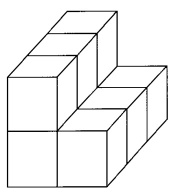
a) Calcula cuántos m² tienen las paredes.

b) Calcula cuántos m² tiene el techo.

c) Si queremos pintarlo con una pintura que indica en el bote 2 litros por m² ¿Cuántos litros de pintura necesitamos?

d9 ¿Qué volumen ocupa tu salón en m³?

71. Calcula:



a) ¿Cuántos m³ de agua caben en una piscina que mide 10 m de largo, 4 de ancho y 2 m de fondo?

b) Calcula cuántos m³ tiene el cuerpo de la figura si cada cubo que lo compone tiene 1 m de arista.

UNIDAD DIDÁCTICA 2

1. Magnitudes directa e inversamente proporcionales

Para saber cuánto cuestan 3 Kg de naranjas, multiplicamos el precio de 1 Kg por 3. Si hacemos un trabajo de clase entre dos compañeros, tardamos la mitad de tiempo que si lo hacemos solos. Es decir, en la vida diaria utilizamos continuamente las **proporciones numéricas**.

Decimos que dos **magnitudes son directamente proporcionales** cuando si aumenta una la otra aumenta proporcionalmente o si disminuye una, la otra lo hace de la misma manera. Por ejemplo los kilos de naranjas y su precio: si un kilo vale 2 euros, 3 kilos valdrán 6, 4 costarán 8 y así sucesivamente

Dos **magnitudes son inversamente proporcionales** si cuando una aumenta, la otra disminuye, y viceversa, aunque siempre en la misma proporción. Por ejemplo, si un albañil levanta una pared en 4 días, dos albañiles lo harán en 2 días: cuanto mayor sea el número de la primera, menor será el de la segunda.

1.1. Resolución de problemas mediante la regla de tres directa

Vas a resolver una cuestión en la que aparecen dos magnitudes directamente proporcionales. Sabiendo que un paquete de 12 litros de leche cuesta 10,20 € vamos a calcular cuánto costará un paquete de 15 litros.

a) Calcula cuánto cuesta un litro de leche.

b) Calcula cuánto costarán 15 litros de leche.

c) ¿Son proporcionales el número de litros de leche que hay en el paquete y el precio del mismo?

Para resolver la actividad anterior has hecho lo siguiente:

10,20 : 12 = 0,85 0,85 · 15 = 12,75 €

Observa que hubieras obtenido el mismo resultado si hubieras efectuado las operaciones en este orden:

10,20 · 15 = 15,30 15,30 : 12 = 12,75 €

En la práctica, este tipo de cuestiones se resuelven mediante **una regla de tres**.

La regla de tres directa es un mecanismo de cálculo, que permite resolver con más rapidez los problemas en los que aparecen dos magnitudes directamente proporcionales. Consiste en lo siguiente:

X = precio de los 15 l de leche

Llamamos X a la cantidad que se quiere calcular, en este caso el precio de 15 l de leche

LITROS PRECIO

12 ----------------10,20

15 ------------------ X

Se colocan los datos de forma que coincidan los de la misma magnitud, uno debajo del otro.

$$x = \frac{15 \cdot 10{,}20}{12} = 12{,}75$$

Se multiplican los dos números contiguos a la X (10,20 ·15) y se divide el resultado por el número que está en diagonal con la X

OJO: Antes de realizar la regla de tres tienes que comprobar que las magnitudes que aparecen sean directamente proporcionales.

La regla de tres se puede utilizar para resolver problemas de velocidad, espacio recorrido y tiempo empleado. Recuerda que la velocidad media de un móvil es el espacio que recorre en la mitad de tiempo.

1. **Un coche recorre 60 km en 3/4 de hora. ¿Cuál es su velocidad media?**
2. **Un tren lleva una velocidad media de 90 km/h. ¿Cuánto tiempo tardará en recorrer una distancia de 315 km?**

También se utiliza la regla de tres para realizar cambios de unas unidades a otras.

3. **Una persona comprueba que una distancia de 120 km equivale a 75 millas inglesas.**
   a) ¿Cuál será la distancia en millas entre dos ciudades que distan entre sí 320 km?
   b) Si la distancia entre pueblos es de 34 millas, ¿cuántos km serán?

Observa también cómo la regla de tres se puede utilizar para resolver muchas cuestiones de la vida diaria.

4. **Al cambiar dinero en un banco, por 1 dólar nos cobran 0,90 €. ¿Cuántos dólares nos darán por 18.000 euros?**
5. . **Una persona trabaja cinco horas diarias y cobra cada día 48,75 €. Un día trabaja solamente tres horas. ¿Cuánto cobrará?**
6. **Los ingredientes de una receta para hacer un bizcocho son: 6 huevos, 200 g de azúcar, 150 g de harina y 120 g de mantequilla. Queremos hacer un bizcocho y sólo tenemos 4 huevos. ¿Qué cantidad de harina, azúcar y mantequilla tendremos que poner?**
7. **Para hacer cortinas para una ventana de 80 cm de ancho, he necesitado 1 m 20 cm de tela. ¿Qué cantidad de tela necesitaré para hacer cortinas para una ventana de 1,50 m?**

1.2. Porcentajes

Otra de las aplicaciones de la proporcionalidad directa son los porcentajes. En tu vida diaria oyes continuamente hablar de tantos por ciento: la subida salarial será de un 2%, las rebajas son de un 20%, el IPC. ha subido este mes un 0,8%, el partido A ha obtenido un 3% más de votos que el partido B...

¿Qué significan estos %? Si te dicen que la subida salarial es de un 2% (que se lee "2 por ciento"), significa que por cada 100 € que cobres tu sueldo aumentará 2 €.

Verás que los problemas de porcentajes son un caso particular de los problemas de proporcionalidad directa y por tanto se pueden resolver aplicando la regla de tres.

8. Las rebajas en unos almacenes son del 15%. Vamos a comprar unos pantalones de 58,80 €.

a) ¿Qué descuento nos harán?
b) ¿Cuánto tendremos que pagar por los pantalones?

9. En una librería hacen un descuento del 10%. En otra hay una cartel que dice "Por cada 1,10 € de compra, le cobraremos solamente 1 €." ¿En cuál de las dos librerías es mejor el descuento? Razona la respuesta.

10. Al comprar un frigorífico de 1.000 € nos hacen un descuento del 5%, pero por llevarlo a casa tenemos que pagar un recargo del 5%. ¿Cuánto tendremos que pagar por el frigorífico?

11. El presupuesto por la pintura de una casa es de 2.350 € más el 16% del IVA. ¿Cuánto nos costará pintar la casa?

En las actividades anteriores, has visto cómo calcular un determinado tanto por ciento de una cantidad. Hay veces que el problema es distinto. Por ejemplo, en unas elecciones sabemos el número de personas que ha votado a cada partido y queremos calcular cuál es el porcentaje de votos de cada uno de ellos. Es decir, queremos saber de cada 100 personas cuántas han votado a cada partido.

12. En un pueblo que tiene 8.520 personas en el censo electoral han votado 7.220 en unas elecciones y el resto se han abstenido.

Calcula el porcentaje de participación, es decir, de cada 100 personas cuántas han votado.

13. En una librería, por un libro de 14,50 € nos cobran 12,76 €.

a) ¿Cuántos euros nos han rebajado?
b) ¿Qué tanto por ciento de descuento nos han hecho?

14. La población activa en España en 1996 era de 16.039.000 personas de las cuales trabajaban 12.524.000. Calcula el porcentaje de paro.

A veces el problema es el contrario. Sabemos el precio final de un producto después de haberle aplicado un determinado tanto por ciento de descuento o de recargo y queremos saber su precio antes de dicho descuento o recargo.

15. En unos almacenes hacen el 15% de descuento. Por un abrigo nos han cobrado 212,50 € y queremos calcular su precio antes del descuento.

a) Si por cada euro que cuesta el abrigo te descuentan 0,15 €, ¿cuántos euros tienes que pagar por cada 1?
b) ¿A qué cantidad tendrás que llamar X en esta regla de tres?
c) Plantea la regla de tres, sabiendo que por cada euro tienes que pagar 0,85 €.
d) Resuelve la regla de tres y comprueba si el resultado obtenido es correcto.
e) ¿Hubieras obtenido el mismo resultado si a 212,50 € le hubieras sumado el 15%?

16. Por hacer una obra en casa nos cobran el 16% de IVA. Hemos tenido que pagar 9.512 €.

a) Por cada euro que cuesta la obra, ¿cuánto tenemos que pagar en realidad?
b) ¿Cuánto costaba la obra sin el IVA?

17. **En los cines también se paga un 16% de IVA. Por una entrada pagamos 5,50 €. Calcula qué parte corresponde a la entrada y qué parte al IVA.**

18. **Queremos conseguir una disolución de alcohol en agua al 22% de concentración, es decir, que por cada 100 cl de disolución, 22 cl sean de alcohol. Tenemos 110 cl de alcohol y queremos calcular en cuántos cl de agua lo tendremos que disolver.**
a) ¿Qué cantidad de agua tenemos que utilizar para disolver 22 cl de alcohol?
b) ¿Qué cantidad de agua necesitaremos para disolver los 110 cl de alcohol?

19. **Pon cinco ejemplos de tu vida diaria en los que aparezcan los porcentajes.**

1.3. Repartos directamente proporcionales

Otra aplicación de la proporcionalidad directa es en los repartos proporcionales. Por ejemplo, si al realizar un trabajo entre dos personas una de ellas trabaja más horas que la otra es lógico que cobre más. Si dos personas compran un décimo de lotería pero no lo pagan a partes iguales, es lógico que el premio tampoco lo repartan a partes iguales.

20. **Entre dos pintores pintan una casa tardando en ello siete días. Los tres primeros días trabajan los dos juntos, pero los otros cuatro días sólo trabaja uno de ellos. Si cobran 2.250 €, vamos a calcular cómo las tienen que repartir.**

Vamos a ver cómo se puede resolver la cuestión anterior planteando una regla de tres.

Sabemos que los pintores han trabajado en total (3 x 2) + 4 = 10 días, cobrando por ello *2.250* €

.Vamos a llamar X a lo que va a cobrar el pintor que trabajó *7* días:

DÍAS PRECIO

10 ---------------------- 2250

7 -------------------------- X

$$x = \frac{7 \cdot 2250}{10} = 1575$$

Por tanto un pintor cobrará *1.575* € y el otro el resto, esto es, *675 €.*

21. **Entre tres amigos compran un décimo para el sorteo de Navidad. Pedro paga 5 €, Teresa 10 € y Ana 5 €. Si cobran un premio de 1.800 €, ¿cómo lo tendrán que repartir?**

22. **Entre cuatro amigos se compran una plaza de garaje. Alberto aporta 3.200 €, Beatriz 8.000 €, Carlos 10.000 €. y David 5.300 €. Al cabo de un año la venden por 31.800 €. ¿Cómo tendrán que repartir el dinero?**

1.4. Regla de tres inversa

Has visto cómo resolver cuestiones en las que aparecen magnitudes directamente proporcionales mediante la regla de tres directa. Vamos a ver ahora cómo resolver cuestiones en las que aparecen magnitudes inversamente proporcionales.

23. **Un tren cuya velocidad media es de 80 km/h, tarda 5 horas en llegar a su destino. Queremos calcular cuánto tiempo tardará en hacer el mismo recorrido un tren cuya velocidad media es de 100 km/h.**
a) Si sabes que el primer tren recorre 80 km en una hora, ¿qué distancia recorrerá en 5 horas?

b) Si ya sabes cuál es la distancia que tienen que recorrer ambos trenes, ¿cómo puedes calcular el tiempo que tardará el segundo tren?

Los pasos que has seguido para resolver esta cuestión han sido los siguientes:

- Primero has calculado la distancia recorrida por el primer tren. Para ello has tenido que multiplicar:
  - 80 km recorre en una hora - 5 horas = 400 km recorre en total.
- Luego has calculado el tiempo que tardará el segundo tren en recorrer estos 400 km. Para ello has tenido que dividir:
  - 400 km tiene que recorrer: 100 km recorre en una hora = 4 horas.

En la práctica se suele realizar de la siguiente forma:

X = tiempo que tardará el segundo tren

Llamamos X a la cantidad que se quiere calcular, en este caso el tiempo que tardará el segundo tren.

VELOCIDAD		TIEMPO
80 km/h	-------------------	5 horas
100 km/h	-------------------	X

Se colocan los datos de forma que coincidan los de la misma magnitud uno debajo del otro.

$$x = \frac{80 \cdot 5}{100} = 4$$

Se multiplican los dos números que están en línea entre sí (80 · 5), y se divide el resultado por el número que está en línea con la X (en este caso el 100).

A esta forma de resolver las cuestiones sobre magnitudes inversamente proporcionales, se le llama regla de tres inversa.

No olvides que... ***Antes de aplicar la regla de tres directa o inversa es fundamental que compruebes si las magnitudes son directa o inversamente proporcionales.***

24. **Con un tonel de vino se pueden llenar 200 botellas de $\frac{3}{4}$ de litro. ¿Cuántas botellas de 2 litro se podrán llenar?**

25. **Dos pintores se comprometen a pintar un edificio en 15 días de trabajo. El dueño quiere que el edificio esté pintado en 5 días. ¿A cuántos pintores tendrá que contratar?**

26. **Entre 8 personas se comprometen a realizar un trabajo, cobrando 800 € cada una. Como piensan que no les va a dar tiempo, deciden realizar dicho trabajo con dos personas más. ¿Cuánto cobrará al final cada una?**

2. Lenguaje algebraico

Cuando combinamos en una expresión un conjunto de números y letras relacionadas por las operaciones aritméticas suma, resta, multiplicación y división, decimos que tenemos una **expresión algebraica**. A las letras de las expresiones algebraicas se les llama **variables**.

Si una información es expresada mediante expresiones algebraicas estamos utilizando un **lenguaje algebraico**. Ejemplos:

La velocidad del coche es el espacio dividido entre el tiempo: v =$\frac{e}{t}$

El precio final se calcula sumando el 7 % del IVA. Si el precio es x, con el IVA será: $x + \frac{7}{100}x$

El área de un triángulo es la medida de la base por la medida de la altura dividida entre dos:

$$a = \frac{bxh}{2}$$

Al número que se obtiene al sustituir las letras por números y hacer las operaciones correspondientes se le llama **valor numérico** de una expresión algebraica.

¿Cuál sería la velocidad de un coche que ha recorrido 200 kilómetros en un tiempo de 2 horas?

Si la velocidad es el espacio entre el tiempo tendríamos:

v =$\frac{e}{t} = \frac{200}{2}$= 100 Km/h

Si en una expresión algebraica solamente aparece la operación de multiplicar entre las variables decimos que tenemos un **monomio.** Recuerda que una potencia es una multiplicación.

A la parte numérica del monomio se llama **coeficiente**, y a las **variables** parte literal. La suma de los exponentes de las variables indica el **grado** del monomio.

Un coche lleva doble velocidad que un autocar, un avión lleva la velocidad del autocar al cuadrado y un tren lleva la tercera parte de la velocidad del avión.

Llamamos **v** a la velocidad del autocar, la velocidad del coche será**2× v**, la velocidad del avión será **1**$\mathbf{v}^2$y la del tren $\mathbf{v^2}$. Estas expresiones son monomios.

Vehículo	Monomio	Coeficiente	Parte literal	Grado
Autocar	v	1	v	1
Coche	2.v	2	v	1
Avión	v^2	1	v^2 = v.v	2
Tren	$\frac{1}{3}v^2$	$\frac{1}{3}$	v^2	2

Aquellos monomios que tienen la misma parte literal se dicen que son **semejantes.** La velocidad del autocar y la velocidad del coche son monomios semejantes. La velocidad del avión y la del tren también son semejantes. En cambio, la velocidad del autocar y la velocidad del avión no son monomios semejantes.

27. **Expresa, utilizando números y letras, los siguientes enunciados:**

a) El valor de x kg de naranjas a 1,50 € el kilogramo.

b) El valor de y kg de manzanas a 1,20 € el kilogramo.

c) El valor de x kg de naranjas y de los y kg de manzanas de a) y b).
d) El cuadrado de un número e s igual a 225.
e) El cubo de un número es igual a 27.
f) La mitad de un número más la quinta parte de ese número.
g) El cuadrado de un número más el cubo de ese número.
h) El triple de x más el cuadrado de y más 5.
i) La mitad de la edad de Luis.
j) La mitad de la edad de Luis es 16 años.
k) La suma del cuadrado de un número y 30 es 46.
l) La suma de un número par y 14 es 58.
m) Un número impar más 23 es igual a 50.
n) La suma de tres números consecutivos es 114.
ñ) El número de patas de n conejos.

28. **Escribe en lenguaje numérico o algebraico las siguientes frases del lenguaje usual :**

a. El doble de 6.
b. El doble de cualquier número.
c. El cuadrado de 5.
d. El cuadrado de cualquier número.
e. La mitad de 20, más 7.
f. La mitad de un número cualquiera más 7.
g. El triple de la diferencia de dos números cualquiera.
h. La diferencia del cuadrado de dos números.
i. El cuadrado de la diferencia de dos números.
j. La suma del número 8 más su consecutivo.
k. La suma de un número más su consecutivo.

29. **Indica cuál es el coeficiente y cuál la parte literal de estos monomios:**

$a)\ 5x^2y^3$ b) $\frac{3}{4}abc$ c) x^3y^2

2.1. Valor numérico de una expresión algebraica

El valor numérico de una expresión algebraica es el número que se obtiene al sustituir las letras por números.

$$\frac{3a^2+6b+c}{b} \quad \text{para } a=4,\ b=7,\ c=8 \quad \text{solución} = (14)$$

$$\frac{3a-2b^2}{3ab} \quad para \quad a=-2 \quad b=3 \quad solución\ \frac{4}{3}$$

30. **Si el precio de 1 Kg de patatas es x € y el de una docena de huevos es de y € escribe en forma de expresión algebraica:**

a) El precio de 3 Kg de patatas
b) El precio de 5 Kg de patatas y de 2 docenas de huevos
c) ¿Cuál es el valor numérico de la expresión algebraica del apartado b) si x (precio de 1 Kg de patatas) vale 1,25 € e y (precio de la docena de huevos) vale 1,4 €?.

2.2. Suma y resta de monomios y polinomios

► Suma y resta de monomios

Supongamos que tenemos una superficie que está formada por dos cuadrados. El área de uno de los cuadros es $2x^2$y el del otro es $4x^2$. ¿Cuál es la suma de sus áreas? ¿Y su diferencia?

Su suma es:

$2x^2 + 4x^2 = 6x^2$y su diferencia es: $4x^2 - 2x^2 = 2x^2$

Para poder sumar o restar monomios estos han de ser semejantes. El resultado es otro monomio que tiene por coeficiente la **suma o la resta de los coeficientes** y por parte literal la misma que tienen los monomios de partida.

31. **Calcula estas sumas de monomios semejantes:**

a) $5x^3 + 8x^3 - 2x^3$

b) $3x + 2x + 5x$

Cuando la expresión algebraica que nos queda está formada por la suma o resta de monomios no semejantes decimos que tenemos un **polinomio**.

