

Ficha 06

1. RECORDAD

Ecuación de 2º grado:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2 \cdot a}$$

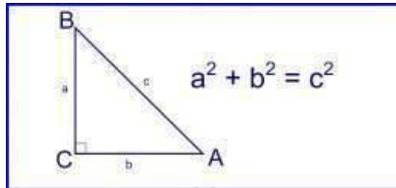
Expresiones notables:

Cuadrado de la suma: $(x + y)^2 = (x + y)(x + y) = x^2 + 2xy + y^2$

Cuadrado de la diferencia: $(x - y)^2 = (x - y)(x - y) = x^2 - 2xy + y^2$

Producto de una suma por una diferencia: $(x + y)(x - y) = x^2 - y^2$ (diferencia de cuadrados)

Teorema de Pitágoras:



GEOMETRÍA

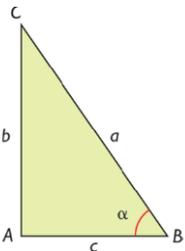
Aunque en el Sistema Internacional los ángulos se miden en radianes (**rad**) estamos habituados a usar los ° (grados sexagesimales)

El ángulo completo de una circunferencia de radio r , es 2π radianes

1 circunferencia = $360^\circ = 2\pi$ rad

Media circunferencia = $180^\circ = \pi$ rad

1 ángulo recto = $90^\circ = \pi/2$ rad



Razones trigonométricas de un ángulo agudo

Dado el ángulo α

$$\text{Seno de } \alpha = \frac{\text{cateto opuesto de } \alpha}{\text{hipotenusa}} = \frac{b}{a}$$

$$\text{Coseno de } \alpha = \frac{\text{cateto contiguo de } \alpha}{\text{hipotenusa}} = \frac{c}{a}$$

$$\text{Tangente de } \alpha = \frac{\text{cateto opuesto de } \alpha}{\text{cateto contiguo de } \alpha} = \frac{b}{c}$$

$$\text{sen } 0^\circ = 0 \quad \text{cos } 0^\circ = 1$$

$$\text{sen } 90^\circ = 1 \quad \text{cos } 90^\circ = 0$$

$$\text{sen } 180^\circ = 0 \quad \text{cos } 180^\circ = -1$$

Expresión de una función mediante un texto

El texto nos relaciona las dos variables. Por ejemplo: $y = f(x) = a + bx$, $y = 33 + 0,95x$

Ecuación de una recta que pasa por 2 puntos A(x_1, y_1) y B(x_2, y_2)

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$$

2. SOLUCIONES A EJERCICIOS ANTERIORES

1. CFGS 2017.

Irene compró acciones de tres empresas, A, B y C, por un total de 20.000 euros. Posteriormente las vendió obteniendo un beneficio del 5,5% de lo invertido en su compra. En las acciones de las empresas A y B ganó un 30% y un 10% respectivamente y en las de la empresa C perdió un 15%. Si las acciones de la empresa C le costaron a Irene cinco veces más que las de B, calcula el dinero invertido en la compra de las acciones de cada una de las empresas. (2 puntos)

YA LO HICIMOS

2. CFGS 2015

Tenemos tres cajas, A, B y C, que contienen entre todas un total de 78 bombones. Si pasamos 4 bombones de la caja B a la A, en ésta habrá doble bombones que en aquélla. Sabemos, además, que si pasamos un bombón de la C a la B, en ambas cajas habrá el mismo número de bombones. Calcula razonadamente el número de bombones que hay en cada una de las cajas.

Bombones de la caja A = x

Bombones de la caja B = y

Bombones de la caja C = z

Primera ecuación: $x + y + z = 78$

Si pasamos 4 bombones de la B a la A, en la B tendremos $y - 4$ y en la A tendremos $x + 4$

En la A hay ahora doble de bombones que en la B

Segunda ecuación: $x + 4 = 2(y - 4)$

Si pasamos un bombón de la C a la B, en la C habrá $z - 1$, y en la B $y + 1$

Y ahora dice que tienen el mismo número de bombones (C y B)

Tercera ecuación: $z - 1 = y + 1$

Es un sistema de 3 ecuaciones con 3 incógnitas

$$x + y + z = 78$$

$$x + 4 = 2(y - 4)$$

$$x + 4 = 2y - 8$$

$$z - 1 = y + 1$$

$$z = y + 1 + 1 \quad z = y + 2$$

$$x + y + z = 78$$

$$x + y + y + 2 = 78$$

$$x + 2y = 78 - 2$$

$$x + 2y = 76$$

$$x + 4 = 2y - 8$$

$$x + 2y = 76 \quad x = 76 - 2y$$

$$x + 4 = 2y - 8$$

$$76 - 2y + 4 = 2y - 8$$

$$76 + 4 + 8 = 2y + 2y$$

$$88 = 4y$$

$$y = 88/4 = 22$$

$$x = 76 - 2y$$

$$x = 76 - 2 \cdot 22 = 32$$

$$z = y + 2$$

$$z = 22 + 2 = 24$$

3. CFGS 2015

El beneficio diario en una tienda por la venta de un determinado producto, en relación con el precio de venta de dicho producto, viene representado por la función: $f(x) = 100x - 10x^2$. Siendo $f(x)$ el beneficio en euros y "x" el precio de venta también en euros.

