REPASO DE MATEMÁTICAS

Ficha 01

Acceso a CFGS	*Acceso UNI 25*
PORCENTAJES: SI	**PORCENTAJES: NO**
ECUACIONES: SI	**ECUACIONES: NO**
POLINOMIOS: NO	**POLINOMIOS: SI**

Exámenes de Acceso CFGS

PORCENTAJES

Una de las aplicaciones de la proporcionalidad directa son los porcentajes. En tu vida diaria oyes continuamente hablar de tantos por ciento: la subida salarial será de un 2%, las rebajas son de un 20%, el IPC. ha subido este mes un 0,8%, el partido A ha obtenido un 3% más de votos que el partido B... ¿Qué significan estos %? Si te dicen que la subida salarial es de un 2% (que se lee "2 por ciento"), significa que por cada 100 € que cobres tu sueldo aumentará 2 €. Verás que los problemas de porcentajes son un caso particular de los problemas de proporcionalidad directa y por tanto se pueden resolver aplicando la regla de tres.

ECUACIONES

Resolución de ecuaciones de primer grado

4x + x = 7 + 2x + 8

Agrupamos en cada miembro los términos semejantes: 5x = 2x + 15

Utilizando la regla de la suma dejamos en un miembro las incógnitas y los números en el otro.

5x - 2x = 15. A esto se llama transponer términos en una ecuación. Queda 3x = 15 x = 15/3 = 5

Nos queda que x = 5, que es la solución de la ecuación.

Resolución de la ecuación completa de segundo grado

La ecuación **a**x^2**+bx** + **c** = **0** se resuelve mediante la siguiente expresión:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Ejemplo: x^2**-5x** + **6** = **0** Identificamos los coeficientes: a = 1, b = -5, c = 6. Sustituimos en la solución:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2.a} = \frac{5 \pm \sqrt{5^2 - 4.1.6}}{2.1} = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 24}}{2} = \frac{5 \pm \sqrt{1}}{2} = \frac{5 \pm 1}{2} = < \begin{matrix} 3 \\ 2 \end{matrix}$$

Sistemas de ecuaciones

Método de sustitución

Este método despeja una de las dos incógnitas en función de la otra en una de las dos ecuaciones. Luego sustituye el valor obtenido en la otra ecuación. Ejemplo:

$$\boldsymbol{x+y=6}$$
$$\boldsymbol{x-y=4}$$

1º Despejamos x o y en una de las dos ecuaciones. Por ejemplo, **y** en la primera:

y = 6 — x

2º Sustituimos este valor en la otra ecuación. En este caso, en la segunda:

x - (6 - x) = 4

Nos queda una ecuación con una sola incógnita, que resolvemos:

$$x-(6-x)=4 \Rightarrow x-6+x=4 \Rightarrow 2x=4+6 \Rightarrow 2x=10 \Rightarrow x=\frac{10}{2}=5$$

3º Calculamos el valor de la otra incógnita: y = 6 — x —>y = $y=6-x \Rightarrow y=6-5=1$

La solución que se obtiene es: (x,y) = (5,1)

4º El último paso es comprobar que la solución obtenida está bien:

$$\begin{array}{ll} x+y=6 & 5+1=6 \\ x-y=4 & 5-1=4 \end{array}$$

PORCENTAJES

2018

1.- En un concesionario de coches hay un cartel que dice: “Oferta de la semana. Sin intereses. Llévese este coche dando una entrada del 25% de su valor y el resto pagando una cuota mensual de 390 euros durante tres años”.

a) Calcula el valor del coche. *(1 punto)*
b) Manteniendo las mismas condiciones y dando una entrada del 35%, ¿a cuánto ascendería la cuota mensual? *(1 punto)*

2017

1. En una empresa, la directora de recursos humanos busca una persona responsable de tienda. De las personas que se presentan para el puesto, el 21% son mujeres. La tercera parte de los hombres y una de cada cinco mujeres cumplen los requisitos. El total de no cualificados para el puesto es de 1042 personas.
   a) ¿Cuántas personas se presentan? (1,5 puntos)
   b) ¿Cuántas mujeres hay cualificadas para el puesto? (0,5 puntos)