Suma y resta de polinomios

La suma o resta de dos polinomios es otro polinomio cuyos monomios se obtienen sumando o restando los monomios semejantes de los polinomios dados. Ejemplos:

$(3x^2 + 4xy)+ (2x^2 -xy)= 3x^2 + 4xy + 2x^2 - x y = 5x^2 + 3xy$

$(3x^2 + 4xy)-(2x^2 - xy) = 3x^2 + 4xy - 2x^2 + xy = x^2 + 5xy$

32. **Realiza estas operaciones con monomios:**

a) $x^2 + 2x^2$

b) $3x^3 - 5x^3$

c) $6x -10x$

d) $9x^2 +3x^2 -12x^2$

e) $5x -9x$

f) $8x^2 +6x^2 - 2x^2$

g) $9x + 3x - 5x$

h) $8x^2 - 10 x^2$

i) $60x -20 x$

j) $60x^2 + 40x^2 - 10x^2$

k) $-12x^2 - 9x^2 + 3x^2$

l) $-6x + 9x - 8x$

m) $-10x^2 + 13x^2 + 5x^2$

n) $6x - 12x + 15x$

ñ) $6y^2 - 14y^2 + 4y^2$

o) $7x^3 - 2x^3 + 5x^3$

33. **Calcula el resultado en cada caso:**

a) (7x2 + 5x - 1) + (2x2 - x - 3) =

b) (3x - 1) - (3x + 2) =

c) (7x2 + 5x - 1) - (2x 2 - x - 3) =

d) (3x2 + x + 1) - (3x + 2) =

2.3. Producto de monomios y polinomios

Producto de un monomio por un monomio

Supongamos que queremos calcular el área de una superficie rectangular cuyas medidas vienen dadas de forma general, ancho $3x^2$ y largo $2x^2y$.

El área será el producto de ambas medidas:

$A = (3x^2)\cdot(2x^2y)=(2\cdot3)(x^2\cdot x)(y) = 6\cdot x^{2+1}\cdot y = 6x^3y$

Multiplicamos los coeficientes y sumamos los exponentes de la variables:

$(4\,a\,x^4y^3) \cdot (x^2y) \cdot (3\,a\,b\,y) = (4 \cdot 1 \cdot 3) \cdot (a \cdot a) \cdot (x^4 \cdot x^2) \cdot (y^3 \cdot y \cdot y^3) \cdot (b^2) = 12\,a^2x^6y^7b$

Producto de un polinomio por un monomio

Para realizar esta operación tenemos que multiplicar el monomio por cada término o monomio que forman el polinomio.

$(3x^2)(2x^2y - 4y) = (3x^2)(2x^2y) + (3x^2)(-4y) = 6x^4y - 12x^2y$

▶ Producto de un polinomio por un polinomio

Ahora tendremos que multiplicar cada monomio del primer polinomio por todos y cada uno de los monomios del segundo polinomio, y luego sumar o restar los monomios semejantes.

$(3x^2 + 2y) \cdot (2x^2y - 4y) = (3x^2)(2x^2y - 4y) + (2y)(2x^2y - 4y) =$

$(3x^2)(2x^2y) + (3x^2)(-4y) + (2y)(2x^2y) + (2y)(-4y) = 6x^4y - 12x^2y + 4x^2y^2 - 8y^2$

▶ División de monomios

Para dividir monomios se dividen los coeficientes y se restan los exponentes de las letras.

$\mathbf{25x^7 : 5x^2 = 5x^5}$

34. Efectúa estas divisiones de monomios e indica el grado del cociente.

a) $(12x^7) : (2x^4) =$ b) $(21y^5) : (7y^4) =$
c) $(3a^4) : (2a^2) =$ d) $(15x^2) : (3x^2) =$

2.4. Potencias de polinomios: Identidades notables

Para calcular $(x + y)^2$

Tendremos que multiplicar: (x + y)(x + y). = x2 +2xy + y2

Hay tres **productos** que se denominan **identidades o igualdades notables**:

- ✓ Cuadrado de la suma: $(x + y)^2 = (x + y)(x + y) = x^2 + 2xy + y^2$
- ✓ Cuadrado de la diferencia: $(x - y)^2 = (x - y)(x - y) = x^2 - 2xy + y^2$
- ✓ Producto de una suma por una diferencia: (x + y)\x -y) = $x^2 - y^2$

35. Realiza estas operaciones:

a) $2X^2 \cdot 3x^4$
b) $2x^5 : x^2$
c) $4x^6 \cdot (-2x)$
d) $(-9x)(x^2)(-5x^5)$
e) $(2x)(3xy)(2x^2)$
f) $(3x)(-9y)(3x^2)$
g) $(x^2)(-2x)(3x)$
h) $8x^4 : 2x^2$
i) $10x^5 : 2x^2$
j) $60x^4 : 4x^2$
k) $(-12x^2)(-9x^2)(3xy)$
l) $(-6x)(9x)(-8x)$
m) $(-10x^3)(3x^2)(-5x^2)$
n) $(2xy)(2x)(5y^2)$
ñ) $15x^6 : 3x^3$
o) $(3y^2)(9y^2)(12y^2)$

36. Efectúa estas operaciones:

a) $(5x^2) \cdot (3x + 8x) + (6x) \cdot (-8x^2 + 5x^2) =$
b) $(8y^2) \cdot (5y) - 20y^3 =$
c) $(12x^7) : (2x^4) =$
d) $(21y^5) : (7y^4) =$
e) $(3a^4) : (2a^2) =$
f) $(15x^2) : (3x^2) =$

37. Ordena y reduce estos polinomios:

a) $5x^3 + 6x^2 - 4x^3 - 12x^4 - 6x + 9x - 3x^4 + 9 - 5 =$

b) $8x^2 - 5x^3 + 4x - 6x^2 + 2x - 5 =$

38. **Calcula estas sumas de polinomios:**

a) $(2x^3 - 5x^2 + 2x - 3) + (7x^3 - 5x^2 - 2x + 8) =$

b) $(4x^3 - 6x^2 + 8x - 2) + (-2x^3 - 8x^2 - 4x - 21) =$

39. **¿Cuál sería el opuesto de este polinomio?**

$6x^2 - 2x^2 - 9x + 1$

40. **Calcula:**

a) $(5y^3 - 6y^2 + 2y - 3) - (8y^3 - 10y^2 - 10y - 4)$

b) $(12a^3 + 15a^2 - 4a - 3) - (-5a^3 - 9a^2 - 4a - 18) =$

c) $(21x^2 + 32x - 9) + (21x^2 - 41x^3 - 36x) - (16x^3 + 12 - 17x^2) =$

41. **Calcula:**

a) $(-3x^2) \cdot (2x^2 + 5x - 6)$

b) $(4y^2 + 9y^2 - 12y - 34) \cdot (4y^3) =$

c) $(16t + 12t^2 - 54t^3 + 9) \cdot (8t) =$

d) $(4x^3 - 12x^2 - 5x) \cdot (1/2x^3) =$

e) $(2x^2 - 3x - 5) \cdot (5x - 9)$

f) $(5y^3 + 7y^2 + 15y - 9) \cdot (6y - 12) =$

42. **¿Cuál es el resultado de la operación $(2x - 3y) (3x + 4y)$?**

43. **¿Cuál es el valor numérico de la expresión algebraica $2ab^{2c} + 3ab^2 - abc^2$ si $a = 1$, $b = -3$, $c = 4$?**

44. **Si nos dicen que el área de un cuadrado es $25x^2 + 70x + 49$, ¿sabrías calcular cuánto mide el lado?**

45. **Realiza las siguientes operaciones con polinomios:**

a. $(7x^3yz^2) \cdot (3x^4y^3zt^2) =$

b. $(5x^2y + 3xy^2) + 2(3x^3 - 2x^2y + xy^2 - 4y^3) =$

c. $3(5x^2y + 3xy^2) - 4(3x^3 - 2x^2y + xy^2 - 4y^3) =$

d. $(3x + y)(2x - 2y + 4) =$

e. $(4xy^2)^2 =$

f. $(3x - 5)^2 =$

46. **Un cuadrado tiene de lado 2x. Si le añadimos una pequeña cantidad y, ¿cuánto mide el lado ahora? Calcula el área de dicho cuadrado.**

47. **Calcular:**

a) $(x + 2)^2$

b) $(x + 3)^2$

c) $(x + 1)(x - 1)$

d) $(x^2 + 5)(x^2 - 5)$

3. Ecuaciones de primer grado con una variable

Cuando dos expresiones, numéricas o algebraicas, están unidas por el signo igual forman una **igualdad.**

Las **igualdades numéricas** pueden ser ciertas o falsas. Por ejemplo: 4 + 1= 6 - 1.

Es una igualdad porque hay dos expresiones numéricas unidas por el signo de igual. Es cierta porque el resultado de la operación es 5 en ambos lados de la igualdad.

En cambio, si la igualdad fuera 4 + 1 = 6 - 2, esta sería falsa.

3.1. Identidades y ecuaciones

Vamos a considerar el siguiente ejemplo: “Si sumo a mi edad mi edad, obtengo el doble de mi edad.” Si mi edad es **x** y le sumo mi edad que es **x**, obtengo el doble de mi edad que es **2x.** En forma de igualdad, sería: **x + x = 2x**

Si sustituimos la variable x por cualquier valor numérico comprobaremos que la igualdad es siempre cierta.

Valor de x	x + x	=	2x	resultado
10	10 + 10	=	2.10 =	20
15	15 + 15	=	2.15 =	30
20	20 + 20	=	2.20 =	40
25	25 + 25	=	2.25 =	50
50	50 + 50	=	2.50 =	100

Esta igualdad algebraica es una identidad.

Veamos otro ejemplo: “Si sumo a mi edad 15 años, obtengo el doble de mi edad.” En forma de igualdad sería: x + 15 = 2x. Si sustituimos la variable x por cualquier valor numérico, comprobaremos que sólo será cierta para uno de ellos.

Valor de x	x + 15	=	2.x	resultado
10	10 + 15 = 25	≠	2.10 =	20
15	15 + 15 = 30	=	2.15 =	30
20	20 + 15 = 35	≠	2.20 =	40
25	25 + 15 = 40	≠	2.25 =	50
50	50 + 15 = 65	≠	2.50 =	100

La relación sólo se cumple cuando mi edad es de 15 años. La igualdad algebraica es una **ecuación**. A la variable de la ecuación, que en este caso es x, se le llama **incógnita**.

Decimos que las ecuaciones son de **primer grado o lineales** cuando el exponente de las incógnitas es uno.

En una ecuación, la parte de la izquierda se llama primer miembro y la parte de la derecha segundo miembro. Cada miembro de una ecuación está formado por términos:

x +	15	=	2x
término	término		término
1 ºmiembro			2 º miembro

Las **soluciones** de la ecuación son los valores que hacen que la igualdad sea cierta. Las ecuaciones que tienen la misma solución se dice que son **equivalentes.** Ejemplo:

La solución de las siguientes ecuaciones es x = 2. Para comprobar basta con sustituir este valor en la incógnita de la ecuación:

$$2x - 1 = 3$$

$$x + 5 = 7$$

Sustituyendo, queda:

$2 \cdot 2 - 1 = 4 - 1 = 3$

$2 + 5 = 7$

3.2. Reglas para resolver ecuaciones de primer grado

Regla de la suma

Si a los dos miembros de una ecuación le sumamos o restamos una misma expresión, numérica o algebraica, obtenemos otra ecuación equivalente a la que teníamos.

$2x - 1 = 3$

Sumamos la cantidad +1 en los dos miembros: $2x - 1 + 1 = 3 + 1$,

La ecuación que resulta es **$2x = 4$**, La solución de esta ecuación sigue siendo 2.

Las ecuaciones **$2x - 1 = 3$** y **$2x = 4$** y **$x = 2$** son equivalentes.

Regla del producto

Si multiplicamos o dividimos los dos miembros de una ecuación por un mismo número distinto de cero, se obtiene otra ecuación equivalente a la que teníamos.

$2x = 4$

Dividimos los dos miembros de la ecuación entre 2:

$$\frac{2x}{2} = \frac{4}{2}$$

Simplificando, queda: $x = \frac{4}{2}$ Luego $x = 2$,

Aplicando estas dos reglas, se van obteniendo ecuaciones cada vez más sencillas hasta llegar a una que tiene la forma general **a • x** = **b** , donde **a** y **b** son cualquier número y **x** la incógnita.

3.3. Resolución de ecuaciones de primer grado

Para resolver una ecuación hay que ir transformándola en otra más sencilla que sea equivalente. Usaremos las dos reglas anteriores. Ejemplo:

$4x + x = 7 + 2x + 8$

Agrupamos en cada miembro los términos semejantes: $5x = 2x + 15$

Utilizando la regla de la suma dejamos en un miembro las incógnitas y los números en el otro. En este caso restamos 2x en los dos miembros de la ecuación:

$5x - 2x = 2x - 2x + 15$

como $2x - 2x = 0$ podíamos haber escrito directamente $5x - 2x = 15$

A esto se llama transponer términos en una ecuación. Queda $3x = 15$

3- Para calcular cuánto vale x, dividimos los dos miembros de la ecuación entre 3:

Nos queda que $x = 5$, que es la solución de la ecuación.

48. **Resuelve**

a) x – 15 = 2
b) x + 8 = 12
c) 7x = - 63
d) 9x = 90
e) 15x = 60
f) 7x = 49
g) x -12= 26
h) x + 15 =48
i) 2x – 13 = 11
j) -3x = 9

49. **Resuelve estas ecuaciones, pasando todos los términos con x a un miembro de la ecuación y los números a otros:**

a) 3x = 4 + 2x
b) 11x = 10x –6
c) 9x = 8x –13

50. **Resuelve:**

a) 2x + 2 = x + 5
b) x - 5 = 3x - 25
c) x - 17 = 28 – 2x
d) 15x + 4 = 7x + 20
e) 3x - 2 = 4x – 7
f) 21 – 6x = 27 – 8x
g) 6x -3 = 2x + 1
h)10 + 2x = 7x - 15
i) -3x + 2 = x + 10
j) 2x - 7 = 3x – 8
k) 2x + 2 = x + 2
l) 5x + 6 = 10x + 5
m) 9x -11= -10 + 12x
n) 11x + 5x - 1= 65x – 36
ñ) 5x + 6x -81 = 7x + 102+ 65 x
o) 8x -4 +3x = 6x + 2x + 14
p) 16 + 7x – 5 + x = 11x - 3 – x

51. **Resuelve**

a) -2x + 6 = -4
b) -3x – 2 = 4
c) -5x + 20 = 10
d) -4x + 30 = 18
e) 3x – 6 = 0
f) 4x – 20 = 0
g) 5x – 15 = 0
h) 8x – 40 = 0

52. **Resuelve**

a) 3x – 2 = 4x -7
b) 6x – 3 = 2x +1
c) 10 +2x = 7x -15
d) -3x + 2 = x+10
e) 27 – 7 = 3x - 8
f) x – 7 = (x – 3)
g) 12 – (x – 3) = 6
h) 3(6 + x) = 2(x – 5)
i) 9(x – 1) = 6(x – 3)
j) 8(x -2) = 12(x – 3)

53. **Resuelve**

a) $x-\frac{x-1}{2}=3$

b) $\frac{x+1}{8}-\frac{x-1}{6}+\frac{x+3}{5}=2$

c) $\frac{x}{2}+\frac{x+2}{3}-\frac{x+3}{4}=1$

d) $\frac{x-3}{2}-\frac{x-1}{6}=1$

e) $\frac{x}{2}+\frac{x-1}{3}-\frac{x+1}{4}=1$

f) $\frac{3x+2}{5}-7=2x-\frac{x+1}{2}$

g) $\frac{x-2}{6}-\frac{x+1}{3}+\frac{x-1}{2}=0$

h) $\frac{3-x}{6}-\frac{x}{2}=\frac{1-x}{5}+\frac{2-x}{3}$

54. **Resuelve estas ecuación con paréntesis:**

a) 2 (x + 5) = 9x + 31
b) 3(a -1) – 2(a + 3)
c) 4 · (x – 6) = 2 · (x – 4)
d) 5(x – 1) – 12 = 2(x + 3)

55. **Resuelve:**

a) 2 (7 – x) + 6x = 8 – 5 (x – 1) + 8x + 4
b) 3 (6 + x) = 2 (x – 5)
c) 9 (x - 1) = 6 (x + 3)
d) (x - 7) = 2 (x – 3)
e) 12 - (x - 3) = 6
f) 8 (x - 2) = 12 (x – 3)
g) (2x + 1) = 8 - (3x + 3)
h) 15x - 10 = 6x - (x + 2) +(-x + 3)
i) 16 + 15x) = x – 3 (4 + x)
j) -3 (6 - 6 x) - 3 = x – 4
k) – 6x = 3 (5x + 8) – 3
l) (5-3x) - (-4x+6) = (8x +11)-(3x -6)

56. Resuelve estos problemas de ecuaciones

a) Halla el número que aumentado en 21 se igual a 39.
b) Halla un número tal que al restarle 31 nos dé como resultado 13.
c) ¿Qué número multiplicado por 7 se convierte en 245 ?
d) Si al triple de un número se le resta 36 resulta 72. ¿ Cuál es el número.?
e) Si a un número se le suma su doble y su triple resulta 90. ¿Cuál es el número ?
f) Halla un número que es igual a su triple menos 16.
g) ¿ Qué número multiplicado por 3, y sumado luego 7 al producto, da 19.?
h) Halla un número al que sumado 72 resulta su duplo menos 46 unidades.
i) Busca un número cuyo cuádruplo es igual al mismo número aumentado en 36 unidades.
j) ¿Qué número sumado con su mitad da 81?
k) Si al doble de un número se le resta la mitad resulta 54. ¿Cuál es el número?
l) Reparte 2.830 euros entre dos familias, de modo que una reciba 750 euros más que la otra.
m) Calcula un número cuyo triple más 7 unidades da 22.
n) Calcula tres números naturales consecutivos cuya suma igual a 66.
o) Tengo 4 años más que mi hermano. Calcula nuestras edades sabiendo que entre los dos sumamos 56 años.

57. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $4x + 5 - 3x = 2x + 6x - 9$
b) $5(x - 3) - (x - 1) = (x + 3) - 10$
c) $\frac{x}{5} = 6$
d) $\frac{3x}{4} = \frac{x-1}{2}$
e) $\frac{2x+13}{3} - \frac{6-x}{4} = 1$
f) $\frac{3(x-1)}{4} + \frac{5x-7}{3} = \frac{3}{2}$

58. Resuelve la siguiente ecuación e indica qué tipo de solución tiene: (ER4)

$.4(x - 3) + 4 = 2(x - 1) + 2x + 3$

59. Si me pagaran 60 € tendría el doble de lo que tengo ahora más 10 €. ¿Cuánto tengo? (ER5)

60. Tres cestos contienen 575 manzanas. El primer cesto 10 manzanas más que el segundo y 15 más que el tercero. ¿Cuántas manzanas hay en cada cesto? (ER6)

61. Dos autobuses salen a la vez, uno desde Lleida y otro desde Zaragoza, hacia Madrid. La distancia entre estas dos ciudades es de 126 km. Para ir de Lleida a Madrid debemos pasar por Zaragoza. El autobús que sale de Zaragoza circula a una velocidad media de 63km / h. ¿A qué velocidad circula el de Lleida, si alcanza al otro al cabo de 6 horas?

