Teorema de Gauss del campo eléctrico

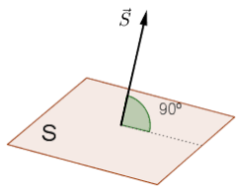
El flujo de campo eléctrico

Gauss (1777-1855) estableció una relación entre el número de líneas de campo eléctrico que atraviesan una superficie cerrada y la carga almacenada en su interior.

El **flujo eléctrico** o **flujo del campo eléctrico** (Φ_E) es una magnitud escalar que representa el número de líneas de campo que atraviesan una determinada superficie. Su unidad en el Sistema Internacional es el newton por metro cuadrado y por culombio ($N \cdot m^2/C$).

Esta definición comprende dos conceptos importantes:

- Por un lado, el número de líneas de fuerza, que como ya sabemos es siempre proporcional al módulo de la intensidad del campo eléctrico.
- Por otro, la superficie que atraviesan dichas líneas de fuerza. Cada superficie plana se puede representar por medio de un vector ***S*** que se caracteriza porque:
    - es siempre **perpendicular** a dicha superficie.
    - su módulo equivale al **área** de la superficie.



Para calcular el flujo eléctrico consideraremos varios casos:

Campo eléctrico uniforme

- Superficie plana perpendicular al campo eléctrico.
- Superficie plana no perpendicular al campo eléctrico.

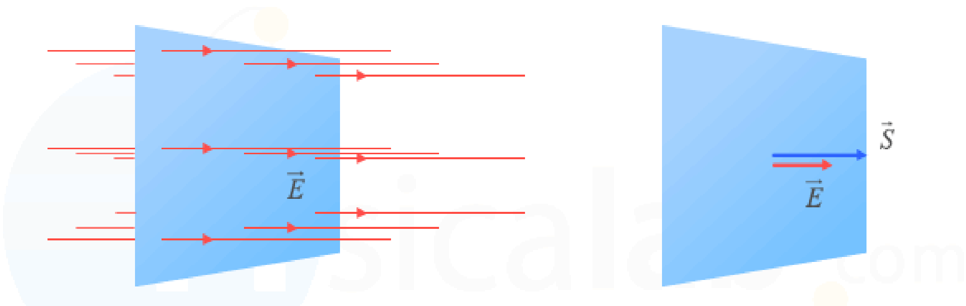
Campo eléctrico no uniforme

- Superficie cualquiera abierta.
- Superficie cualquiera cerrada.

Flujo eléctrico de un campo eléctrico uniforme a través de una superficie plana perpendicular

Si nos atenemos a la definición de flujo eléctrico, cuando disponemos de un campo eléctrico uniforme ***E*** y una superficie ***S***, ambos vectores; el flujo eléctrico (Φ_E) se puede calcular por medio de la siguiente expresión:

ϕ_E = ***E.S*** (producto escalar)



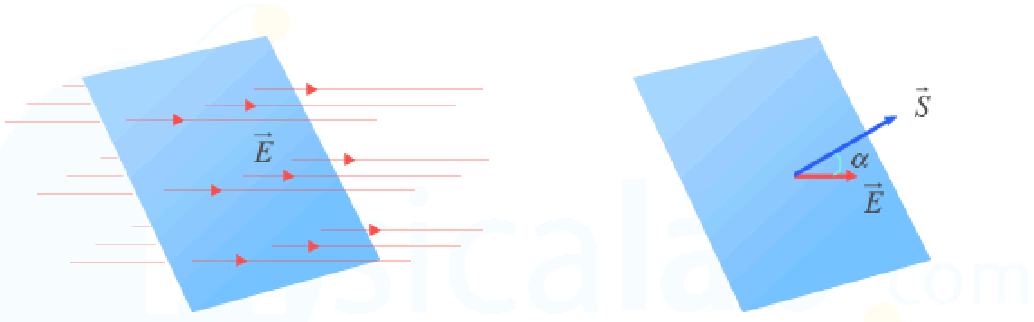
Campo eléctrico uniforme y superficie plana perpendicular al mismo

Si un campo eléctrico atraviesa perpendicularmente una superficie plana abierta, su vector S y E forman un ángulo de 0º. Esto implica el que el flujo eléctrico que atraviesa dicha superficie es el producto de los módulos del vector S de la superficie y el vector de intensidad de campo eléctrico E.

Si consideramos que la superficie es perpendicular al campo eléctrico (es decir, S y E forman un ángulo de 0º entre ellos): ϕ_E = ***E.S*** (producto escalar) = E.S.cosα = E.S

Flujo eléctrico de un campo eléctrico uniforme a través de una superficie plana no perpendicular

En este caso, el ángulo (α) que forman el vector ***E*** y el vector ***S*** no es 0, por tanto el flujo eléctrico dependerá de dicho ángulo: ϕ_E = ***E.S*** (producto escalar) = E.S.cosα



Campo eléctrico uniforme y superficie plana no perpendicular

Si un campo eléctrico atraviesa una superficie plana abierta formando un ángulo α, con ella, el flujo eléctrico que atraviesa dicha superficie es el producto de los módulos del vector S de la superficie, el vector de intensidad de campo eléctrico E y el coseno del ángulo que forman ambos vectores.