Sabiendo que $0 < x < 8$, calcula:

a) El beneficio cuando el precio de venta se ha fijado en 2,8 €.

b) El precio asignado al producto cuando el beneficio ha sido de 187,5 €.

c) El precio al que se ha de vender dicho producto si se pretende obtener el máximo beneficio.

$$a) f(x) = 100x - 10x^2$$

$$f(x) = 100 \cdot 2,8 - 10 \cdot (2,8)^2 = 280 - 10 \cdot 7,84 = 280 - 78,4 = 201,6 \text{ €}$$

$$b) f(x) = 100x - 10x^2$$

$$187,5 = 100 \cdot x - 10 \cdot x^2 \quad 10x^2 - 100x + 187,5 = 0 \text{ (Ec de 2º grado)}$$

Dividimos todo por 10 para simplificarla: $x^2 - 10x + 18,75 = 0$

$$x = (10 \pm \sqrt{10^2 - 4 \cdot 1 \cdot 18,75}) / 2 \cdot 1 = (10 \pm \sqrt{25}) / 2 = (10 \pm 5) / 2$$

$$x = (10 + 5) / 2 = 7,5$$

$$x = (10 - 5) / 2 = 2,5 \text{ No válida}$$

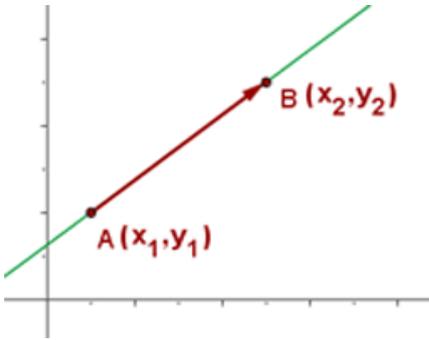
Ejemplo:

Hallar la ecuación en forma explícita de la recta que pasa por A (1,5) y tiene como pendiente $m = -2$.

La ecuación general $y - y_1 = m(x - x_1)$ donde x_1 e y_1 son las coordenadas del punto A, o sea $x_1 = 1, y_1 = 5$

$$y - 5 = -2(x - 1) \quad y - 5 = -2x + 2 \quad y = -2x + 7$$

Ecuación de la recta que pasa por dos puntos



Sean los puntos $A(x_1, y_1)$ y $B(x_2, y_2)$ que determinan una recta r .

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$$

Ejemplo:

Hallar la ecuación de la recta que pasa por $A(1,3)$ y $B(2,-5)$

Sustituimos los valores en la forma continua:

$$\frac{x - 1}{2 - 1} = \frac{y - 3}{-5 - 3} \quad -8x + 8 = y - 3$$

Ecuación de la recta:

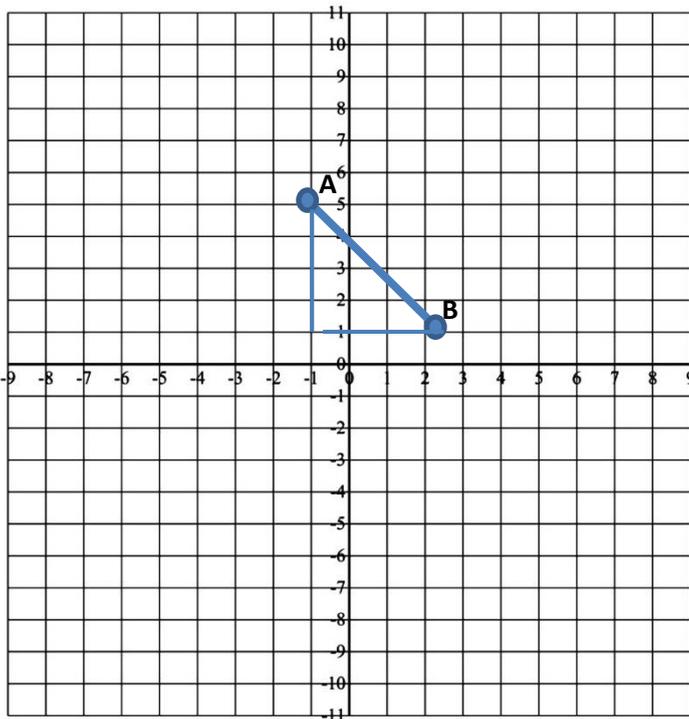
$$8x + y - 11 = 0$$

4. EJERCICIOS DE EXÁMENES

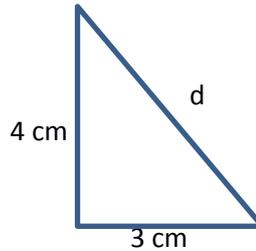
2015. Un plano lleva incorporado un sistema de coordenadas con los ejes perpendiculares y las distancias en cm. En dicho sistema se ha señalado dos puntos: $A = (-1, 5)$ y $B = (2, 1)$. En A se sitúa un restaurante y en B una parada de autobús.