62. Un ciclista sale de su casa en bicicleta a las 8 de la mañana. Cuando ya lleva un rato pedaleando se le estropea la bicicleta y tiene que volver andando. Calcula a qué distancia de su casa se le estropeó la bicicleta, si andando va a una velocidad media de 6 km / h y en bicicleta a 30 Km / h y regresó a su casa a las 2 de la tarde.

63. Queremos plantar unos árboles formando un cuadrado. Si los colocamos en un cuadro de c árboles por lado nos sobran 6, pero si intentamos formar un cuadrado con un árbol más por lado, nos faltan 19. ¿Cuántos árboles tenemos para plantar?

64. La propietaria de una tienda de ropa encarga a un almacén 12 chaquetas y 48 faldas. Las chaquetas son 75 € más cara que las faldas. La factura asciende a 3.600 € ¿Cuál es el precio de cada artículo?

65. En una tienda te hacen 20 % de descuento, pero te cargan el 12 % de IVA. ¿Qué prefieres que te hagan primero el descuento o el IVA?

66. **Las instrucciones de un libro de cocina para asar el redondo de ternera dicen que se ase 20 minutos por cada kilo de carne y un cuarto de hora de propina. Hemos asado un redondo durante hora y cuarto. ¿Cuánto pesaba?**

67. **¿Es x = 4 la solución de la ecuación 2 (3x -4) – 3 (x +5) = -11 ?**

68. **La edad de Pedro es el triple de la de Juan y ambas edades suman 40 años. Hallar ambas edades.**

69. **En un corral hay conejos y gallinas; en total hay 35 cabezas y 116 patas. ¿Cuántos animales hay de cada clase?**

70. **Antonio le dice a Juan: "El dinero que tengo es el doble del que tienes tú" y Juan le dice a Antonio: "si tú me das 6 euros, tendremos los dos igual cantidad" ¿Cuánto dinero tiene cada uno?**

71. **Resuelve estos problemas planteando las ecuaciones**

1) Un padre tiene 36 años y su hijo 10, ¿cuántos años tienen que pasar para que la edad del padre sea el doble de la del hijo?
2) ¿Con cuánto dinero salí de casa esta mañana, si después de gastar la tercera parte y 70 euros. Todavía me queda la quinta parte de lo que tenía?
3) ¿Cuál es mi sueldo mensual teniendo en cuenta que si a su mitad le resto 100 euros obtengo lo mismo que si su décima parte la multiplico por cuatro?
4) Dos grupos de amigos salen a la vez, unos desde Lugo y otros desde Ciudad Real, con intención de encontrase en el camino. La distancia entre estas dos ciudades es de 690km. ¿En qué punto del camino se encontrarán, si los de Lugo circulan a 68 km/ h y los de Ciudad real a 70 km / h.
5) Dos trenes salen de la misma estación, a la vez y en sentido opuesto, a la velocidad de 72 km / h y 80 km / h. ¿Al cabo de cuánto tiempo se encontrarán a 988 km de distancia?
6) ¿Qué cantidad de vino de 1,20 €/l hay que mezclar con 40 litros de otro vino, de 1,50 €/ l para obtener una mezcla de 1,325 €/l?
7) En la papelería nos han cobrado 6,20 € por 15 lápices y 8 bolígrafos. Sabemos que el precio de los bolígrafos es el doble que el precio de los lápices. ¿Cuánto cuesta un lápiz y cuanto un bolígrafo?
8) **.-** Calcula el valor de **y** si el perímetro de esta piscina es 348. (hacer el dibujo)
9) **.-** Calcula un número cuyo triple más 7 unidades da 22.
10) **.-** Calcula tres números naturales consecutivos cuya suma igual a 66.
11) **.-** Tengo 4 años más que mi hermano. Calcula nuestras edades sabiendo que entre los dos sumamos 56 años.

4. Sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas.

4.1. Métodos para resolver sistemas de ecuaciones

Existen tres métodos para resolver un sistema de ecuaciones. El método de **sustitución**, el de **reducción** y el de **igualación**. El objetivo de cualquiera de estos métodos es reducir el sistema a una ecuación de primer grado con una incógnita. La solución obtenida siempre será la misma, independientemente del método elegido.

▶ Método de sustitución

Este método despeja una de las dos incógnitas en función de la otra en una de las dos ecuaciones. Luego sustituye el valor obtenido en la otra ecuación. Ejemplo:

$$\boldsymbol{x+y=6}$$
$$\boldsymbol{x-y=4}$$

1º Despejamos x o y en una de las dos ecuaciones. Por ejemplo, **y** en la primera:

y=6—x

2º Sustituimos este valor en la otra ecuación. En este caso, en la segunda:

x - (6 - x) = 4

Nos queda una ecuación con una sola incógnita, que resolvemos:

$$x-(6-x)=4 \Longrightarrow x-6+x=4 \Longrightarrow 2x=4+6 \Longrightarrow 2x=10 \Longrightarrow x=\frac{10}{2}=5$$

3º Calculamos el valor de la otra incógnita: y = 6 — x —>y = $y=6-x \Rightarrow y=6-5=1$

La solución que se obtiene es: (x,y) = (5,1)

4º El último paso es comprobar que la solución obtenida está bien:

$$\begin{array}{ll} x+y=6 & 5+1=6 \\ x-y=4 & 5-1=4 \end{array}$$

Método de reducción

Con este método se trata de eliminar una incógnita buscando sistemas equivalentes en donde los coeficientes de una misma incógnita sean opuestos.

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x+2y=25} \\ \boldsymbol{2x+3y=40} \end{aligned}$$

Queremos que una de las dos incógnitas tenga en ambas ecuaciones el mismo coeficiente pero con distinto signo. Por ejemplo, la incógnita **x** en la primera ecuación ha de tener un **-2**. Para ello transformamos la ecuación en otra equivalente multiplicándola por -2, y sumando ambas nos queda:

$$\begin{array}{c} -2(x+2y=25) \\ 2x+3y=40 \end{array} \qquad \begin{array}{l} -2x-4y=50 \\ 2x\ +3y=40 \\ \boldsymbol{0\ +y=-10 \quad \Longrightarrow y=10} \end{array}$$

La otra incógnita se obtiene sustituyendo el valor de y en una de las dos ecuaciones iniciales. Por ejemplo, en la primera:

$$x+2y=25 \quad \Rightarrow \quad x+2.10=25 \quad \Rightarrow \quad x=25-20 \quad \Rightarrow \quad x=5$$

La solución del sistema es: (x, y)= (5,10)

Método de igualación

En este método hay que despejar la incógnita **x** o **y** en las dos ecuaciones. Luego se igualan sus valores, obteniendo una ecuación lineal con una sola incógnita.Ejemplo:

1º Despejamos x o y en ambas ecuaciones.

Observa los coeficientes de las incógnitas. Es más cómodo despejar la incógnita que tiene de coeficiente uno, en este caso es la **y**.

$$\begin{array}{c} 2x-y=-1 \\ 3x+y=11 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{c} y=2x+1 \\ y=-3x+11 \end{array}$$

2º Si los primeros miembros son iguales, también lo son los segundos. Por tanto, podemos igualarlos. Obtenemos una ecuación con una sola incógnita, en este caso **x**.

$$2x+1=-3x+11 \Rightarrow 2x+3x=11-1 \Longrightarrow 5x=10 \Longrightarrow x=\frac{10}{5}=2$$

Nos falta calcular la otra incógnita. Podemos sustituir en cualquiera de las dos ecuaciones.

$y = 2x + 1$ $\quad y = 2.2 + 1 = 4 + 1 = 5$

La solución del sistema es: $(x, y) = (2,5)$

72. **Resuelve el siguiente sistema por el método de sustitución**

$$\left.\begin{array}{l} x + y = 48 \\ x - y = 1 \end{array}\right\}$$

73. **Resuelve el siguiente sistema por el método de igualación:**

$$\left.\begin{array}{l} x + y = 5 \\ x - y = 1 \end{array}\right\}$$

74. **. Resuelve el siguiente sistema y piensa qué tipo de solución tiene. Utiliza el método de reducción.**

$$\left.\begin{array}{l} x + y = 5 \\ 2x + 2y = 7 \end{array}\right\}$$

75. **Resuelve el siguiente sistema y di que tipo de solución tiene. Utiliza el método de reducción.**

$$\left.\begin{array}{l} x + y = 5 \\ 2x + 2y = 10 \end{array}\right\}$$

76. **¿Cuál es la solución de la ecuación 5x – 3y = 4 si x vale -1? (averigua el valor de la y)**

77. **Comprueba si es correcta o no la solución de los siguientes sistemas de ecuaciones:**

a) $\left.\begin{array}{l} 2x - y = 10 \\ x + 3y = 8 \end{array}\right\}$ Sol : x = 5, y = 0

b) $\left.\begin{array}{l} 3x - 2y = 22 \\ 2x + 3y = 6 \end{array}\right\}$ Sol : x = 6, y =-2

c) $\left.\begin{array}{l} 3x - 2y = 4 \\ 2x + 5y = 9 \end{array}\right\}$ Sol: x = 2, y = 1

78. **Resuelve por el método de igualación.**

a) $\left.\begin{array}{l} x + y = 4 \\ 2x + 2y = 8 \end{array}\right\}$

b) $\left.\begin{array}{l} x + 2y = 4 \\ 2x + 3y = 6 \end{array}\right\}$

c) $\left.\begin{array}{l} 4x + 6y = 2 \\ 6x + 9y = 3 \end{array}\right\}$

d) $\left.\begin{array}{l} x + 2y = 5 \\ x - y = 2 \end{array}\right\}$

e) $\left.\begin{array}{l} 3x + y = 10 \\ 2x + 3y = 9 \end{array}\right\}$

f) $\left.\begin{array}{l} x + y = 5 \\ 3x + 3y = 10 \end{array}\right\}$

79. **Resuelve estos sistemas de ecuaciones**

a) $\begin{cases} 2x - 3y = 5 \\ x + 2y = 6 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x + 4y = 5 \\ 2x - 3y = -1 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2x - 3y = 5 \\ 3x + 2y = 1 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 3x + 4y = 11 \\ -6x + 2y = 8 \end{cases}$

e) $\begin{cases} x + 4y = 18 \\ 2x - 5y = 10 \end{cases}$

f) $\left.\begin{array}{l} 2x - 5y = -11 \\ 3x + 4y = -5 \end{array}\right\}$

g) $\left.\begin{array}{l} 2x - y = 7 \\ 3x - 2y = -7 \end{array}\right\}$

h) $\left.\begin{array}{l} y + x = 4 \\ y = 2x + 1 \end{array}\right\}$

i) $\left.\begin{array}{l} x + 3y = 2 \\ 2x + 6y = 3 \end{array}\right\}$

j) $\left.\begin{array}{l} 2x + y = 9 \\ 3x - 2y = 10 \end{array}\right\}$

5. Funciones y gráficas

Una **función** es una relación entre dos variables de tal manera que para cada valor de la primera tenemos un único valor de la segunda.

Se representa de forma general por **y = f(x)**

Donde **f** es la relación, **x** es la variable independiente, a la que damos valores, e **y** es la variable dependiente, de la que obtenemos valores.

Llamamos **dominio** de la función al conjunto de todos los valores que puede tomar la variable independiente, y **recorrido** a todos los valores que puede tomar la variable dependiente.

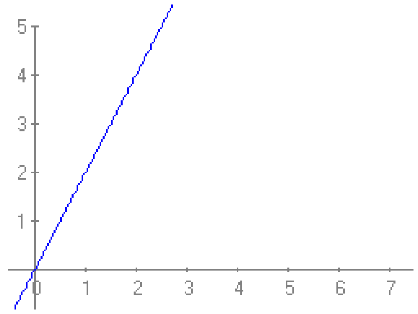
Una función se pude representar de diferentes maneras:

A) Mediante una **frase** que exprese la relación entre dos variables:

Cada kilo de manzanas cuesta 2 euros

B) Mediante una **tabla de valores**

Número de kg (x)	1 kg	2 kg.	3 kg.	4 kg.	5 kg.
Precio (y)	2 €	4	6	8	



C) Mediante una **fórmula**,

y = 2x

D) Mediante una **gráfica**

80. **La ecuación de una función es y = 4 x**

a) Construye una tabla dando a x los valores que quieras y calculando los correspondientes valores de y.
b) Representa los puntos que has obtenido en unos ejes cartesianos.
c) Como a x puedes darle cualquier valor y obtendrás el valor correspondiente de la y, puedes unir los puntos que has dibujado para tener la gráfica de toda la función.

81. **Representa gráficamente la ecuación *y = 2x* para cualquier valor de *x* comprendido entre 0 y 3, ambos inclusive.**

82. **¿Son funciones estas correspondencias? Justifica tus respuestas:**

a) El peso de una bolsa de naranjas en relación con su precio.
b) El nombre y la edad de tus compañeros de clase.
c) La edad y la talla de tus amigos
d) La superficie y el volumen de los pantanos de España.
e) Los países de Europa y sus capitales

83. **Representa gráficamente las siguientes funciones en el conjunto de números comprendido entre 0 y 5, ambos inclusive:**

a) La que asigna a cada número su doble menos dos.
b) La definida por la ecuación y = 2x-3.
c) La definida por la ecuación y = 2x -1.

5.1. Funciones lineales

Las **funciones lineales** son funciones de primer grado, es decir, funciones en las que la variable independiente (x) tiene como exponente 1.

- ✓ Su ecuación es de la forma: **y = mx** (siendo m distinta de 0)
- ✓ Su gráfica es una **recta inclinada que pasa por el origen** de coordenadas y cuya **pendiente es m.**
- ✓ La **pendiente** de una recta indica el grado de variación de **y** al variar **x**.

  - Si **m es positiva**, la función es **creciente**. (al aumentar x, aumenta y)
  - Si **m es negativa**, la función es **decreciente** (al aumentar x, disminuye y)

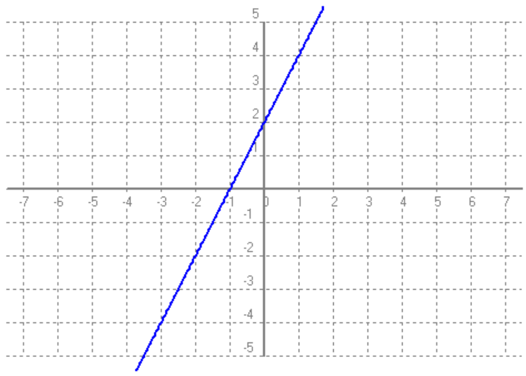
84. El precio de una barra de pan es 0,60 €. Estudiaremos la variación del precio del pan en función de las barras que compremos.

a) Construye una tabla que relacione el número de barras con el precio. Escribe en una fila las distintas cantidades de barras (1, 2, 3, 4 ...) y debajo sus precios correspondientes.
b) La relación entre número de barras y precio ¿es una función?¿Por qué?
c) Llama «x» al número de barras e «y» a su precio. Escribe una expresión algebraica que relacione las barras con el precio.
d) Representa en unos ejes cartesianos la gráfica de esta función. ¿Qué clase de línea es?
e) ¿Crees que la gráfica debe pasar por el origen de coordenadas? ¿Cuánto nos cobrarán si compramos 0 barras de pan, es decir, ninguna?

85. Representa la gráfica de estas funciones lineales. Utiliza un color diferente para cada una con el fin de distinguirlas mejor.

y = 2x y = x y = - 2x y = 4x

b) Escribe el valor de pendiente de cada una de estas funciones lineales.
c) ¿Cuáles son crecientes? ¿Cuáles son decrecientes?



5.2. Funciones afines.

Otro tipo de funciones de primer grado son las **funciones afines**. También su gráfica es una recta, pero no tiene que pasar por el origen de coordenadas como en las funciones lineales.

- ✓ Su ecuación tiene la forma: **y = mx + n**. (siendo m y n distinto de 0)
- ✓ Su gráfica es **una recta que no pasa por el origen de coordenadas.**
- ✓ El valor de **m** nos da la **pendiente** de la recta (creciente o decreciente)
- ✓ El valor de n la ordenada en el origen, es decir el valor de y cuando la x vale cero.

86. Representa en una gráfica estas cuatro funciones:

y = 3x + 2 y = 3x - 2 y = 4x + 2 y = 4x + 5

a) Haz una tabla de valores para cada una de ellas y representa las cuatro, con diferentes colores, en unos ejes coordenados.
b) ¿En qué punto corta cada una de ellas al eje y?
c) ¿Son paralelas algunas de estas rectas? ¿Cuáles?

- ✓ Si dos rectas tienen la misma pendiente, son paralelas.
- ✓ El número **n** se llama **ordenada en el origen**. La recta corta al eje de ordenadas en el punto (0,b).

La pendiente y la ordenada en el origen pueden ser cualquier número, positivo o negativo, etc.

87. **Representa la gráfica de estas funciones afines. Empieza por hacer una tabla de valores para cada una de ellas y representa los puntos que obtengas. Después dibuja la línea que une todos esos puntos.**

y = -3x + 2 y =-4x+2 y =-2x-3 y = -3x –2

a) ¿Cuál es la pendiente de cada una de estas rectas?

b) ¿E n qué punto corta cada una de las rectas al eje Y? ¿Cuál es la ordenada en el origen de cada una de ellas?

88. **El sueldo mensual de una encuestadora es de 250 € más 10 € por cada encuesta realizada en el mes.**

a) Escribe la ecuación que relaciona su sueldo (y) con el número de encuestas realizadas (x). ¿Qué tipo de función es?
b) Haz la gráfica de esta función. Toma el número de encuestas de 10 en 10 y el sueldo en cientos de euros.
c) ¿Cuántas encuestas debe hacer para ganar 750 €? ¿Y para ganar 1.250 €?

89. **La compañía eléctrica cobra todos los meses 15, 20 € fijos en concepto de alquiler de equipo y 0, 16 € por kW/h consumido.**

a) Calcula a cuánto asciende la factura de la luz un mes que consumimos 400 kW/h. ¿Y si consumimos 300 kW/h? ¿Y 200 kW/h? Construye una tabla de valores que relacione el valor de la factura con el número de kW/h consumidos.
b) Realiza la gráfica de la función que relaciona el número de kW/h consumidos con el valor de la factura.
c) ¿Cuál es la ecuación de esta función?

UNIDAD DIDÁCTICA 3

1. Las figuras geométricas en el plano

1.1. Geometría plana

La Geometría trata sobre las formas y sus propiedades. La geometría plana estudia las formas en una superficie plana.