2015

Pregunta 1 **a)** Por cada diez baños abonados en una piscina, regalan uno más; es decir, en total son once los baños. Calcula razonadamente el porcentaje de descuento que están aplicando al regalar ese baño.

b) En una tienda de electrodomésticos celebran “el día sin IVA”. Es decir, venden los productos rebajados al precio que tenían antes de cargarles el 21% en concepto de IVA. Averigua cuánto habrá que pagar por un televisor que está a la venta, con IVA incluido, por 847 €.

2014

1.- a) En un establecimiento aplicaron sobre un producto un descuento del 25% y, posteriormente, sobre este precio rebajado, aplicaron otro descuento del 16%. Calcula el precio que costaba originalmente un producto que con los dos descuentos se quedó en 189 euros.

b) Cuando una balsa de riego está llena hasta sus 3/7 partes, todavía le faltan 258 m^3 para que quede completamente llena. Calcula la capacidad total de esta balsa.

2013

1. Compramos 100 kg de café por 485 euros. Tostarlos cuesta 95 euros, produciéndose una merma de 1/5 de su peso.

a) Si vendemos todo el café tostado, ¿cuál será el precio del kilo para obtener un beneficio del 12%?

b) Si vendemos el café tostado y fijamos su precio en 8 euros/kilo ¿cuál será el porcentaje de beneficio previsto? En este caso, ¿cuántos kg deberíamos vender, como mínimo, para no tener pérdidas?

ECUACIONES

2018

2.- Resuelve la siguiente ecuación: *(2 puntos)*

$$4x^2-12=\frac{(5x-3)\cdot(5x+3)}{x^2}$$

2017

2. Resuelve la ecuación: $\sqrt{6-6x}+2=2x$ (2 puntos)

2014

2.- Resuelve el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{l}\frac{3(2x+y)}{2}=-6\\ \\ \frac{x}{2}-\frac{x-y}{5}=-1\end{array}\right\}$$

2013

2.

a) Resuelve la ecuación:

$$\frac{-18}{x^2-11}=x^2$$

b) Cuando un senderista lleva recorridos los 3/7 de un camino aún le quedan 11,6 km por recorrer. Calcula razonadamente la longitud del camino.

POLINOMIOS: NO

Exámenes de Acceso UNI 25

PORCENTAJES: NO
ECUACIONES: NO
POLINOMIOS: Sí

POLINOMIOS
Suma y resta de polinomios

$(3x^2 + 4xy)+ (2x^2 -xy)= 3x^2 + 4xy + 2x^2 - x y = 5x^2 + 3xy$

$(3x^2 + 4xy)-(2x^2 - xy) = 3x^2 + 4xy - 2x^2 + xy = x^2 + 5xy$

Producto de un polinomio por un polinomio

$(3 x^2 +2 y) \cdot (2 x^2y- 4 y) = (3 x^2) (2 x^2y -4 y) + (2 y)(2 x^2y - 4 y) =$

$(3 x^2) (2 x^2y) + (3 x^2) (-4 y) + (2 y) (2 x^2y) + (2y) (-4y) = 6 x^4y - 12 x^2y + 4 x^2y^2 - 8 y^2$

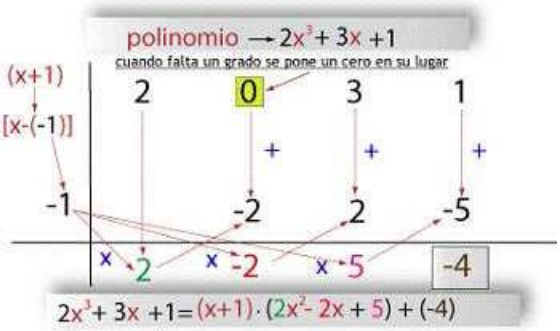
División de monomios
Para dividir monomios se dividen los coeficientes y se restan los exponentes de las letras. **$25x^7 : 5x^2 = 5x^5$**
Potencias de polinomios: Identidades notables
Para calcular $(x + y)^2$ Tendremos que multiplicar: $(x + y)(x + y) = x^2 +2xy + y^2$