a) Calcula la distancia en km que hay entre el restaurante y la parada del autobús sabiendo que cada cm del plano representa 150 m en la realidad.

b) Si se construye un camino en línea recta desde la parada al restaurante, halla la ecuación de la recta que representa en el plano dicho camino.



a) Buscamos el triángulo rectángulo y ponemos sus medidas



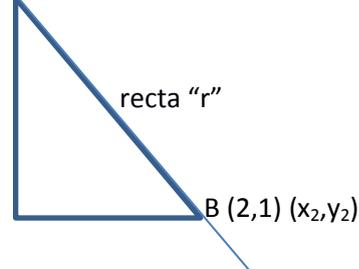
Teorema de Pitágoras

$$d^2 = 4^2 + 3^2 \quad d^2 = 16 + 9 = 25$$

$$d = 5 \text{ cm}$$

$$d \text{ real} = 5 \cdot 150 = 750 \text{ m}$$

b) $A(-1,5) (x_1, y_1)$



La ecuación de una recta que pasa por dos puntos es:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$$

$$(x - (-1)) / (2 - (-1)) = (y - 5) / (1 - 5)$$

$$(x + 1) / 3 = (y - 5) / (-4)$$

O bien se despeja la "y":

$$(x + 1) (-4) = 3 (y - 5)$$

$$-3y = 4x - 11$$

$$-4x - 4 = 3y - 15$$

$$3y = -4x + 11$$

$$-4x - 3y = -11$$

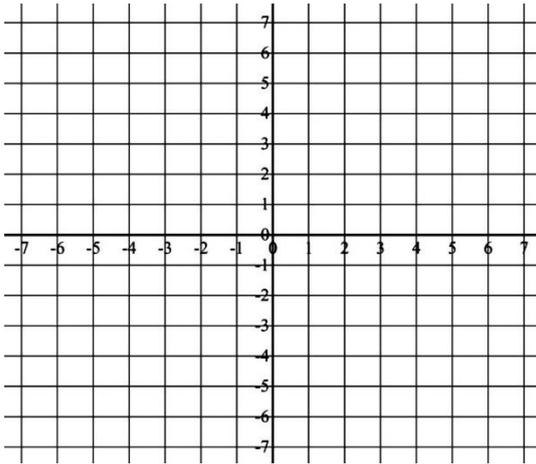
$$y = -4x/3 + 11/3$$

2013. En un mapa, que incorpora unos ejes de coordenadas perpendiculares con las unidades en centímetros, figuran dos poblaciones A y B, situadas respectivamente en los puntos (3, 0) y (-1, -3) .

a) Calcula la distancia en el plano entre las dos poblaciones

b) Calcula la distancia real en km si la escala es 1:50.000

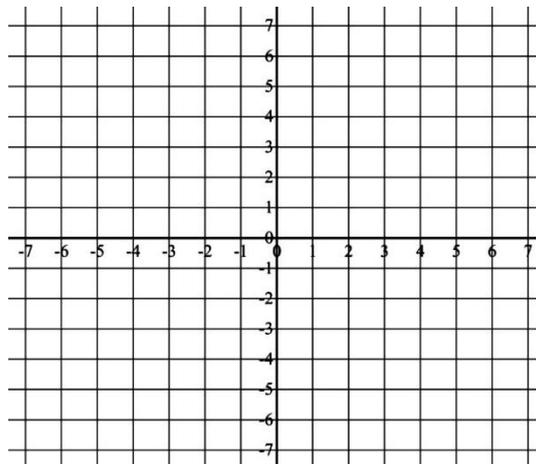
c) Si pudiéramos construir una carretera totalmente recta entre las dos poblaciones, ¿cuál sería la ecuación que cumpliría en el plano dicha carretera?



2012. Un mapa cuya escala es 1 : 20.000 lleva incorporado un sistema de referencia euclídeo cuyas unidades vienen en cm. En el punto (-2,1) se encuentra situado un pozo y en el punto (6,7) se encuentra situada una fábrica. Queremos construir una tubería de cemento que, en línea recta, lleve el agua desde el pozo a la fábrica. Calcula:

a) La longitud de la tubería en el mapa y en la realidad.

b) La ecuación de la recta que sustenta la tubería.



REPASO

1. Un producto que costaba 55 euros subió de precio un 12%. Más tarde volvió a subir, quedando su precio final en 70,84 euros.

a) Calcula el porcentaje de la segunda subida, desde el segundo precio al tercero.

b) Calcula el porcentaje total de subida desde el primer precio hasta el tercero.

2. Hallar dos números sabiendo que el primero es una unidad mayor que el doble del segundo y que el doble del primero es una unidad menor que el quintuple del segundo.

3. Resolver las siguientes ecuaciones:

$$\text{a) } \frac{8-x}{2-x} - \frac{8+x}{2+x} = \frac{9}{4}$$

$$\text{b) } \frac{3}{2} \left(\frac{x}{2} - 2 \right)^2 - \frac{x+1}{8} = \frac{1}{8} - \frac{x-1}{4}$$

4. Hallar razonadamente el área de un triángulo rectángulo tal que su hipotenusa mide 5 cm y uno de sus ángulos 30° .