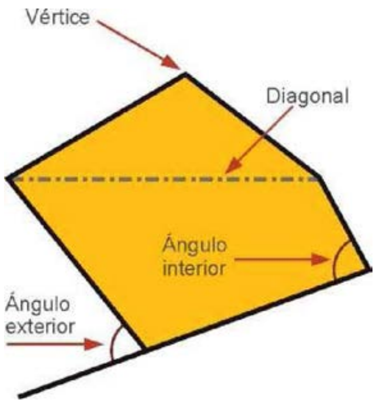
Pero, ¿qué es un plano? Vivimos en un mundo en tres dimensiones, pues bien, si suprimiéramos una dimensión, nos quedaría un plano. Imagina que vivieras en un mundo bidimensional. Podrías moverte, viajar, girar, avanzar, retroceder…pero no podrías subir ni bajar, porque no habría nada que tuviera altura, ya que sería un mundo plano.

La definición más correcta de **plano** es: la parte superior de un trozo de papel, perfectamente liso y sin fin.

Una hoja es una figura plana

1.2. Descripción de figuras geométricas en el plano. Polígonos

Las figuras **planas** y **cerradas** se llaman **polígonos**. Un polígono es una figura con varios lados, todos ellos rectos. Es **regular** si todos sus lados y ángulos son iguales.

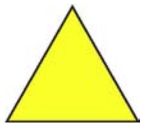
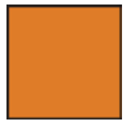
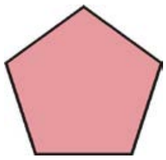
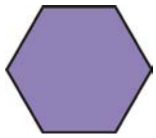
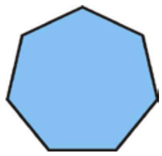
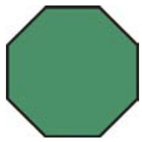


Elementos de un polígono

Polígono regular

Polígono no regular

Clasificación de polígonos regulares

Nombre	Lados	Ángulo interior	Forma
Triángulo	3	60°	
Cuadrilátero	4	90°	
Pentágono	5	108°	
Hexágono	6	120°	
Heptágono	7	128,571°	
Octágono	8	135°	

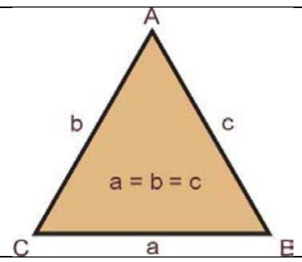
1.3. Triángulos

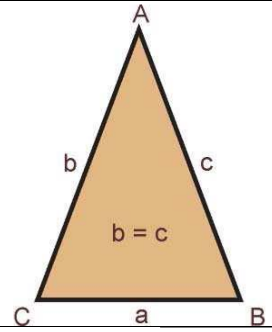
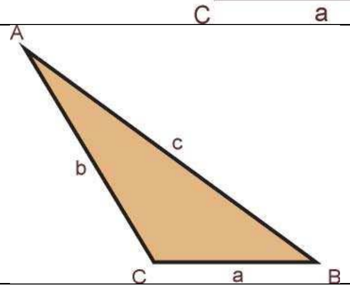
Un triángulo es un polígono con **tres lados** y **tres ángulos**. Los tres ángulos de cualquier triángulo siempre suman 180°.

Dependiendo del número de **lados o ángulos que sean iguales**, podemos destacar los triángulos equilátero, isósceles y escaleno:

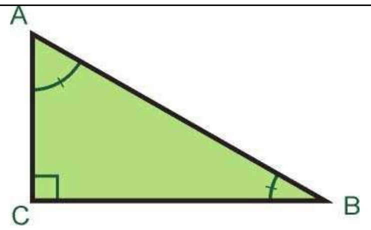
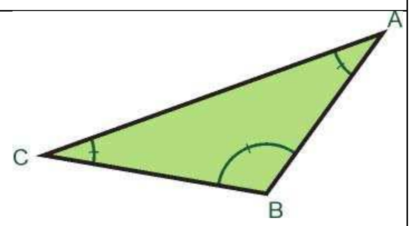
Triángulo **equilátero**.

- Tres lados iguales.
- Tres ángulos iguales de 60°.



Triángulo **isósceles**. ➢ Dos lados iguales. ➢ Dos ángulos iguales. ➢ No regular.	
Triángulo **escaleno**. ➢ Ningún lado igual. ➢ Ningún ángulo igual. ➢ No regular.	

También se clasifican los triángulos atendiendo al **valor de sus ángulos**. Los más comunes son:

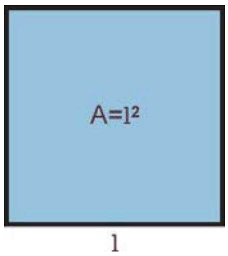
Triángulo **rectángulo**. ➢ -Tiene un ángulo de 90º (ángulo recto).	
Triángulo **obtusángulo**: ➢ Tiene un ángulo mayor de 90º.	

1.4. Cuadriláteros

Un cuadrilátero es cualquier **figura plana de cuatro lados**.

Dentro de los cuadriláteros distinguimos: **paralelogramos** y **no paralelogramos**. Un paralelogramo es un cuadrilátero en el que los lados opuestos son paralelos y de igual longitud, y los ángulos opuestos son iguales.

Paralelogramos	Cuadrado, rectángulo y rombo.
No paralelogramos	Trapecio y deltoide.

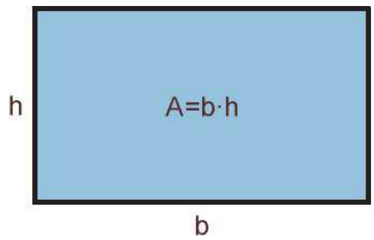


► **Cuadrado**

Es un cuadrilátero con los cuatro lados iguales. Sus cuatro ángulos son rectos (90°).

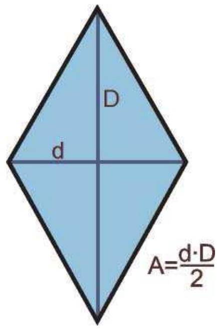
Rectángulo

Es un cuadrilátero cuyos lados opuestos son paralelos y de la misma longitud. Sus cuatro ángulos son rectos (90º).



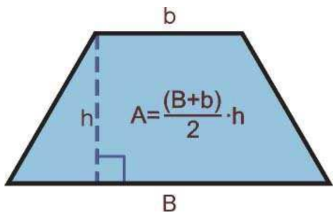
Rombo

Es un cuadrilátero cuyos lados son todos iguales, siendo los lados opuestos paralelos. Sus ángulos opuestos son iguales. Además, las diagonales se cortan en ángulos rectos, es decir, son perpendiculares.



Trapecio

Es un cuadrilátero con un par de lados paralelos. Pero no es un paralelogramo, porque sólo un par de lados es paralelo. Se llama trapecio regular si los lados que no son paralelos tienen la misma longitud y si los dos ángulos sobre un lado paralelo son iguales.



90. Escribe la definición de plano.

91. Completa:

Las figuras planas y __________ se llaman __________. Un _____________ es una figura con varios lados, todos ellos rectos. Es regular si todos sus lados y _________ son iguales.

92. Utilizando una regla, dibuja en tu cuaderno un triángulo de cada tipo: equilátero, isósceles, escaleno, rectángulo. Pon el nombre debajo.

93. ¿Qué es un paralelogramo?

2. Teorema de Pitágoras.

Recordemos que un ángulo recto es aquel que mide 90º. Un triángulo se llama **triángulo rectángulo** cuando uno de sus ángulos es recto. En estos triángulos se denomina **hipotenusa** al mayor de los tres lados; a los otros dos lados menores se les denomina **catetos**.

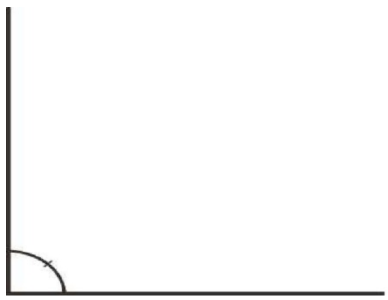


Figura 3.1: Ángulo recto

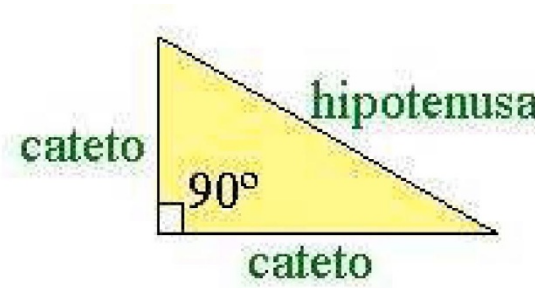
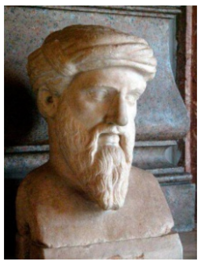


Figura 3.2: Triángulo rectángulo



En estos triángulos se cumple la siguiente propiedad: "El cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los catetos al cuadrado". Si llamamos a la longitud de la hipotenusa h, a la de un cateto c_1 y a la de otro c_2, se cumple: $h^2 = c_1^2 + c_2^2$

Ese enunciado se conoce con el nombre de **Teorema de Pitágoras**. Fue descubierto posiblemente por un discípulo de un filósofo y matemático griego del siglo VI antes de Cristo llamado Pitágoras.

Ejemplo de aplicación:

Si un triángulo rectángulo tiene de hipotenusa 26 cm y uno de los catetos 10 cm ¿Cuánto mide el otro cateto?

Escribimos la expresión del teorema de Pitágoras: $h^2 = c_1^2 + c_2^2$

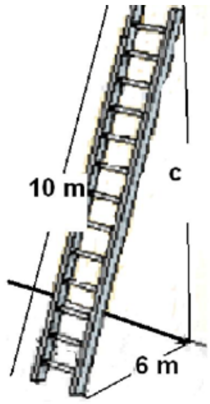
Suponemos que conocemos h y c_1 despejamos entonces c_2: $c_2^2 = h^2 - c_1^2$,

Sustituyendo: $h^2 = 676 y; c_1^2 = 100$

Luego: $c_2 = 676 - c100 = 576$. $c_2 = 676-100 = 576$

Al realizar la raíz cuadrada resulta c_2= 24 cm.

El teorema nos permite resolver muchos problemas de aplicación práctica.



Ejemplo de aplicación del Teorema de Pitágoras

Ejemplo:

Una escalera de 10 metros de longitud está apoyada sobre la pared. El pie de la escalera dista 6 metros de la pared. ¿Qué altura alcanza la escalera sobre la pared?

Aplicando el Teorema de Pitágoras: $h^2 = c^2 + c^2$; sustituyendo para este caso: $10^2 = 6^2 + c^2$

Luego: c =100-36 = 64 de donde: c = 8 metros.

94. Completa los datos que faltan en la tabla aplicando el teorema de Pitágoras:

hipotenusa	cateto	cateto
10 cm	8 cm	
50 cm		30 cm
45 cm	27 cm	
	12 cm	9 cm
20 cm		12 cm
25 cm	20 cm	
	28 cm	21 cm

95. El lado de un triángulo equilátero vale 10 cm. ¿Cuánto vale la altura? (ER 1)

96. Calcula la diagonal de un cuadrado de lado 20 cm

97. Un jardín en forma de trapecio isósceles tiene dos lados paralelos de 80 y 140 m y los otros dos son de 50 m de longitud. Halla su área.

98. Un cable de 2,5 m de longitud une el extremo superior de una antena de televisión con un punto situado en el suelo a 1,5 m de su base. ¿Cuál es la altura de la antena?

3. Cálculo de perímetros y áreas

El **perímetro** de una figura geométrica es la longitud de su contorno. El **área** de una figura geométrica plana indica su extensión o la superficie que encierra dicha figura.

Para calcular el perímetro de una figura geométrica hay que conocer cómo es esta, medir los lados que la conforman y sumarlos. Si la figura es un polígono regular, este proceso es mucho más cómodo.

Ejemplo:

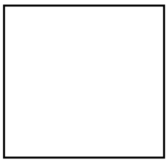
Calcula el perímetro de un cuadrado de lado 20 metros.

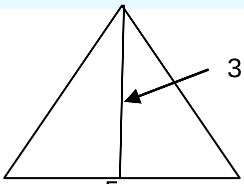
Como todos los lados del cuadrado son iguales y este tiene cuatro lados el perímetro será 4 por 20, es decir, 80 metros.

Medir el área de una superficie supone calcular **el número de veces** que contiene la unidad de superficie.

El **área de un triángulo** viene dada por la expresión $\mathbf{A} = \dfrac{\textbf{Base} \times \textbf{altura}}{\mathbf{2}}$

99. Calcula el área y el perímetro de las siguientes figuras:





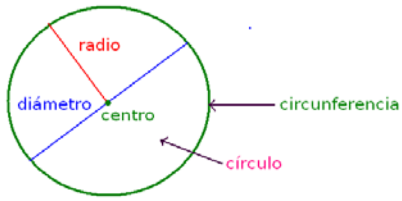
4. El círculo y la circunferencia

Una **circunferencia** es la línea curva cerrada que bordea a un círculo.

Podemos decir que un **círculo** es un "polígono regular de infinitos lados" y ese concepto es el que se utilizó en un principio para tratar de calcular la longitud de una circunferencia o el perímetro del círculo.

Cuántos más lados tenga el polígono más se parecerá la longitud de la circunferencia al perímetro del polígono y también más se parecerá el área del círculo al área del polígono; pero eso ya lo usaremos más adelante para investigar otras cosas que te van a resultar interesantes.

La **circunferencia** es la línea curva que rodea al círculo y está formada por los puntos que están a igual distancia de un punto fijo llamado centro. El círculo es la parte interior a la circunferencia.



El **radio** es la longitud de cada segmento que une el centro del círculo con la circunferencia. El diámetro es el segmento más largo que une dos puntos de la circunferencia. Divide la circunferencia en dos partes iguales.

4.1. Longitud de la circunferencia

La circunferencia es una curva cerrada y su longitud se calcula con la siguiente fórmula:

Longitud de la circunferencia = 2·π·r

Donde **π** es aproximadamente el número 3,14 y *r* es el radio.

Ejemplo:

La longitud de una circunferencia de radio 5 metros es aproximadamente ***2·3,14·5*** = ***31,4metros***

4.2. Área del círculo

Un círculo es una superficie plana, y su área que se calcula con la fórmula:

Área del círculo = πr^2

Ejemplo:

El área de un círculo de radio 5 metros es aproximadamente

$3,14 \cdot 5^2 m^2 = 3,14 \cdot 25 m^2 = 78,5 m^2$

100. **Calcula la longitud de la circunferencia si su diámetro vale:**

a) 20 cm
b) 30 cm
c) 45 cm
d) 60 cm

101. **Calcula la longitud de la circunferencia si su radio vale:**

a) 10 m
b) 5 m
c) 7 m
d) 9 m

102. **La longitud de una circunferencia es 628 metros. ¿Cuánto mide su diámetro?**

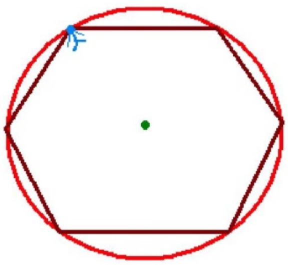
103. **Calcula cuánto mide el radio de las circunferencias cuya longitud es:**

a) 314 cm
b) 2.198 cm
c) 3.768 cm
d) 1.256 cm

104. **Calcula el área de los círculos cuyos radios miden:**

a) 10 cm
b) 5 cm
c) 7 cm
d) 6 cm

105. **En la carpa de un circo se van a colocar asientos según se muestra en la figura (solo está representada la última fila de asientos). El perímetro de la carpa circular es de 300 metros. ¿A qué distancia estará la persona que esté sentada en la parte más alejada del centro de la pista?**



106. **En un barrio se va construir un parque infantil con forma circular. Para rellenarlo de arena se necesitan 50 kilos de tierra por cada metro cuadrado de superficie. Si el parque tiene un diámetro de 20 metros cuadrados. ¿Cuánta arena hará falta?**

5. Cuerpos geométricos. Poliedros

Los **cuerpos geométricos** son regiones cerradas del espacio. Vamos a enumerar y diferenciar los distintos **cuerpos geométricos** que vas a estudiar, veremos la forma de construirlos o su desarrollo y aprenderás a calcular el área y el volumen de cada uno de ellos.

5.1. Poliedros. Elementos de un poliedro

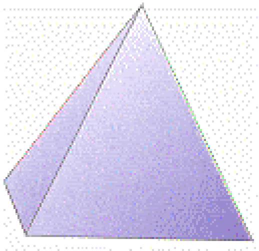
El **poliedro** es un cuerpo geométrico cuyas caras son polígonos. Se llaman **poliedros regulares** cuando sus caras son polígonos regulares.

Los elementos principales de un poliedro son las caras, los vértices y las aristas:

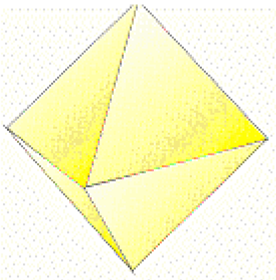
- - **Caras:** polígonos que delimitan el poliedro.
- - **Aristas**: bordes de las caras.
- - **Vértices:** puntos donde se encuentran tres o más aristas.

Sólo hay cinco poliedros regulares: **tetraedro, cubo**, **octaedro**, **dodecaedro** e **icosaedro.**

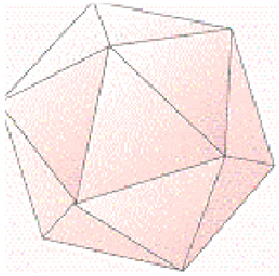
Con triángulos equiláteros construimos 3 clases de poliedros regulares:



TETRAEDRO
4 caras

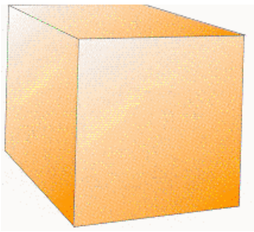


OCTAEDRO
8 caras



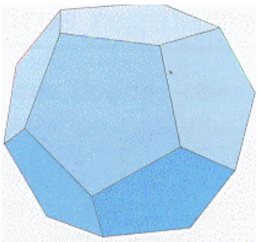
ICOSAEDRO
20 caras

… con cuadrados construimos solo uno:



CUBO O HEXAEDRO
6 caras

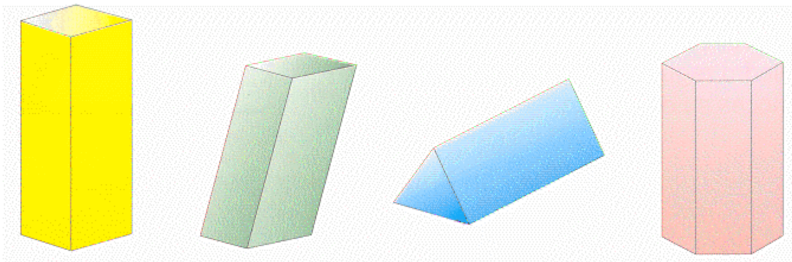
... con pentágonos regulares se puede hacer otro:

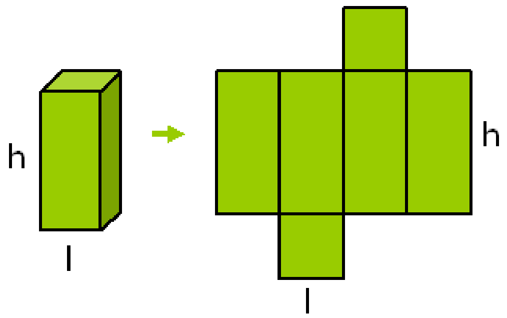


DODECAEDRO
12 caras

5.2. Los prismas.

Los prismas son poliedros que tienen por bases dos polígonos iguales y por caras laterales, paralelogramos. En particular, los prismas cuyas caras son todos paralelogramos (polígono de cuatro lados paralelos dos a dos) se llaman **paralelepípedos**.