Hay tres **productos** que se denominan **identidades o igualdades notables**:
Cuadrado de la suma: $(x + y)^2 = (x + y)(x + y) = x^2 + 2xy + y^2$
Cuadrado de la diferencia: $(x - y)^2 = (x - y)(x - y) = x^2 - 2xy + y^2$
Diferencia de cuadrdados o Producto de una suma por una diferencia: $(x + y)\backslash x -y) = x^2 - y^2$

Factorización. Regla de Ruffini
Factorizar polinomios consiste en descomponerlos en el producto de monomios. Hay varios métodos:
1. Sacar factor común: Es aplicar la propiedad distributiva de la multiplicación respecto de la suma, Así, la propiedad distributiva dice: $a \cdot (x + y) = a \cdot x + a \cdot y$ Si tenemos que factorizar la expresión $7x + 7y$, basta aplicar la propiedad distributiva y decir que $7x + 7y = 7(x + y)$ 2.
2. Aplicar la regla de Ruffini: Se empela para polinomios que tienen raíces enteras. Se trata de encontrar valores de x números enteros que al sustituirlos en el polinomio nos da cero.
Si un polinomio de, por ejemplo, cuarto grado $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$ tiene cuatro raíces enteras, x_1, x_2, x_3 y x_4 se factoriza así:

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = a(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4)$$

división de $2x^3 + 3x + 1$ entre $x + 1$:



Para encontrar las raíces, vamos, probando los divisores del término independiente, en este caso de 12. O sea que se prueba con 1, -1, 2, -2, 3, -3, 4, -4, 6, -6, 12 y –12

$$P(x) = x^4 + 2x^3 - 7x^2 - 8x + 12$$

	1	2	−7	−8	12
1		1	3	−4	−12
	1	3	−4	−12	0
2		2	10	12	
	1	5	6	0	
−2		−2	−6		
	1	3	0		

$P(x) = (x - 1)(x^3 + 3x^2 - 4x - 12)$

$P(x) = (x - 1)(x - 2)(x^2 + 5x + 6)$

$P(x) = x^4 + 2x^3 - 7x^2 - 8x + 12 = (x - 1)(x - 2)(x + 2)(x + 3)$

Regla de Ruffini para resolver ecuaciones y factorizar

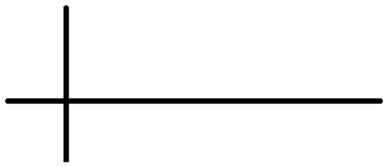
Para reolver **ecuaciones de grado superior a dos**, se utiliza el **método de Ruffini.**
Con la **regla de Ruffini**, solamente se obtienen **las soluciones enteras**. Si la ecuación tiene soluciones complejas o reales, éste método no es válido.
Veremos que para obtener las soluciones de la ecuación, previamente hay que factorizar, por lo que con el mismo ejemplo explicaremos ambos conceptos.
Vamos a resolver un ejemplo explicando paso por paso.
Tenemos la siguiente ecuación:

$$x^3 + 2x^2 - x - 2 = 0$$

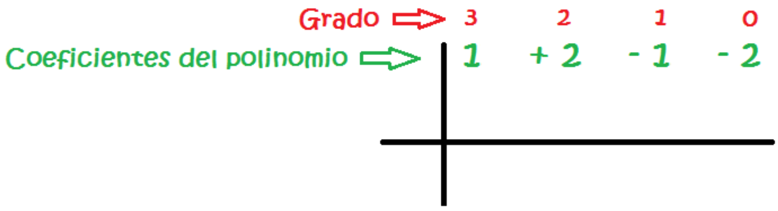
1 – Identificamos los **coeficientes de cada término**, que son los números que van delante de la incógnita. Para la ecuación anterior, los represento en verde para identificarlos:

$$1x^3 + 2x^2 - 1x - 2 = 0$$

2 – Trazamos dos líneas perpendiculares de esta forma:



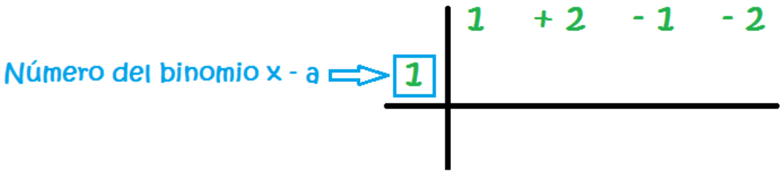
3 – Colocamos los coeficientes **ordenados por su grado de mayor o menor**:



En la **regla de Ruffini**, el grado va disminuyendo de 1 en 1 y cada grado tiene su lugar. Por ejemplo si no tuviérmos ningún término que tenga x^2, en el lugar del grado 2, se colocaría un 0.
Los números que hemos escrito hasta ahora en el método de Ruffini, es equivalente a escribir la ecuación, es decir:

$$1 \quad +2 \quad -1 \quad -2 \iff 1x^3 + 2x^2 - 1x - 2 = 0$$

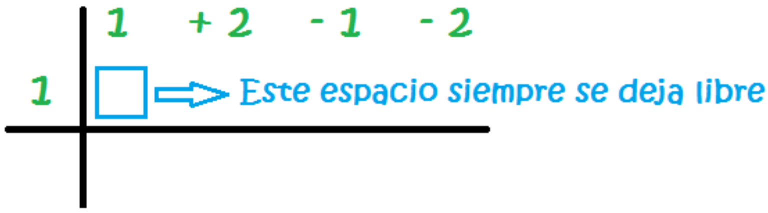
4 – Ahora escribimos un número a la izquierda de la línea vertical. Más adelante explicaremos qué número colocar aquí y por qué. De momento, empezamos con el 1.
Ese número corresponde al número (a) del binomio x – a:



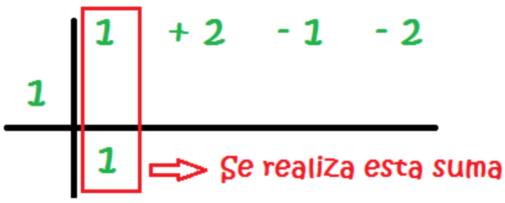
En este caso, escribir ahí un 1, significa el binomio (x – 1) en el método de Ruffini

$$1 \iff x - 1$$

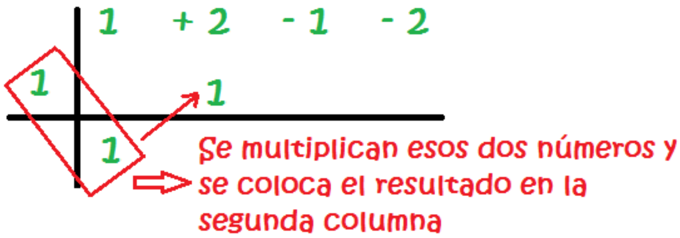
5 – Empezamos a ejecutar el método. El **primer hueco** de la segunda fila, **siempre se deja libre**:



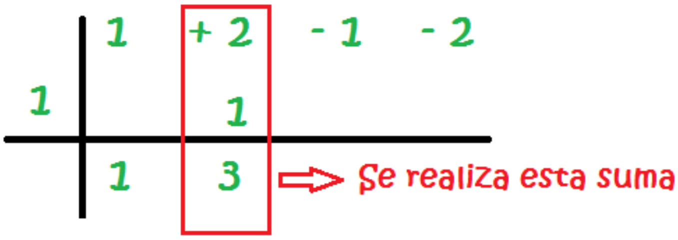
6 – Se hace la suma de la **primera columna** y el resultado se pone abajo:



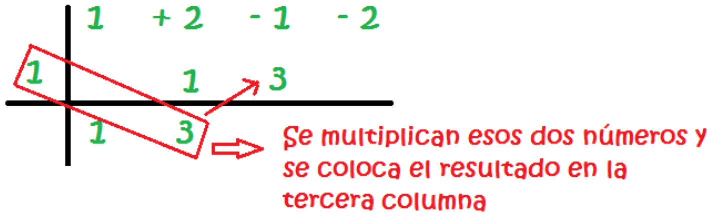
7 – Se multiplica el número de la izquierda por el resultado de la suma de la primera columna. El resultado se coloca en el hueco de la **segunda columna**:



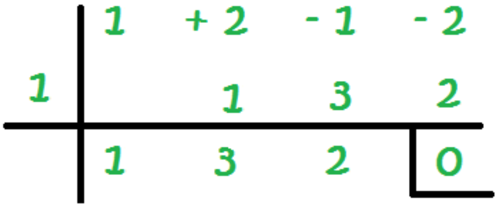
8 – Se realiza la suma de la **segunda columna**:



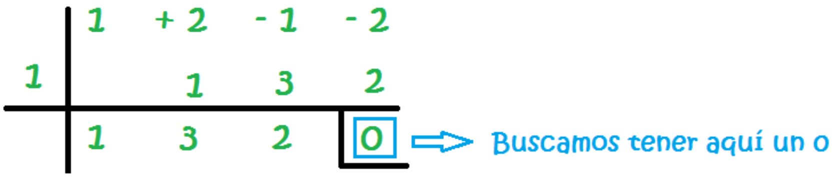
9 – Se multiplica el número de la izquierda por el resultado de la suma de la segunda columna. El resultado se coloca en el hueco de la **tercera columna**:



10 – Así sucesivamente hasta completar todas las columnas:

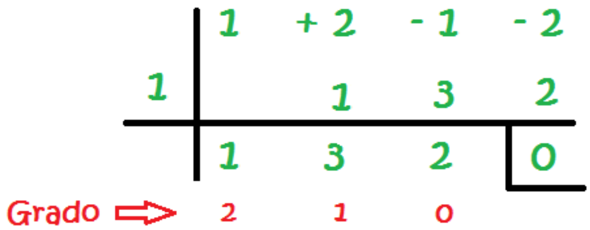


El objetivo es que **en la última columna tengamos un 0**. Esta es la explicación de **qué número colocar a la izquierda** de la línea:



Si no tenemos un cero, tendríamos que **probar con otro número** a la izquierda de la línea vertical y **reiniciar el proceso**.

Una vez hemos obtenido un cero al final, vamos a ver **qué significa** lo que tenemos hasta aquí:



Lo que nos ha quedado en la última fila es otra ecuación, pero ahora, el número que está a la izquierda del 0, tiene grado 0 y éste va aumentando de 1 en 1 hacia la izquierda. En este caso, nos queda lo **equivalente** a tener esta ecuación:

$$1 \quad 3 \quad 2 \Longleftrightarrow x^2 + 3x + 2$$

Y como hemos visto antes, el 1 a la izquierda de la línea vertical significaba:

$$1 \Longleftrightarrow x - 1$$

Lo que quiere decir que lo que tenemos hasta ahora es el **producto de esas dos ecuaciones**, que es igual a la ecuación original:

$$x^3 + 2x^2 - x - 2 =$$
$$= (x^2 + 3x + 2)(x - 1)$$

11 – Con la fila que nos ha quedado, **volvemos a empezar**. Empezamos probando con el 1:

	1	+2	-1	-2
1		1	3	2
	1	3	2	0
1				

12 – Igual que antes, vamos multiplicando con el resultado de sumar en cada columna:

	1	+2	-1	-2
1		1	3	2
	1	3	2	0
1		1	4	
	1	4	6	

Al final tenemos un 6, y lo que queremos es tener un cero. Por tanto, **debemos seguir probando**, con -1, con 2, con -2… hasta encontrar el número que nos haga tener un cero en la última columna.