Área de la superficie de un prisma: es la suma del área lateral más el área de las dos bases.

Área de la base = l^2

Área lateral = $4 \cdot l \cdot h$

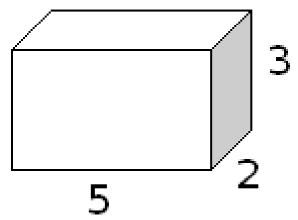
Área total = $2 \cdot l^2 + 4 \cdot l \cdot h$

Volumen de un prisma: se calcula multiplicando el área de la base por la altura.

Volumen prisma = área base · altura

Ejemplo:

Vamos a calcular el área y el volumen del prisma de la figura. El área es la suma de las áreas de las caras. Como son seis rectángulos, sólo tienes que sumar el área de cada uno de ellos.



Área de la base = 5 ·2 = 10

Área de la cara anterior = 5 · 3 =15.

Área de la cara lateral = 2 · 3 = 6.

Luego, **Área** = 10 · 2 + 15 · 2 + 6 ·2 = 20 + 30 + 12 = 62.

Volumen del prisma: es el área de la base por la altura.

V = a · b · c = 5 · 2 · 3 = 30.

5.4. Cuerpos redondos: cilindro, cono y esfera

Los **cuerpos redondos** se forman al girar una figura alrededor de una recta llamada eje. Los más sencillos son el cilindro, el cono y la esfera.

▶ Cilindro

Es un cuerpo geométrico engendrado por el giro de un rectángulo alrededor de uno de sus lados.

Área de un cilindro: es la suma del área de las dos bases y el área lateral.

Las bases son círculos, cuya área es $\boldsymbol{A = \pi r^2}$

La parte lateral, si la cortas y la estiras, es un rectángulo, de base la longitud de la circunferencia y de altura h. Luego:

Área lateral: 2 · π · r · h

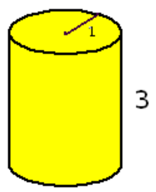
Área base = π · r ^{2}

Área total =2 · π · r · h + 2 π · r ^{2}

Volumen cilindro = área base · altura = π · r ^{2}h

Ejemplo:

Vamos a calcular el área y el volumen de un cilindro de 3 metros de altura y 1 metro el radio de la base:



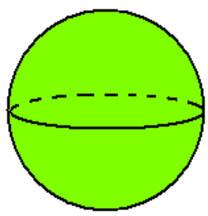
Área lateral: 2 · π · r · h = 2 · π · 1,3 = 18,84 m ^{2}

Área base = π · r ^{2} = π · 1 ^{2} = π = 3, 14 m ^{2}

Área total =2 · π · r · h + 2 π · r ^{2} = 21,98 m ^{2}

Volumen cilindro = área base · altura = π · r ^{2} · h = 3, 14 · 3 = 9,42 m ^{2}

▶ Esfera



Es un cuerpo de revolución engendrado por un semicírculo que gira sobre su diámetro.

El área de la superficie de una esfera es cuatro veces el de su círculo máximo.

Área esfera = 4·π·r ^{2}

El volumen de una esfera es las dos terceras partes del volumen de un cilindro.

Volumen esfera = $\dfrac{4\cdot \pi\cdot r^3}{3}$

Ejemplo:

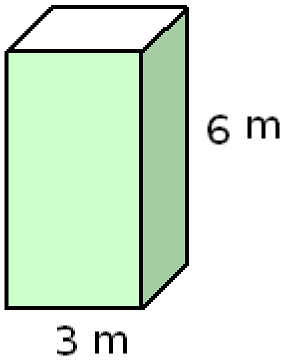
Vamos a calcular cuánto cuero se necesita para fabricar un balón de 16 cm de radio. Expresaremos el resultado en decímetros.

Área balón = 4·π·r 2 = 4·3,14·162 =12,56·256 =3215,36cm2 =32,15 dm2

Calculemos también cuánta capacidad tiene en litros:

Volumen esfera = $\dfrac{4\cdot \pi\cdot r^3}{3} = \dfrac{4\cdot 3{,}14\cdot 16^3}{3} = \dfrac{51.445{,}76}{3}$ cm 3 = 17.148,59 cm 3 = 17,15 dm 3 = 17,15 litros

107. **Halla el área y el volumen del prisma cuadrangular sin tapa de la figura:**



108. **Calcula cuántos litros de agua caben en un depósito esférico de 10 metros de radio.**

Unidad didáctica 4

1. La estadística

La **estadística** es la parte de las matemáticas que se ocupa de recoger y ordenar datos referidos a fenómenos para su posterior análisis e interpretación.

1.1. Población y muestra

Población: conjunto de todos los elementos que son objeto de estudio.

Muestra: parte de la población que vamos a estudiar, y del estudio de la misma sacaremos conclusiones aplicables al total de la población.

1.2. Identificación de variables

Cuando hacemos un estudio estadístico nos preguntamos cuál es la característica motivo de estudio. A ella se la llama **variable estadística o carácter estadístico**.

Las variables estadísticas pueden ser:

- ✓ **Cuantitativas**: cuando los datos son números. Dentro de estas podemos diferenciar dos tipos:
  - **Discretas:** las que toman valores enteros.
  - **Continuas:** las que pueden tomar valores decimales.
- ✓ **Cualitativas**: cuando los datos no son números, sino cualidades.

1. En una población se realiza un estudio sobre distintos aspectos de sus individuos. Indica cuáles de las siguientes variables son cualitativas y cuales cuantitativas.

a. Deporte practicado.
b. Sexo.
c. Color de ojos.
d. Número de hermanos.
e. Estatura.
f. Música favorita.
g. Horas diarias de sueño.

2. En una empresa se hace un estudio sobre el tiempo que emplean los trabajadores en el descanso de media mañana. Entre los 200 trabajadores de la empresa se pregunta a 30 de ellos. ¿Cuáles son la población y la muestra? ¿Cuál es la variable estadística? ¿Es cualitativa o cuantitativa?

3. Un fabricante de tornillos desea hacer un control de calidad. Para ello recoge uno de cada 100 tornillos y lo analiza para saber si son correctos o no. ¿Cuáles son la población y la muestra? Indica cuál es la variable y si es cualitativa o cuantitativa.

4. Se ha preguntado a 50 familias de una localidad el número de vehículos por vivienda. Completa las siguientes frases:

La ______________ objeto de estudio son las familias de la localidad. La ______________ son las 50 familias a las que se les ha tomado el dato sobre el número de vehículos que poseen. La variable "número de vehículos es ______________ ya que toma valores numéricos.

2. Elección de muestras significativas. Recuento de datos y frecuencias

Para que el resultado de un estudio estadístico sea eficaz y válido, el tamaño de la muestra debe ser adecuado o **representativo** del total de la población.

2.1. Muestras: características y tipos

El **tamaño de la muestra** es el número de elementos que tiene.

Para que la muestra sea **representativa** se deben tener en cuenta las siguientes características:

- ✓ Aleatoriedad: cualquier elemento puede ser elegido.
- ✓ Homogeneidad: los elementos de la población deben tener condiciones similares.
- ✓ Tamaño de la muestra: debe ser ajustado al riesgo de error que se pretende.

Tipos de muestra:

a. **Aleatoria:** cuando se extraen al azar del total de la población.

b. **Sistemática:** cuando se extraen los datos según una secuencia.

c. **Estratificada**: cuando se divide la población en partes homogéneas

2.2. Recuento de datos y frecuencias

Una vez confeccionada y realizada la encuesta, es necesario organizar los datos y realizar el recuento. Para ello elaboramos una tabla en la que se recogen los diferentes resultados con sus frecuencias.

La **frecuencia absoluta** de un dato es el número de veces que se repite.

La **frecuencia relativa** de un dato es el número de veces que se repite dividido entre el número total de datos (tamaño de la muestra).

La **frecuencia absoluta acumulada** de un dato es el número de datos que toman un valor inferior o igual a dicho dato.

Una observación importante: si la frecuencia relativa la multiplicamos por cien, obtenemos los **porcentajes**.

5. Indica la verdad o falsedad de las siguientes afirmaciones:

a. El error que se comete al realizar un estudio estadístico no es predecible.

b. Cuando realizamos una encuesta el tamaño de la muestra son los individuos a los que se les pregunta.
c. La frecuencia absoluta de un dato nos indica el número de veces que se repite.
d. La frecuencia relativa multiplicada por 100 nos da el porcentaje del dato correspondiente sobre el total de datos.

6. Indica en los siguientes casos qué tipo de muestra son más apropiados: aleatoria, sistemática o estratificada.

a. Estatura de los individuos adultos y varones de una población.
b. Estudio de piezas defectuosas en un proceso de fabricación.
c. Gasto en ropa de la población española.
d. Tiempo que dedican los trabajadores de una empresa en el descanso de media mañana.

7. En un estudio estadístico sobre el tipo de deporte practicado por los jóvenes de entre 15 y 20 años en una localidad, hemos observado que entre los encuestados hay 36 jóvenes que practican atletismo y a los que les corresponde una frecuencia relativa del 0,12. ¿Cuál es el tamaño de la muestra a la que se le ha hecho el estudio?

8. Lanzamos un dado 25 veces y los resultados obtenidos son: 2, 3, 5, 1, 2, 3, 6, 6, 4, 5, 3, 5, 2, 6, 4, 1, 3, 2, 4, 6, 3, 2, 1, 4, 6. Realiza el recuento y completa la tabla de frecuencias:

Variable	Recuento	Frecuencia absoluta	Frecuencia absoluta acumulada	Frecuencia relativa	Porcentaje
1					
2			9		
3		5			
4	////				
5					12%
6				4/25 = 0,16	
		SUMA = 25		SUMA = 1	SUMA = 100

9. Completa los datos que faltan en la siguiente tabla referente al lanzamiento de un dado de cuatro caras numeradas del 1 al 4:

Variable	Recuento	Frecuencia absoluta	Frecuencia absoluta acumulada	Frecuencia relativa	Porcentaje (%)
1	///				%
2	//////		9		30%
3	///////			0,35	%
4	////	4			%

2.3. Agrupamiento de datos por intervalos

Cuando en una variable estadística tenemos muchos datos diferentes, lo apropiado es recoger los datos agrupados por intervalos que se llaman **intervalos de clase**.

Antes de continuar, debemos repasar los distintos **tipos de intervalos**:

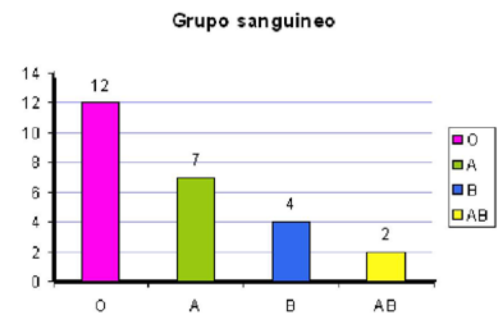
- ✓ **(a,b):** números comprendidos entre a y b, **excluidos** ambos extremos.
- ✓ **[a,b)**: números comprendidos entre a y b, incluido a y excluido b.
- ✓ **(a,b]**: números comprendidos entre a y b, excluido a e incluido b.
- ✓ **[a,b]**: números comprendidos entre a y b, **incluidos** ambos extremos.

El valor medio del intervalo se denomina **marca de clase**. La marca de clase se puede calcular dividiendo la suma de los dos extremos entre 2.

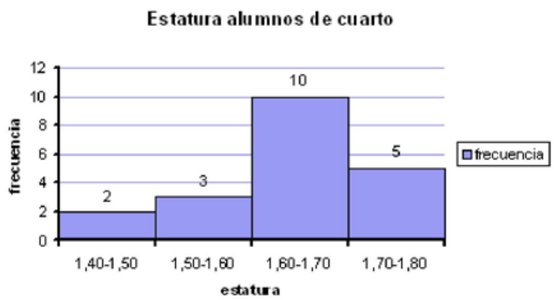
La **amplitud del intervalo** es la diferencia de los dos extremos. Todos los intervalos de clase deben tener la misma amplitud.

3. Elaboración de gráficos estadísticos

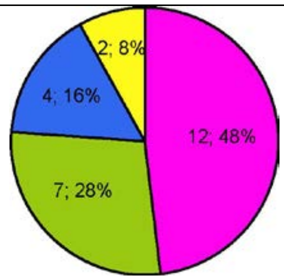
Diagramas de barras



Histogramas



Polígonos de frecuencias



Diagramas de sectores

10. **Indica el tipo de variable: discreta, continua, cuantitativa o cualitativa. ¿En qué casos se recogerían los datos agrupados en intervalos?**

a. Libros de lectura favoritos.
b. Número de libros leídos en el último año.
c. Precio de un alimento.
d. Nivel de contaminación.
e. Calificación en un test de 100 preguntas.
f. Peso de un recién nacido.

11. **En una encuesta realizada a 25 personas se ha tomado el dato referido al número de libros leídos en el último año: 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 3 3. Elabora una tabla de frecuencias.**

Nº libros	Frecuencia absoluta (f_i)	Frecuencia relativa (h_i)	Frecuencia absoluta acumulada (F_i)
0			
1			
2			
3			

12. **Un test psicotécnico de 100 preguntas ha sido realizado por 50 personas y las puntuaciones han sido las siguientes: 1, 3, 7, 15, 19, 20, 25, 25, 28, 28, 28, 30, 31, 33, 35, 35, 37, 38, 40, 40, 40, 44, 45, 45, 45, 45, 48, 48, 48, 49, 49, 50, 50, 50, 56, 57, 59,59, 60, 60, 60, 65, 67, 70, 74, 76, 76, 79, 90, 95. Elabora una tabla de frecuencias en la que los datos estén agrupados en intervalos de amplitud 20.**

Intervalo	Marca de clase	Frecuencia absoluta	Frecuencia relativa	Frecuencia absoluta acumulada
[0,20)				
[20,40)				18
[40,60)			20/50 = 0,40	
[60,80)	70			
[80,100]		2		

13. Señala cuáles de las siguientes variables son discretas y cuáles continuas:

a) Calificaciones de un grupo de alumnos en una asignatura.
b) La temperatura de distintas localidades a las 12 del mediodía.
c) La altura de una persona.
d) El peso de un jamón ibérico.
e) El precio del recibo de la luz de los usuarios de una compañía.
f) El número de llamadas telefónicas a cierto teléfono a lo largo de un día.

14. Indica en cada caso si debemos recoger los datos por intervalos:

a) El peso de un jamón.
b) Operaciones realizadas en un hospital a lo largo de un mes.
c) Número de miembros por familia.
d) Ingresos diarios en un supermercado.

15. Completa los datos que faltan en la siguiente tabla referente a las pulsaciones de un equipo de atletas al terminar una carrera. Expresa las frecuencias relativas en forma decimal.

Pulsaciones	Marca de clase	Frecuencia absoluta	Frecuencia relativa	Frecuencia absoluta acumulada
[70,80)		5		
[80,90)			0,40	13
[90,100)				19
[100,110)				20

16. En una población se ha tomado una muestra de 25 familias a las que se les ha preguntado sobre el número de vehículos que poseen. Los datos se recogen en la siguiente tabla. Haz una representación de las frecuencias en un diagrama de barras, un polígono de frecuencias y un gráfico de sectores.

Nº de coches	Nº de coches
0	2
1	12
2	7
3	3
4	1

17. La tabla siguiente muestra el número de empleados de una empresa, cuyos sueldos expresados en euros, están agrupados en intervalos. Haz una representación de las frecuencias en un histograma y otra en un gráfico de sectores donde se refleje el porcentaje.

Sueldos	Nº de empleados
[500,600]	8
[600,700]	10
[700,800]	16
[800,900]	14
[900,1.000]	10
[1.000,1.100]	5
[1.100,1.200]	2

18. Se han obtenido las pulsaciones de un equipo de atletas después de una carrera. Se reflejan en la siguiente tabla. Contesta a las siguientes preguntas:

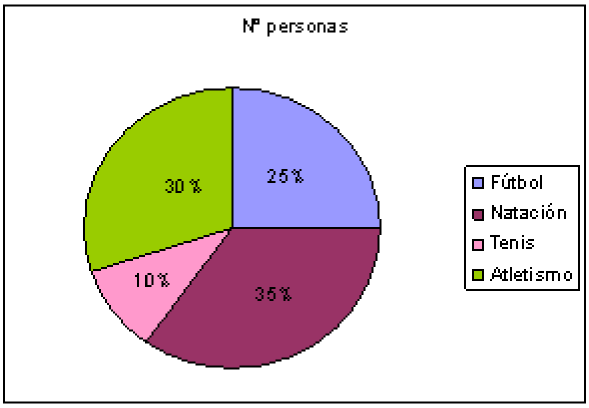
Pulsaciones	Nº de atletas
[70, 74]	3
[74,78]	5
[78, 82]	7
[82,86]	10
[86,90]	12
[90,94]	8

a. ¿Cuántos elementos forman la muestra?
b. ¿De qué tipo es la variable estadística?
c. Construye la tabla de frecuencias.
d. Dibuja el histograma.
e. Dibuja el polígono de frecuencias acumuladas.

19. Si en el diagrama de sectores el ángulo correspondiente a una característica es de 72º y el tamaño de la muestra es 40, ¿cuál es la frecuencia relativa?

a) 8,0.
b) 0,5
c) 0,2
d) 1,0

20. Se ha hecho un estudio en un grupo de personas sobre el deporte más practicado. Indica qué tabla corresponde al siguiente gráfico.



a)

Deporte	Nº personas
Fútbol	5
Natación	7
Tenis	3
Atletismo	5

b)

Deporte	Nº personas
Fútbol	4
Natación	8
Tenis	3
Atletismo	5

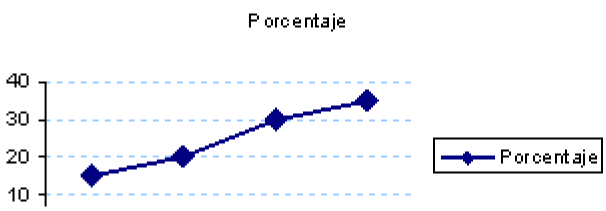
c)

Deporte	Nº personas
Fútbol	5
Natación	7
Tenis	2
Atletismo	6

d)

Deporte	Nº personas
Fútbol	5
Natación	5
Tenis	4
Atletismo	6

21. Indica qué tabla corresponde al siguiente gráfico de la evolución de las ventas (en porcentaje) de un producto a lo largo de cinco años.



a)

Año	Porcentaje
2004	20
2005	25
2006	30
2007	25

b)

Año	Porcentaje
2004	15
2005	25
2006	27
2007	33

c)

Año	Porcentaje
2004	15
2005	20
2006	30
2007	35

d)

Año	Porcentaje
2004	15
2005	20
2006	25
2007	40

22. **Indica qué tipo de gráfico (histograma, diagrama de barras o polígono de frecuencias) es el más adecuado para representar las siguientes variables:**

a) Peso.
b) Talla de camisa
c) Campos aprobados por un grupo de alumnos.
d) Producción de aceite en Extremadura a lo largo de los últimos cinco años.

4. Cálculo de las medidas de centralización

Debemos seguir estos pasos:

1. º Hacer una tabla de frecuencias en la que recojamos los datos:

- ✓ **Variable**
- ✓ **Frecuencia absoluta** (número de veces que aparece cada variable)
- ✓ **Frecuencia acumulada** (suma de las frecuencias anteriores a cada caso)
- ✓ **Frecuencia relativa** (cociente entre la frecuencia absoluta y el número total de elementos)
- ✓ **Porcentaje** (multiplicamos la frecuencia relativa por 100 y lo expresamos en %)

(estas dos últimas –frecuencia relativa y porcentaje- no son necesarias para el cálculo de las medidas estadísticas)

Si viene dado por intervalos, además hay que incluir la MARCA DE CLASE (se suman los dos números del intervalo y se divide el resultado por 2)

Ejemplo 1. Realizada una encuesta a 30 niños de una clase de cuántos libros leen en un año, obtenemos los datos 1, 2, 2, 3, 2, 1, 0, 2, 3, 4, 0, 5, 1, 2, 0, 1, 0, 3, 6, 7, 0, 2, 7, 6, 1, 2, 2, 3, 5, 0. Construye una tabla para ordenar estos datos.

Variable	Frecuencia absoluta	Frecuencia absoluta acumulada	Frecuencia relativa	Porcentaje
0	6	6	6/30 = 0,2	20 %
1	5	11 *(6+5)*	5/30 = 0,17	17 %
2	8	19 *(11+8)*	8/30 = 0,27	27 %
3	4	23	4/30 = 0,13	13 %
4	1	24	1/30 =0,03	3 %
5	2	26	2/30 = 0,07	7 %
6	2	28	2/30 = 0,07	7 %
7	2	30	2/30 = 0,07	7 %
	SUMA = 30		*SUMA = 1*	*SUMA ≈ 100*

Moda

Es el valor de la variable que tiene mayor frecuencia.

En el **Ejemplo 1 la moda es 2** (tiene la mayor frecuencia absoluta: 8)

Mediana

Sólo sirve para variables cuantitativas. Nos tenemos que fijar en la casilla de frecuencias acumuladas.

Dividimos por 2 el número de resultados: 30 / 2 = 15

La casilla de las frecuencias acumuladas que se corresponde con este número o con el número inmediato superior es donde debemos buscar la variable que nos indica la mediana.

En el **Ejemplo 1** sería la casilla de la frecuencia acumulada 19 y la variable, es decir, la **mediana es 2.**

Media

Es la suma de todos los datos dividido entre el número total de datos.

Para calcularla hay que hacer una nueva columna: datos X frecuencia

Variable	Frecuencia absoluta	Frecuencia absoluta acumulada	Datos X frecuencia
0	6	6	6 X 0 = 0
1	5	11 *(6+5)*	5 x 1 = 5
2	8	19 *(11+8)*	8 X 2 = 16
3	4	23	4 X 3 = 12
4	1	24	1 X 4 = 4
5	2	26	2 X 5 = 10
6	2	28	2 X 6 = 12
7	2	30	2 X 7 = 14
	SUMA = 30		SUMA = 73

En el **Ejemplo 1 la media** será 73 / 30 = **2, 43**

Cuando los datos están agrupados en intervalos, se utiliza la marca de clase para calcular estas medidas.

Ejemplo 2. Preguntamos a 19 niños de una clase cuál es su paga semanal, y nos contestan lo siguiente:

(de 0 a 10) 2
(de 10 a 20) 3
(de 20 a 30) 5
(de 30 a 40) 8
(de 40 a 50) 1

Realiza una tabla de frecuencias y calcula la media, la mediana y la moda

Variable (paga semanal)	**Marca de clase**	**Frecuencia absoluta**	**Frecuencia absoluta acumulada**	**Marca X frecuencia**
de 0 a 10	5 (10+0/2=5)	2	2	5 X 2 = 10
de 10 a 20	15 (20+10/2=15)	3	5	15 X 3 = 45
de 20 a 30	25	5	10	25 X 5 = 125
de 30 a 40	35	8	18	35 X 8 = 280
de 40 a 50	45	1	19	45 X 1 = 45
		SUMA = 19		SUMA = 505

Moda = de 30 a 40 (la mayor frecuencia es 8)

Mediana = de 20 a 30 (19/2 =9,5 Frecuencia acumulada 10)

Media = 27 (505 / 19= 26,57)

Halla la media, la mediana y la moda en la siguiente distribución: 7, 9, 2, 9, 10, 4, 5, 4, 4

23. **Halla la mediana en la siguiente distribución: 7, 9, 2, 9, 10, 4, 5, 4, 4, 6.**

24. **El número de horas de estudio semanal que dedican 20 estudiantes al campo Científico-Tecnológico es: 1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 5, 5, 5, 5, 5, 6, 6, 7, 8, 8.**

Elabora una tabla de frecuencias absolutas.
Calcula la moda.
Calcula la mediana.
Calcula la media.

25. **En una línea de autobús se quiere controlar la afluencia de usuarios a lo largo de la semana. Todos los días se hace recuento de los usuarios del autobús y se refleja en la siguiente tabla.**

Variable (x_i)	Frecuencia
Lunes	380
Martes	390
Miércoles	320
Jueves	250
Viernes	200
Sábado	180
Domingo	60

a) Calcula la moda.
b) Elabora una tabla de frecuencias acumuladas.
c) ¿Cuántas personas han subido al autobús a lo largo de la semana?
d) ¿Cuántas personas han subido al autobús a lo largo de los tres primeros díasde la semana?
e) Calcula la mediana.
f) Calcula la media.

26. **Se ha preguntado a un grupo de escolares de entre 10 y 12 años sobre el tiempo que dedican a la lectura a lo largo de la semana. Los resultados están expresados en la siguiente tabla:**

Tiempo (horas)	Nº de escolares
[0, 2)	6
[2,4)	11
[4,6)	8
[6,8)	3
[8,10]	2

Elabora una tabla de frecuencias.
Halla la moda, la mediana y la media.

27. **Calcula la moda de la siguiente distribución:**

x_i	5	10	15	20	25	30	35	40	45
f_i	0	0	0	2	11	2	0	0	0

28. **El ayuntamiento de una ciudad está interesado en saber el número de ocupantes de los turismos que circulan por las calles. Para ello se elige un semáforo y se cuenta el número de ocupantes de los 100 primeros vehículos que paran en él. ¿Cuál es la media, la mediana y la moda si los datos obtenidos son los siguientes?**

Nº Ocupantes	Nº de vehículos (f_i)
1	35
2	29
3	21
4	9
5	6

29. **Las estaturas de 75 personas están recogidas en la siguiente tabla. Calcula el intervalo modal y el intervalo mediano:**

Intervalo	fi
[140,146)	2
[146,152)	6
[152,158).	10
[158,164)	15
[164,170)	25
[170,176)	8
[176,182)	5
[182,188)	4

30. **El número de personas que vive en cada uno de los edificios de una barriada se recoge en la siguiente tabla. Calcula la media, la mediana y la moda:**

Nº de personas	Nº de edificios (fi)
[60,76)	6
[76,92)	8
[92,108)	50
[108,124)	45
[124,140)	31
[140,156)	10

5. Cálculo de las medidas de dispersión

Rango o recorrido

Es la diferencia entre el valor mayor y el valor menor.

En el **Ejemplo 1**: Valor mayor (7) – valor menor (0) = **7**

En el **Ejemplo 2**: Valor mayor (50) – valor menor (0) = **50**

▶ Desviación media

Consiste en realizar la media aritmética de las desviaciones de cada dato respecto al valor central media aritmética. (para ello debemos haber calculado antes esta media)

1 º. A los datos de la variable le **restamos el valor de la media** y expresamos su **valor absoluto** (sin el signo)

2.º Multiplicamos cada dato obtenido en el paso anterior **por la frecuencia absoluta**.

3.º Sumamos todos los valores de la desviación y **lo dividimos entre el número total de datos**

▶ Varianza

Es la **media de los cuadrados de las desviaciones** respecto de la media.

▶ Desviación típica

Es la **raíz cuadrada de la varianza**.

▶ Coeficiente de variación

Es **la desviación típica dividida entre la media**.

Cuanto menor sea el coeficiente de variación, más homogénea es la distribución de los datos.

El coeficiente de variación no tiene unidades y se suele expresar en porcentaje.

EJEMPLO 1 COMPLETO

Variable	Frecuencia absoluta	Frecuencia absoluta acumulada	Datos X frecuencia	Desviación /Datos-Media/ (sin el signo)	Desviación X Frecuencia	Varianza: (desv.)^2 x frecuencia
0	6	6	6 X 0 = 0	0 - 2,4 = - 2,4 = 2,4	2,4 X 6 = 14,4	(2,4)^2 x 6 = 5,76 x 6 =34,56
1	5	11	5 x 1 = 5	1 – 2,4 = -1,4 = 1,4	1,4 X 5 = 7	(1,4)^2 x 5= 1,96 x 5 = 9,8
2	8	19	8 X 2=16	2 – 2,4 = - 0,4 = 0,4	0,4 X 8 = 3,2	(0,4)^2 x 8 = 0,16 x 8 = 1,28
3	4	23	4 X 3=12	3 – 2,4 = 0,6	0,6 X 4 = 2,4	(0,6)^2 x 4 = 0,36 x 4 = 1,44
4	1	24	1 X 4 = 4	4 – 2,4 = 1,6	1,6 X 1 = 1,6	(1,6)^2 x 1 = 2,56
5	2	26	2 X 5 = 10	5 – 2,4 = 2,6	2,6 X 2 = 5,2	(2,6)^2 x 2 = 6,76 x 2 = 13,52
6	2	28	2 X 6 =12	6 – 2,4 = 3,6	3,6 X 2 = 7,2	(3,6)^2 x 2 = 12,96 x 2 = 25,92
7	2	30	2 X 7 =14	7 – 2,4 = 4,6	4,6 X 2 = 9,2	(4,6)^2 x 2 = 21,16 x 2 = 42,32
SUMA	**30**		**73**		**50,2**	**131,4**

- **Moda es 2** (la mayor frecuencia es 8)
- **Mediana es 2** (20/2=15)
- **Media** 73 / 30 **= 2, 43**
- **Rango o recorrido:** Valor mayor (7) – valor menor (0) = **7**
- **Desviación media** = 50.2 / 30 **= 1,67**
- **Varianza** 131,4 / 30 **= 4,38**
- **Desviación típica** = √ Varianza = √4,38 **= 2,09**

- **Coeficiente de variación** = Desviación típica / media = 2,09 / 2,43 = 0, 86 **= 86 %**

EJEMPLO 2 COMPLETO

Variable (paga)	Marca de clase	Frecuencia absoluta	Frecuencia absoluta acumulada	Marca X frecuencia	Desviación /Marca de clase-Media/ (sin el signo)	Desviación X Frecuencia	Varianza (desv.)^2 x frec absoluta
0 a 10	5 (10+0/2 =5)	2	2	5 X 2 = 10	5 - 27 = 22	22 x 2 = 44	22^2 x 2 = 968
10 a 20	15	3	5	15 X 3 = 45	15 - 27= 12	12 X 3 = 36	12^2 x 3 = 432
20 a 30	25	5	10	25 X 5 = 125	25 - 27 = 2	2 X 5 = 10	2^2 x 5 = 20
30 a 40	35	8	18	35 X 8 = 280	35 - 27 = 8	8 X 8 = 64	8^2 x 8 = 512
40 a 50	45	1	19	45 X 1 = 45	45 - 27 = 18	18 X1 = 18	18^2 x 1 = 324
		SUMA = 19		**SUMA = 505**		**SUMA = 172**	**SUMA: 2274**

- **Moda = de 30 a 40** (la mayor frecuencia es 8)
- **Mediana = de 20 a 30** (19/2 =9,5 Frecuencia acumulada 10)
- **Media = 27** (505 / 19= 26,57)
- **Rango o recorrido;** Valor mayor (50) – valor menor (0) **= 50**
- **Desviación media** = 172 / 19 **= 9**
- **Varianza** = 2274 / 19 **= 119,68**
- **Desviación típica** = √ Varianza = **√119,68 = 10,93**
- **Coeficiente de variación** = Desviación típica / media = **10,93** / 27 = 0, 40 **= 40 %**

31. **El número de horas de estudio semanal que dedican 20 estudiantes al campo Científico-Tecnológico es: 1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 5, 5, 5, 5, 5, 6, 6, 7, 8, 8. Calcula el rango, la desviación media, la varianza y la desviación típica.**

32. **Un test psicotécnico de 100 preguntas ha sido realizado por 50 personas y las puntuaciones han sido las siguientes: 1, 3, 7, 15, 19, 20, 25, 25, 28, 28, 28, 30, 31, 33, 35, 35, 37, 38, 40, 40, 40, 44, 45, 45, 45, 45, 48, 48, 48, 49, 49, 50, 50, 50, 56, 57, 59,59, 60, 60, 60, 65, 67, 70, 74, 76, 76, 79, 90, 95.**

a) Elabora una tabla de frecuencias en la cual los datos estén agrupados en intervalos de amplitud 20.
b) Calcula la media.
c) Calcula la varianza y la desviación típica.

33. **Los sueldos en dos empresas de las mismas características vienen reflejados en las siguientes tablas:**

Intervalo (EMPRESA A)	Marca de clase	Frecuencia absoluta x_i
[500,1000)	750	5
[1000,1500)	1.250	13
[1500,2000)	1.750	18
[2000,2500)	2.250	12
[2500,3000]	2.750	2

Intervalo (EMPRESA B)	Marca de clase	Frecuencia absoluta x_i
[500,1000)	750	1
[1000,1500)	1.250	15
[1500,2000)	1.750	20
[2000,2500)	2.250	13
[2500,3000]	2.750	1

a) Calcula la varianza y la desviación típica de la empresa A.
b) Calcula la varianza y la desviación típica para la empresa B.
c) ¿Qué empresa tiene los precios más homogéneos?

34. A continuación se indican las calificaciones en dos grupos de alumnos. Grupo A: 4, 5, 5, 5, 6, 6, 6, 7, 8, 10. Grupo B: 3, 5, 5, 5, 6, 6, 6, 8.

a) Calcula las notas medias.
b) Calcula la desviación típica de cada grupo.
c) Calcula el coeficiente de variación de ambos grupos y compáralos.

35. Un empresario desea conocer en cuál de sus dos fábricas se rinde más. Para ello, calcula el número de horas perdidas por trabajador y semana en cada una de las fábricas y resulta ser una media de 2,5 horas semanales en la primera fábrica (A) y de 3 horas semanales en la segunda (B). Las desviaciones típicas son 1,45 horas en la primera fábrica y 1,2 horas en la segunda.

a) ¿Cuál es el coeficiente de variación en ambos casos?
b) ¿Cuál de las dos fábricas es la más homogénea o menos dispersa?
c) ¿Es representativa la media?

36. Los siguientes datos son el tiempo de duración en segundos de 50 conversaciones telefónicas: 125, 65, 80, 97, 325, 400, 98, 74, 90, 120, 240, 85, 370, 135, 78, 326, 282, 145, 192, 64, 108, 324, 207, 183, 94, 62, 315, 217, 192, 106, 78, 89, 207, 70, 69, 402, 68, 108, 361, 304, 273, 181, 91, 107, 404, 315, 125, 106, 176, 207. ¿Cuál es el rango?

a) 342
b) 82
c) 50
d) 25

37. El precio de un mismo frigorífico en varios comercios es el siguiente: 800 €; 850 €; 780 €; 830 € y 900 €. Calcula la desviación media de los precios:

a) 41,67
b) 1736,39
c) 46,58
d) 34,4

38. El precio de un mismo frigorífico en varios comercios es el siguiente: 800 €; 850 €; 780 €; 830 € y 900 €. Calcula la desviación típica de los precios:

a) 41,67
b) 1736,39
c) 46,58
d) 34,4

39. En un almacén de fruta hay dos clases de naranjas; tomamos dos muestras: las de tipo A tienen un peso medio de 200 gramos y una desviación típica = 30 gramos ; las de tipo B tienen un peso medio de 180 gramos y una desviación típica = 25 gramos . Compara ambos grupos y elige la respuesta correcta:

a) Los pesos de las naranjas del tipo A son más homogéneos, ya que el coeficiente de variación es menor.
b) Los pesos de las naranjas del tipo B son más homogéneos, ya que el coeficiente de variación es menor que el de las de tipo A.

c) Los dos tipos de naranjas tienen el mismo coeficiente de variación.
d) No se pueden comparar porque la media es diferente.

40. **Para conocer las edades de los empleados de una fábrica se toma la siguiente muestra de 60 empleados, que se agrupan en intervalos de 4 años de edad.:**

Intervalos	fi
[18,22)	2
[22,26)	14
[26,30)	12
[30,34)	12
[34,38)	14
[38,42]	6

a) Calcula la desviación media
b) Calcula la desviación típica
c) Calcula el coeficiente de variación

41. **Las dimensiones de 50 explotaciones agrícolas de una región se recogen en la siguiente tabla. Calcula la desviación típica:**

Dimensiones en Ha	Nº de explotaciones
[9,14)	16
[14,19)	24
[19,24)	5
[24,29)	4
[29,34]	1

6. Azar y probabilidad. Espacio muestral

A diario nos encontramos con distintas situaciones, en algunas de las cuales podemos predecir cuál será el resultado final (por ejemplo, a qué hora va a salir el sol) y otras en las que no tenemos ni idea de lo que va a suceder (cara o cruz al tirar una moneda).

Se llaman **fenómenos deterministas** a aquellos en los cuales se tiene absoluta certeza de cuál será el resultado. A los fenómenos en los cuales interviene el azar se les llama **aleatorios**.

En los sucesos aleatorios (por ejemplo, tirar un dado) tenemos más de un resultado posible. A cada posibilidad se le asigna un número llamado **probabilidad del suceso**. En el dado, hay una probabilidad de que salga un 6, otra de que salga un 5…

6.1. Sucesos. Espacio muestral

Lanzamos una moneda al aire. ¿Cuáles son los posibles resultados de este experimento?

Se llama **espacio muestral** al conjunto formado por todos los resultados posibles de un experimento aleatorio. Se representa por la letra **E**.

Cada uno de los resultados que forman el espacio muestral se llama **suceso elemental**.

Lanzamos una moneda al aire. ¿Cuáles son los posibles resultados de este experimento?

La moneda puede salir cara o cruz. Su espacio muestral es:

E = {Cara,Cruz}

Está formado por dos sucesos elementales:

{Cara}, {Cruz}

Si un suceso ocurre siempre, se le llama **suceso seguro**.

Si un suceso no ocurre nunca, es decir, nunca se presenta al realizar el experimento aleatorio, se le llama **suceso imposible**, y se simboliza por ∅.