	1	+2	-1	-2
1		1	3	2
	1	3	2	0
1		1	4	
	1	4	$\boxed{6}$	

$\Rightarrow$ No tenemos un 0.
Hay que probar con otro número

El número que nos hace tener un 0 al final es el -2:

	1	+2	-1	-2
1		1	3	2
	1	3	2	0
-2		-2	-2	
	1	1	0	

¿Y ahora que hacemos? ¿Cómo sabemos que hemos terminado?
El mayor grado de la última fila es 1, por tanto hemos terminado:

	1	+2	-1	-2
1		1	3	2
	1	3	2	0
-2		-2	-2	
	1	1	0	
Grado ⇨	1	0		

El resultado de la factorización de la ecuacún por el método de Ruffini es el producto de la última fila y de los números que están a la izquierda de la línea vertical, pero expresados en forma de ecuación:

$1 \Leftrightarrow x - 1$

$-2 \Leftrightarrow x - (-2) = x + 2$

$1 \quad 1 \Leftrightarrow x + 1$

Por tanto, nuestra ecuación será:

$$x^3 + 2x^2 - x - 2 =$$

$$= (x+1)(x+2)(x-1)$$

Hasta aquí hemos **factorizado la ecuación**. Ahora vamos a resolverla:

1 – Igualamos a 0, tal y como estaba en un principio

$$x^3 + 2x^2 - x - 2 =$$

$$= (x+1)(x+2)(x-1) = 0$$

2 – Recuerda que cuando una multiplicación de dos o más factores tiene como resultado 0, quiere decir que uno de los factores es 0, ya que cualquier valor multiplicado por 0 es 0. Por tanto, cualquier factor podría ser 0.

Nos quedan tres ecuaciones de primer grado para despejar, de donde obtenemos **las tres soluciones** (ya que es una ecuación de tercer grado):

$$(x+1) = 0 \Rightarrow x = -1$$

$$(x+2) = 0 \Rightarrow x = -2$$

$$(x-1) = 0 \Rightarrow x = 1$$

Soluciones: -1, -2 y 1

La Regla de Ruffini para Dividir entre Binomios de la forma x-a

En este caso, la **regla de Ruffini** sirve para realizar una división de polinomios, donde el divisor es un binomio de la forma (x-a).

Por ejemplo, nos piden realizar la siguiente división:

$$\frac{x^3 + 2x^2 - x - 2}{x - 2} =$$

Como el divisor es x-2, es decir, es de la forma x-a, utilizamos la regla de Ruffini. Solo debemos aplicar la regla una sola vez.

Esta vez, el número que tenemos que colocar a la izquierda de la línea vertical es 2 (**la a de x-a**) y **no tenemos que preocuparnos de si tenemos un cero en la columna final** o no. El resultado que nos dé, será el resto de la división:

	1	+2	-1	-2
2		2	8	14
	1	4	7	12
Grado ⇨	2	1	0	Resto

El cociente de la división será el polinomio formado por los coeficientes de la última fila:

$C(x)=x^2+4x+7$

Y el resto será el último elemento de la última fila:

$R(x)=12$

2019

2018

(a) (*Se calificará de* 0 *a* 1,5) Obtener razonadamente el cociente de la división entre los polinomios x^3-6x^2+4x+1 y $x-1$ con la regla de Ruffini y sin la regla de Ruffini.

(c) (*Se calificará de* 0 *a* 1) Obtener razonadamente todas las soluciones de la ecuación $x^3-6x^2+4x+1=0$.

2017

2016

Resuelve los dos apartados siguientes:

a) (*Se calificará de* 0 *a* 1,5) Obtener razonadamente el cociente de los polinomios x^3-6x^2+4x+1 y $x-1$, con la regla de Ruffini y sin la regla de Ruffini.

b) (*Se calificará de* 0 *a* 1) Obtener razonadamente las soluciones de la ecuación $x^3-6x^2+4x+1=0$.

2015

a) (*Se calificará de* 0 *a* 1,25) Factorizar el polinomio $x^3-6x^2+11x-6$.

2014

2013