Lanzamos un dado al aire y consideramos los sucesos “salir cara par” y “salir cara impar”. El espacio muestral de nuestro experimento es: E = {1,2,3,4,5,6}

El suceso salir cara par es: A = {2,4,6}

El suceso salir cara impar es:B = {1,3,5}

Cada uno de estos sucesos está formado por más de un resultado del espacio muestral. A estos sucesos se les llama **sucesos compuestos**

6.2. Operaciones con sucesos

Lanzamos de nuevo un dado al aire y consideramos los sucesos “salir cara par” y “salir múltiplo de tres”. El espacio muestral y los dos sucesos son:

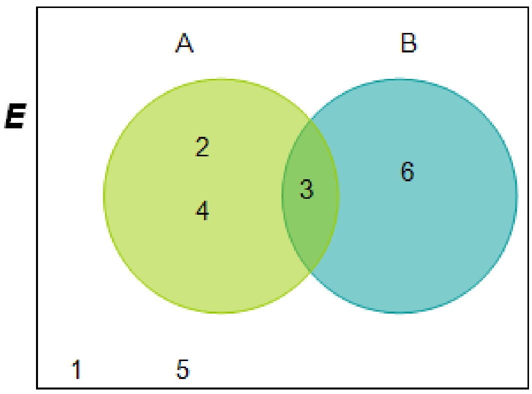
- E = {1,2,3,4,5,6},
- El suceso salir cara par es: A = {2,4,6},
- El suceso salir cara múltiplo de tres es: B = {3,6}

Las dos operaciones entre sucesos más importantes son la **unión** y la **intersección**.

El suceso formado por todos los sucesos elementales de A y de B se llama **unión de A y B** y se representa por **A U B**. En la unión consideramos que pueda suceder A **o** que pueda suceder B.

- El suceso unión de A y B es: **A U B** = {2,3, 4,6}

El suceso formado por los sucesos elementales comunes a A y a B se llama **intersección de A y B** y se representa por **A ∩ B.** En la intersección consideramos que tienen que suceder A **y** B a la vez.



- El suceso intersección de A y B es: **A ∩ B** = {3} }

Si representamos de forma gráfica los sucesos anteriores tenemos.

Todos los sucesos elementales de A más todos los sucesos elementales de B forman el suceso unión de A y B:

AU B = {2,3, 4,6}.

Los sucesos elementales comunes a A y a B forman el suceso intersección:

$A \cap B = \{3\}$

Estos sucesos se encuentran dentro del espacio muestral **E**.

Llamamos **suceso contrario** de un suceso A, al suceso formado por todos los sucesos del espacio muestral que no están en A. Se representa por $\bar{A}$.

- El suceso contrario a salir cara par $A = \{2,4,6\}$ es: $\bar{A} = \{1,3,5\}$

La unión de un suceso más su contrario nos da siempre como resultado el espacio muestral:

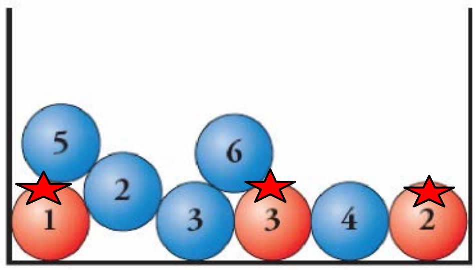
$A \cup \bar{A} = E$.

La intersección de un suceso más la de su contrario es siempre un conjunto vacío, $\emptyset$.

Decimos que dos sucesos A y B son **incompatibles** cuando no tienen ningún suceso elemental común.

Decimos que dos sucesos A y B son **compatibles** cuando tienen algún suceso elemental común.

42. Extraemos una bola de la siguiente urna:



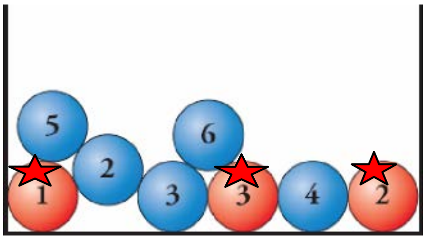
a) Escribe los siguientes sucesos:

E = Espacio muestral	A = Extraer una bola roja
B = Extraer una bola azul	C = Extraer un dos
D = Extraer un cinco	F = Extraer menos de tres

b) Contesta a estas preguntas. ¿Cuál de los sucesos anteriores es el más probable? ¿Cuál es el menos probable?

43. Vamos a considerar de nuevo la urna con las bolas rojas y azules.

Tenemos los sucesos
A = {bola roja}
B = {números pares}



44. ¿Cuál es el suceso contrario de A? ¿Y de B? ¿Son A y su contario compatibles? ¿Y A y B, son compatibles? ¿Cuánto vale A U B? Razona tus respuestas.

45. ¿Cuál es el espacio muestral que se obtiene al lanzar dos dados y anotar la suma de las cantidades que salen?

Número de lanzamientos		100	150	200	300	400	500
Cara	f_i = f. absoluta	56	68	108	132	208	255
	h_i = f. relativa	0,56	0,45	0,54	0,44	0,52	0,51
Cruz	f_i = f. absoluta	44	82	92	168	192	245
	h_i = f. relativa	0,44	0,55	0,46	0,56	0,48	0,49

Considera los sucesos A={múltiplos de 3} y B= {números primos}. Calcula el suceso A-B y B-A. ¿Son iguales?

7. Análisis de la posibilidad de que un suceso ocurra: Ley de Laplace

En un experimento aleatorio:

Llamamos **frecuencia absoluta, f_i**, al número de veces que aparece un resultado.

Llamamos **frecuencia relativa, h_i**, al cociente entre la frecuencia absoluta y el número de veces que repetimos el experimento

Lanzamos una moneda al aire diez veces. Seguramente esperamos que salga cinco veces cara y cinco veces cruz, pero la realidad nos dice que esto no es así. Sin embargo, cuando lanzamos la moneda un número grande de veces observamos que se producen ciertas regularidades.

En la siguiente tabla aparece el número de veces que hemos lanzado la moneda, el número de veces que ha salido cara, el número de veces que ha salido cruz y las correspondientes frecuencias relativas:

Podemos comprobar cómo a medida que aumentamos el número de lanzamientos, los valores de las frecuencias relativas se van aproximando al valor 0,5.

Se llama **probabilidad** al número al que se acerca la frecuencia relativa de un suceso cuando se aumenta el número de repeticiones del experimento aleatorio que se está realizando. La probabilidad, por lo tanto, es el número que nos va a dar el grado de medida de que un suceso aleatorio ocurra.

7.1. Regla de Laplace

Si lanzamos un dado (que no esté trucado) ¿cuál será la probabilidad de que salga la cara con el seis, o la cara con el uno? ¿Tenemos que lanzar el dado 100, 200, 300… veces para saber cuál es su probabilidad?

La Ley de Lapoace nos dice que la probabilidad de un suceso, A, es el cociente entre el número de casos favorables al suceso y el número de casos posibles:

$$\mathbf{P(A) = \frac{Número\ de\ casos\ favorables}{Número\ de\ casos\ posibles}}$$

Ejemplo:

Lanzamos un dado regular al aire. ¿Cuál es la probabilidad de salir seis? ¿Y de salir uno? ¿Y de salir un número mayor que cuatro?

Primero calculamos el espacio muestral, que es el que nos indica el número de casos posibles que pueden suceder.

En este caso es: E = {1,2,3,4,5,6} El número de casos posibles es seis.

El suceso salir seis, A, es sólo uno, luego el número de casos favorables es uno:

A = {1}

$$P(A) = \frac{\text{Nº de casos favorables}}{\text{Número de casos posibles}} = \frac{1}{6} \approx 0{,}167$$

El suceso salir uno, B, es uno, luego el número de casos favorables es uno:

B = {1}

$$P(B) = \frac{\text{Nº de casos favorables}}{\text{Número de casos posibles}} = \frac{1}{6} \approx 0{,}167$$

El suceso salir un número mayor que 4, C, es uno, luego el número de casos favorables es uno:

C = {1}

$$P(C) = \frac{\text{Nº de casos favorables}}{\text{Número de casos posibles}} = \frac{2}{6} \approx 0{,}333$$

7.2. Propiedades de la probabilidad

El valor de la probabilidad será un número que estará entre 0 y 1. La probabilidad del suceso seguro será 1 y la probabilidad del suceso imposible será 0.

La suma de las probabilidades de todos los sucesos elementales de un experimento aleatorio es uno.

La **probabilidad de un suceso más la de su contrario** da siempre la unidad que es la probabilidad del espacio muestral.

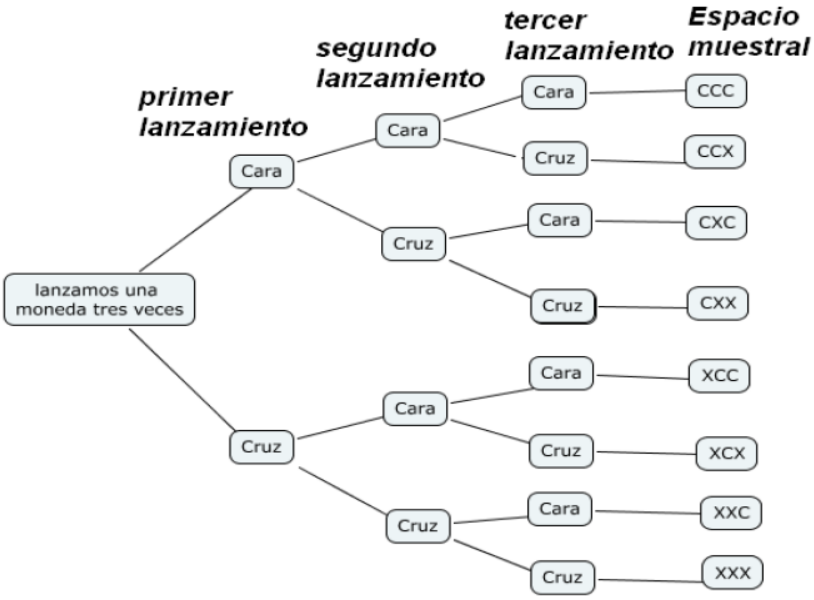
46. **Disponemos de una baraja española de 40 cartas. Responde a las siguientes cuestiones: Al extraer una carta, calcula la probabilidad de:**

a) Sacar figura.
b) No sacar copas.

47. **En una ciudad se publican dos periódicos, *Noticias* y *Tu ciudad*. Se sabe que la probabilidad de que una persona, elegida al azar, lea *Noticias*, es 0,30, y de que lea *Tu ciudad* es 0,25. Además, hay personas que leen ambos periódicos con una probabilidad de 0,05. Calcula la probabilidad de que una persona al azar lea alguno de los periódicos.**

48. **Un club deportivo tiene 300 socios de los cuales 150 juegan al fútbol, 100 juegan al baloncesto, y 90 practican natación. Sabemos que los que practican natación no hacen otro deporte. Eligiendo un socio al azar cual es la probabilidad de:**

a) Que practique fútbol.
b) Que practique baloncesto.
c) Que practique natación.
d) Que practique fútbol y baloncesto.
e) Que practique fútbol o baloncesto.
f) Que practique fútbol o natación.



49. **Al administrar una medicina a un paciente se controlan los posibles efectos secundarios, observando los siguientes síntomas: A = "no sufre efectos secundarios", B = "siente náuseas", C = "le produce somnolencia".**

Administramos el medicamento a 200 personas, obteniendo los siguientes resultados:

Sucesos	fi
A	122
B	46
C	42
B∩C	10

Calcula las probabilidades de los sucesos: A ∪ B, B∪C, A,B

8. Probabilidad compuesta

Si lanzamos una moneda al aire, tenemos un experimento aleatorio simple. Si lanzamos dos monedas al aire, o si lanzamos una moneda dos veces, tenemos un **experimento aleatorio compuesto**

El espacio muestral, si lanzamos una moneda dos veces, es: E = {CC, CX,XC,XX}

Los sucesos elementales son: {CC},{CX},{XC},{XX}

Si lanzamos una moneda tres veces, su espacio muestral será:

E = {CCC, CCX,CXC,CXX,XCC,XCX,XXC,XXX}

Cada vez que el número de lanzamientos de la moneda es mayor, resulta más complicado obtener su espacio muestral.

Existen diferentes recursos para poder calcular este espacio muestral. Uno de ellos es la realización de diagramas de árbol.

8.1. Experimentos dependientes e independientes

Los experimentos simples que forman un experimento compuesto pueden ser de dos tipos: **dependientes** (el resultado de cada uno influye en los siguientes) o **independientes**.

Sacamos dos cartas de una baraja española, ¿influye el resultado de la primera extracción en el resultado de la segunda extracción?, ¿cuál sería la probabilidad de que la segunda carta que extraemos sea un as si la primera es un as?

La probabilidad de sacar un as en la primera extracción, sabiendo que la baraja tiene 4 ases y 40 cartas es:

$$P(\text{ 1ª As}) = \frac{\text{Nº de casos favorables As}}{\text{Número de casos posibles}} = \frac{4}{40} = 0{,}1$$

Si hemos sacado un as de la baraja, ya no hay cuatro, quedan tres ases de 39 cartas. La probabilidad de sacar un as en la segunda extracción es:

$$P(\text{ 2ª As}) = \frac{\text{Nº de casos favorables As}}{\text{Número de casos posibles}} = \frac{3}{39} \approx 0{,}077$$

En el caso del lanzamiento de una moneda varias veces, o de un dado, el resultado del primer lanzamiento no influye en el lanzamiento del segundo. Las probabilidades no varían.

8.2. Probabilidad compuesta

¿Cuál es la probabilidad de que al lanzar una moneda dos veces salgan las dos veces cara? Podemos calcular la probabilidad utilizando directamente la regla de Laplace:

E = {CC, CX,XC,XX}

$$P(\text{ CC}) = \frac{\text{Nº de casos favorables CC}}{\text{Número de casos posibles}} = \frac{1}{4} = 0{,}25$$

50. **Obtén el espacio muestral al lanzar un dado y una moneda. ¿Es un experimento compuesto? ¿Cuál es la probabilidad de sacar un número par? ¿Depende el suceso par de salir cara o cruz en la moneda?**

51. **4Al extraer dos cartas de una baraja española, calcula la probabilidad de:**

a) La primera sea un as y la segunda un rey (MULTIPLICA LAS DOS PROBABILIDADES)
b) Que una sea un as y la otra un rey.
c) Al extraer tres cartas, calcula la probabilidad de que las tres sean bastos.

52. **Una urna contiene 3 bolas blancas y 2 negras. Consideremos el experimento consistente en lanzar una moneda al aire y a continuación extraer una bola de la urna. Sean los sucesos A = “la moneda sale cara”, B = “extraer bola negra”. ¿B es un suceso dependiente o independiente de A?**

Dibuja el diagrama de árbol correspondiente a este experimento. Halla la probabilidad de obtener cara y bola negra.

53. **Sean dos urnas, la primera con 2 bolas negras y 3 blancas, y la segunda con 1 bola negra y 2 blancas. Lanzamos una moneda al aire, y si sale cara extraemos una bola de la urna 1, mientras que si sale cruz la extraemos de la urna 2.**

Consideremos los sucesos A = "obtener cara" y B = "extraer bola blanca". ¿El suceso B depende o no del suceso A? Dibuja el diagrama de árbol del experimento, asignando probabilidades a los distintos sucesos elementales.

9. Aplicación de la probabilidad en los juegos de azar

9.1. Sorteo de la ONCE

Este sorteo está compuesto por cupones en los que hay 100.000 números distintos y cada uno tiene 1.000 series.

$$P(\text{ salga el número}) = \frac{\text{Nº de casos favorables nº}}{\text{Número de casos posibles}} = \frac{1}{100.000} = 0{,}00001$$

La probabilidad disminuye para acertar la serie. Ahora los casos posibles son 100.000 X 1.000

$$P(\text{ salga nº y serie}) = \frac{\text{Nº de casos favorables nº y serie}}{\text{Número de casos posibles}} = \frac{1}{100.000.000} = 0{,}00000001$$

9.2 Lotería Nacional

En el sorteo ordinario de la Lotería Nacional hay 12 series de 100.000 billetes, de cada billete se hacen 10 fracciones (por eso se llaman décimos).

La probabilidad de obtener el primer premio será

$$P(\text{ primer premio}) = \frac{\text{Nº de casos favorables 1º}}{\text{Número de casos posibles}} = \frac{1}{100.000} = 0{,}00001$$

La probabilidad de obtener el premio especial será

Casos posibles: 100.000 X 12 X 10 = 12.000.000

$$P(\text{ especial}) = \frac{\text{Nº de casos favorables}}{\text{Número de casos posibles}} = \frac{1}{12.000.000} = 0{,}00000008$$

9.3. Quiniela futbolística

En cada partido se debe marcar una de tres posibilidades (1, x, 2). Como hay 15 partidos, las combinaciones posibles resultarían de multiplicar el 3 quince veces (3 3 3 3 3…) = 14.348.907

$$P(\text{ 15 aciertos}) = \frac{\text{Nº de casos favorables}}{\text{Número de casos posibles}} = \frac{1}{14.348.907} = 0{,}00000007$$

54. **Calcula la probabilidad de acertar un boleto de la Lotería Primitiva sabiendo que el número de casos posibles es 13.983.816.**

GENERALITAT VALENCIANA
Conselleria d'Educació, Investigació, Cultura i Esport

PRUEBA DE ACCESO A CICLOS FORMATIVOS DE GRADO MEDIO
JUNIO 2018
PARTE CIENTÍFICO-MATEMÁTICO-TÉCNICA:
A) MATEMÁTICAS
Duración: 1 hora

Información: Se puede usar calculadora. Las aproximaciones decimales, cuando sean necesarias, se harán por redondeo hasta las centésimas. Los ejercicios deben estar resueltos paso a paso y con las explicaciones oportunas.

Pregunta 1. (2 puntos) Si llamamos x = edad actual de Pablo; expresa, en función de x, los siguientes enunciados (el primero es un ejemplo):

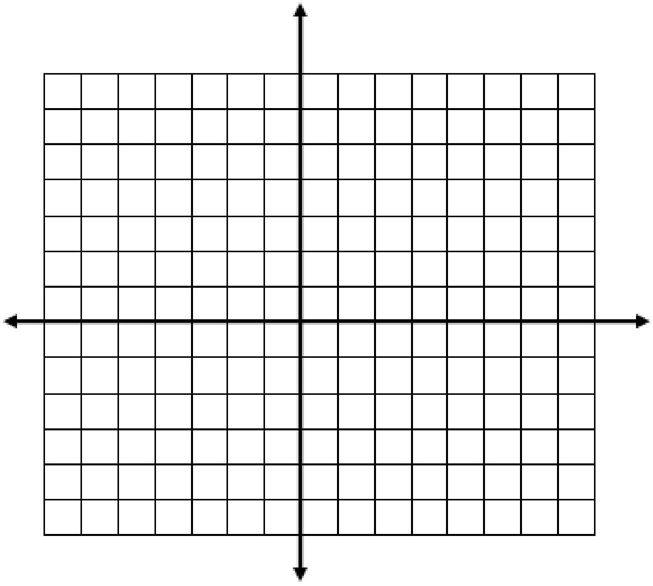
El triple de la edad de Pablo	**3x**
La edad de Pablo hace 5 años	
El doble de la edad que tendrá dentro de tres años	
La mitad de la edad que tenía hace cuatro años	
Los años que le faltan para llegar a tener 100	
El 80% de su edad actual	

Pregunta 2. **(2 puntos)** Al estirar una goma elástica, su longitud aumenta un 30% y, en esa posición, mide 1014 mm. ¿Cuántos centímetros mide sin estirar?

CRITERIOS DE EVALUACIÓN Y CALIFICACIÓN La calificación de esta parte o apartado se adaptará a lo que establece la Resolución de 13 de febrero de 2018, de la Dirección General de Formación Profesional y Enseñanzas de Régimen Especial, por la que se convocan pruebas de acceso a los ciclos formativos de Formación Profesional (DOGV 8253, de 13.03.2018).

Pregunta 3. (2 puntos) Representa gráficamente la función lineal y = -2x + 3 . Rellena, previamente, la tabla de valores adjunta como en el ejemplo de la primera linea.

x	y
1	- 2 · 1 + 3 = - 2 + 3 = **1**
0	
2	
-1	
-2	



Pregunta 4. Se tiene un depósito de agua cilíndrico de 3 m de altura y 4 m de diámetro de la base.

a) **(1 punto)** Calcula el coste, en euros, de construir una tapa circular de madera si nos la cobran a 5 céntimos / dm^2

b) **(1 punto)** Calcula cuántos litros de agua caben en el depósito.

CRITERIOS DE EVALUACIÓN Y CALIFICACIÓN
La calificación de esta parte o apartado se adaptará a lo que establece la Resolución de 13 de febrero de 2018, de la Dirección General de Formación Profesional y Enseñanzas de Régimen Especial, por la que se convocan pruebas de acceso a los ciclos formativos de Formación Profesional (DOGV 8253, de 13.03.2018).

Pregunta 5. Las notas de inglés de los 100 alumnos de 2º ESO de un instituto vienen recogidas en la siguiente tabla (f_i es la frecuencia absoluta):

Notas	f_i	h_i	F_i
3	17		
4	30		
5	25		
6	10		
7	15		
9	3		

a) **(1 punto)** Rellena las dos columnas de la tabla que indican la frecuencia relativa (h_i) y la frecuencia absoluta acumulada (F_i)

b) **(1 punto)** Calcula la media y la mediana de las notas.

CRITERIOS DE EVALUACIÓN Y CALIFICACIÓN
La calificación de esta parte o apartado se adaptará a lo que establece la Resolución de 13 de febrero de 2018, de la Dirección General de Formación Profesional y Enseñanzas de Régimen Especial, por la que se convocan pruebas de acceso a los ciclos formativos de Formación Profesional (DOGV 8253, de 13.03.2018).

GENERALITAT VALENCIANA
CONSELLERIA D'EDUCACIÓ, INVESTIGACIÓ, CULTURA I ESPORT

PRUEBA DE ACCESO A CICLOS FORMATIVOS DE GRADO MEDIO
JUNIO 2017
PARTE CIENTÍFICO-MATEMÁTICO-TÉCNICA:
A) MATEMÁTICAS
Duración: 1 hora

Pregunta 1. La tercera parte del dinero que ahorró una familia el año pasado lo gastó en viajes y la quinta parte en decorar la casa.

a) ¿Qué fracción del dinero ahorrado les queda?

b) Si todavía les quedan 875 € ¿qué cantidad de dinero habían ahorrado?

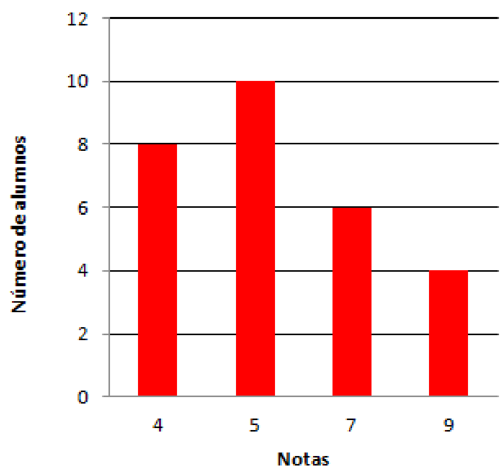
Pregunta 2. Un abrigo que estaba rebajado un 30% me ha costado 25,48 €. ¿Qué costaba antes de la rebaja?

Pregunta 3. Resuelve, paso a paso, las siguientes ecuaciones:

a) $2(x+2)-5(x-3)=4$ b) $x^2+7x+10=0$

Pregunta 4. Se quiere construir un huerto rectangular en el que la diagonal mida 40 m y la base 32 m. ¿Cuántos metros de tela metálica harán falta para vallar su perímetro?

Pregunta 5. El siguiente diagrama de barras representa las notas obtenidas por el alumnado de una clase en el último examen de matemáticas.



a) Calcula la media de las notas del alumnado

b) ¿Qué porcentaje del alumnado obtuvo más de un 6?

Información: Se puede usar calculadora. Las aproximaciones decimales, cuando sean necesarias, se harán por redondeo hasta las centésimas. Todos los ejercicios puntúan igual y deben estar resueltos paso a paso y con las explicaciones oportunas.
Cada pregunta se valorará de 0 a 2 puntos. En las preguntas que tienen dos apartados, cada apartado se valorará de 0 a 1 punto.

CRITERIOS DE EVALUACIÓN Y CALIFICACIÓN

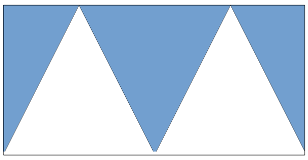
La calificación de esta parte o apartado se adaptará a lo establecido en la RESOLUCIÓN de 8 de febrero de 2017, de la Dirección General de Formación Profesional y Enseñanzas de Régimen Especial, por la que se convocan pruebas de acceso a los ciclos formativos de Formación Profesional (DOGV 13-02-2017).

PRUEBA DE ACCESO
A CICLOS FORMATIVOS DE GRADO MEDIO
JUNIO 2015
PARTE CIENTÍFICO MATEMÁTICO TÉCNICA
APARTADO b1 MATEMÁTICAS
Duración: 1 hora

1. El combustible almacenado en un depósito dura 40 días, si la calefacción se enciende 5 horas al día. ¿Cuánto durará si se enciende 8 horas al día?

2. Un club de excursionistas planifica una salida en bicicleta en la que participa un grupo de asociados. En la primera etapa recorren los dos quintos del total del trayecto, en la segunda etapa, un cuarto del resto, en la tercera etapa, la mitad de lo que queda y en la última etapa recorren 18 km. ¿Cuál es la longitud total del trayecto?

3. El logotipo de una empresa se diseña de la siguiente forma: Dentro de un rectángulo de base 12 cm, se sitúan dos triángulos equiláteros consecutivos, tal como se muestra en la figura. Calcula el coste de esmaltar la zona sombreada si la tarifa es de 0,5 € por cm^2.



4. Ricardo ha echado 18,84 dm^3 de agua en un recipiente cilíndrico de 2 dm de radio ¿Qué altura alcanzará el agua?

5. Hemos preguntado a un grupo de personas por el número de días que hacen deporte a la semana. Las respuestas han sido las siguientes:

1, 1, 2, 2, 3, 4, 5, 3, 4, 2, 2, 3, 3, 2, 4

a) Realiza el diagrama de barras de la distribución de frecuencias.

b) Calcula la media aritmética, la mediana y la moda de la distribución de frecuencias.

Información para los aspirantes

Criterios de evaluación y calificación
Todas las preguntas puntúan igual (2 puntos). Si una pregunta tiene dos apartados, cada apartado puntúa 1 punto. Se puntuará la corrección del planteamiento, y de los cálculos realizados para llegar a la solución, así como la claridad en la exposición del razonamiento.
NOTA
Se puede utilizar calculadora. Las aproximaciones decimales, si son necesarias, se harán por redondeo hasta las centésimas. Los cálculos en los que intervenga el número π se harán con la aproximación de dos decimales.

CRITERIOS DE EVALUACIÓN Y CALIFICACIÓN
- Todas las preguntas puntúan igual. - La calificación de esta Parte o Apartado se adaptará a lo establecido en la RESOLUCIÓN de 5 de marzo de 2015, de la Dirección General de Formación Profesional y Enseñanzas de Régimen Especial, por la que se convocan pruebas de acceso a los ciclos formativos de Formación Profesional (DOCV 18-03-2015).

PRUEBA DE ACCESO
A CICLOS FORMATIVOS DE GRADO MEDIO
JUNIO 2014
PARTE CIENTÍFICO MATEMÁTICO TÉCNICA
APARTADO b1 MATEMÁTICAS
Duración: 1 hora

NOTA: Realiza las operaciones en el espacio en blanco de cada pregunta. No se puntuarán resultados finales sin las operaciones correspondientes.

Pregunta 1. Tres amigos trabajan en la misma fábrica. Santiago camina 1/4 de kilómetro desde su casa al trabajo, Juan 2/5 y Javier 1/8 .Indica cuál de los tres vive más cerca de la fábrica y cuál más lejos. Justifica la respuesta.

Solución:_____________

Pregunta 2. Efectúa las siguientes operaciones combinadas, simplificando al máximo el resultado, cuando sea posible

a) $3\cdot(2 + 3\cdot 9 – 5) + (12 – 4:2 + 1^2) =$

Solución:_____________

$$b)\ \left(\frac{2}{4}+\frac{1}{3}\right):\left(\frac{3}{5}-\frac{1}{2}\right)=$$

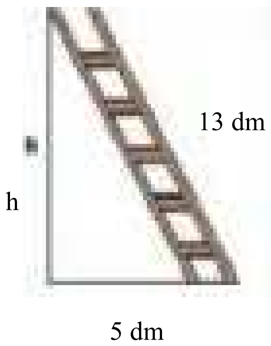
Solución:_____________

CRITERIOS DE EVALUACIÓN Y CALIFICACIÓN
Todas las preguntas/cuestiones puntúan igual.
La calificación de esta Parte o Apartado se adaptará a lo establecido en la RESOLUCIÓN de 2 de abril de 2014, de la Dirección General de Formación Profesional y Enseñanzas de Régimen Especial, por la que se convocan pruebas de acceso a los ciclos formativos de Formación Profesional (DOCV 09-04-2014).

Pregunta 3. Miguel tiene 30 años y su padre tiene el doble.
¿Cuántos años hace que la edad del padre era el triple que la del hijo?

Solución:--_____________

Pregunta 4. Hemos apoyado una escalera de hierro de 13dm de longitud en una pared vertical y el extremo inferior de dicha escalera dista 5dm de la pared. Calcula a qué distancia del suelo está apoyado el extremo superior de la escalera en la pared.



Solución:_____________

Pregunta 5. Al preguntar a unos alumnos el número de hermanos que tenían, se obtuvieron las respuestas dadas en la siguiente tabla:

Número de hermanos	0	1	2	3	4	5
Respuestas	4	10	6	5	3	2

a) ¿Qué porcentaje de alumnos tienen más de tres hermanos?

Solución:_____________

b) Calcula la media y la moda de los datos anteriores

Solución: MEDIA=________ **MODA=**____________

CRITERIOS DE EVALUACIÓN Y CALIFICACIÓN
Todas las preguntas/cuestiones puntúan igual.
La calificación de esta Parte o Apartado se adaptará a lo establecido en la RESOLUCIÓN de 2 de abril de 2014, de la Dirección General de Formación Profesional y Enseñanzas de Régimen Especial, por la que se convocan pruebas de acceso a los ciclos formativos de Formación Profesional (DOCV 09-04-2014).

GENERALITAT VALENCIANA
CONSELLERIA D'EDUCACIÓ, CULTURA I ESPORT

PRUEBA DE ACCESO
A CICLOS FORMATIVOS DE GRADO MEDIO

JUNIO 2013

PARTE CIENTÍFICO MATEMÁTICO TÉCNICA
APARTADO b1 MATEMÁTICAS
Duración: 1 hora

1º Con la crisis actual el beneficio de un comerciante se ve reducido un 20 %. Si su beneficio actual es de 1800 € al mes, calcula que beneficio tenía antes de la crisis.

2º Un empresario trabaja 8 horas diarias para poder entregar un pedido en 5 días, ¿cuántas horas diarias debería trabajar para poder servir el pedido en 4 días?

3º Resuelve el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{l} 2x + y = 13 \\ 3x - 2y = 9 \end{array}\right\}$$

4º Me encuentro a 6 metros del pie de una torre que mide 8 metros de altura. ¿A qué distancia, en línea recta, me encuentro de la parte más alta de la torre?

5º. La siguiente tabla recoge el tiempo en minutos que tardan en llegar desde sus respectivas casas al colegio una serie de alumnos.

Tiempo	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Alumnos	2	6	4	2	3	5	3	3	5	2

Calcula la media, la moda y la mediana de los datos anteriores

CRITERIOS DE EVALUACIÓN Y CALIFICACIÓN
- Todas las preguntas puntúan igual.
- La calificación de esta Parte o Apartado se adaptará a lo establecido en la RESOLUCIÓN de 26 de marzo de 2013, de la Dirección General de Formación Profesional y Enseñanzas de Régimen Especial, por la que se convocan pruebas de acceso a los ciclos formativos de Formación Profesional (DOCV 05-04-2013).

PRUEBA DE ACCESO
A CICLOS FORMATIVOS DE GRADO MEDIO
JUNIO 2012

PARTE CIENTÍFICO MATEMÁTICO TÉCNICA
APARTADO b1 MATEMÁTICAS

Duración: 1 hora

Pregunta 1.
Un conductor quiere hacer un recorrido de 360 km, en una primera etapa recorre las 2/5 partes del trayecto, en la segunda etapa recorre 1/4 del camino que le queda. ¿Cuántos km ha recorrido? ¿Qué fracción del camino le falta por recorrer?

Pregunta 2.
Cada vez que un ciclista gana una carrera recibe 10 puntos y cada vez que pierde le quitan cuatro. Al cabo de 20 carreras ha acumulado 60 puntos. Calcula cuántas carreras ha ganado y cuántas ha perdido.

Pregunta 3.
Resuelve el siguiente sistema de ecuaciones:
$$\left.\begin{array}{l} 3x - y = 12 \\ 5x - 3y = 8 \end{array}\right\}$$

Pregunta 4.
En una plaza circular de 80 m de diámetro hay un seto también circular de 10 m de radio. Calcula el área de la zona libre de la plaza.

Pregunta 5.
Luisa se anotó los gastos en € que tuvo durante 24 domingos seguidos: 37, 40, 39, 38, 40, 40, 38, 41, 39, 39, 42, 40, 40, 41, 42, 42, 43, 38, 43, 37, 41, 39, 41, y 40.

a) Representa los datos mediante un diagrama de barras.
b) Calcula la media, la mediana y la moda.

CRITERIOS DE EVALUACIÓN Y CALIFICACIÓN
- Todas las preguntas puntúan igual.
- La calificación de esta Parte o Apartado se adaptará a lo establecido en la RESOLUCIÓN de 3 de abril de 2012 de la Dirección General de Formación y Cualificación Profesional por la que se convocan Pruebas de Acceso a los ciclos Formativos de Formación Profesional. (DOCV 27.04.2012)

PRUEBA DE ACCESO
A CICLOS FORMATIVOS DE GRADO MEDIO
JUNIO 2011

PARTE CIENTÍFICO MATEMÁTICO TÉCNICA
APARTADO b1 MATEMÁTICAS

Duración: 1 hora

1.- Calcule las siguientes operaciones combinadas:

[(+3) - (+5) + (+4)] : [(+15) : (-3) – (-7)] =

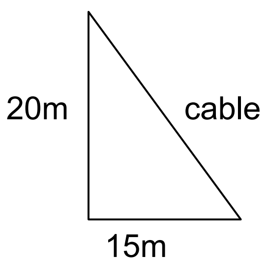
2.- Por cometer una infracción con su coche Juan ha recibido una multa de 175 €. Si la abona durante el periodo de pago voluntario le hacen un descuento del 30 %, pero si la paga una vez transcurrido dicho periodo le aplican un recargo del 25%. Calcule cuánto tendrá que abonar en cada caso.

3.- Una máquina coloca la tapa a 260 botes en 25 minutos. ¿Cuántos botes tapará en 2 horas y media?

4.- Resuelva el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\left.\begin{aligned} -6x+5y&=3 \\ 3x+y&=9 \end{aligned}\right\}$$

5.- Se quiere sujetar una antena de televisión que esta a una altura de 20 metros, para ello se van a tender desde su extremo superior, tirantes que se sujetan en tierra a la distancia de 15 m de la base de la antena. ¿Cuántos metros mide cada cable?



CRITERIOS DE EVALUACIÓN Y CALIFICACIÓN
- Todas las cuestiones puntúan igual. - La calificación de esta Parte o Apartado se adaptará a lo establecido en la RESOLUCIÓN de 17 de marzo de 2011, de la Dirección General de Evaluación, Innovación y Calidad Educativa y de la Formación Profesional, por la que se convocan pruebas de acceso a los ciclos formativos de Formación Profesional. (DOCV 01.04.2011)

PRUEBA DE ACCESO
A CICLOS FORMATIVOS DE GRADO MEDIO
JUNIO2010

PARTE CIENTÍFICO MATEMÁTICO TÉCNICA
APARTADO b1 MATEMÁTICAS

Duración: 1 hora

1.- Calcule y simplifique el resultado hasta obtener la fracción irreducible:

a) $\frac{5}{6}-\left[1-\left(\frac{1}{4}+\frac{2}{3}\right)\right]=$

b) $\left(3-\frac{5}{7}\right)\cdot\left(\frac{1}{6}+\frac{4}{3}-2\right)=$

2.- Hemos pagado 0,96 € por un paquete de saladitos, lo que supone un aumento del 12% sobre el precio que tenía el mes pasado. ¿Qué costaba antes de aplicarle la subida?

3.- Tres amigos se han repartido 20.000 € de un premio de lotería de modo que, el primero ha recibido 1.000 € más que el segundo y éste, 2.000 € más que el tercero. ¿Qué cantidad del premio corresponde a cada uno?

4.- Resuelva el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\left.\begin{aligned} 2x-3y&=5 \\ 5x+y&=21 \end{aligned}\right\}$$

5.- Las temperaturas máximas de una ciudad durante los 20 primeros días del mes de marzo, han sido estas:

8	6	12	9	8
7	9	11	10	8
7	10	9	7	9
6	12	11	5	9

Halle:

a) La temperatura máxima media.

b) La moda de dichas temperaturas máximas y el valor de la mediana.

CRITERIOS DE EVALUACIÓN Y CALIFICACIÓN
- Todas las cuestiones puntúan igual.
- La calificación de esta Parte o Apartado se adaptará a lo establecido en la RESOLUCIÓN de 15 de marzo de 2010, de la Dirección general de Evaluación, Innovación y Calidad Educativa y de la Formación Profesional, por la que se convocan pruebas de acceso a los ciclos formativos de Formación Profesional. (DOCV 13.04.2010)