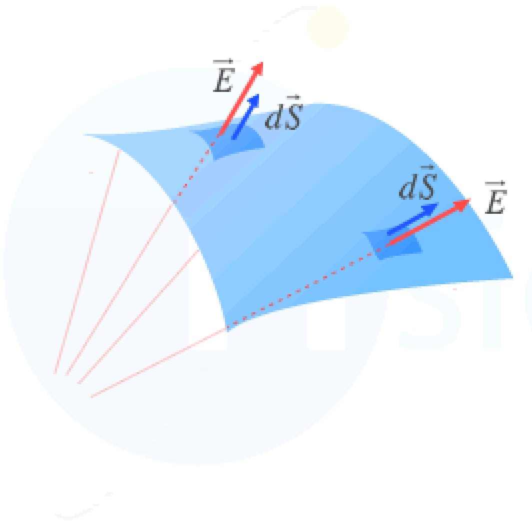
Flujo eléctrico de un campo eléctrico no uniforme a través de cualquier tipo de superficie abierta.

Lo más común es que los campos eléctricos no sean uniformes y las superficies no sean planas. En este caso, para calcular el flujo eléctrico es necesario dividir la superficie en pequeñas superficies elementales (***dS***), cuyo carácter infinitesimal nos permita considerar que ***E*** en cada una de esas superficies elementales es constante. De esta forma, podemos definir el flujo que atraviesa cada superficie elemental de la siguiente forma:

$d\phi_E = \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{S}$ (Recuerda que $d\phi_E$ y que ***dS*** son elementos infinitesimales llamados diferenciales)

Una vez conocido el flujo que atraviesa cada superficie elemental, el flujo total que atraviesa toda la superficie será la suma de todos esos diferenciales de flujo. Sumar todos los elementos infinitesimales o diferenciales $d\phi_E$ es "integrar"

El flujo eléctrico que atraviesa una superficie no plana y creado por un campo eléctrico no uniforme se puede calcular por medio de la siguiente expresión: $\phi_E = \int_S \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{S}$



Campo eléctrico no uniforme y superficie abierta cualquiera

Si un campo eléctrico no uniforme atraviesa una superficie cualquiera podemos dividirla en pequeñas superficies elementales de forma que el campo eléctrico en cada una de ellas sea perpendicular a dicha superficie.

El flujo de toda la superficie es la suma de los flujos de todas las superficies elementales.

Flujo eléctrico de un campo eléctrico no uniforme a través de cualquier tipo de superficie cerrada.

Basándonos en el flujo de campo eléctricos no uniformes que atraviesan superficies abiertas, es posible deducir que si disponemos de una superficie cualquiera cerrada, el flujo en dicha superficie se puede obtener como la suma de los flujos de cada una de las superficies abiertas que constituyen dicha superficie.

El flujo eléctrico que atraviesa una superficie cerrada cualquiera creado por un campo eléctrico no uniforme se puede calcular por medio de la siguiente expresión: $\phi_E = \oint_S \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{S}$

(La integral que aparece con el circulito se llama integral cíclica. Se dice que una función tiene una integral cíclica si su integral a lo largo de cualquier curva cerrada en su dominio es igual a cero. En otras palabras, si el valor de la integral de la función a lo largo de cualquier trayectoria cerrada es independiente de la trayectoria elegida y siempre es cero, entonces se dice que la función tiene una integral cíclica). **De cualquier manera, a efectos de cálculos, la tomamos como una integral normal.**

Teorema de Gauss

Gauss determinó en esta ley una relación entre el flujo eléctrico que atraviesa una superficie cerrada y la carga eléctrica que se encuentra en su interior.

El teorema de Gauss establece que el flujo de campo eléctrico que atraviesa una superficie cerrada es igual a la carga neta situada en su interior dividida por la constante dieléctrica del medio.

$\phi_E = \oint_S \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{S} = Q / \varepsilon$

ϕ_E es el flujo neto de carga
E es la intensidad de campo eléctrico
dS es un diferencial del vector de superficie (trozo elemental de superficie)
Q es la carga contenida en la superficie
ε es la constante dieléctrica del medio.

La permitividad eléctrica o *constante dieléctrica* ε, que vimos en la K de la ley de Coulomb, es un parámetro físico de los materiales que describe cuánto son afectados por un campo eléctrico. La permitividad eléctrica del vacío es constante:
$\varepsilon_0 = 8{,}854.10^{-12}\ C^2 / (N \cdot m^2)$

Se ve que el flujo eléctrico no depende de la forma de la superficie cerrada, tan solo de la carga que posee en su interior y de la constante dieléctrica del medio.

El flujo eléctrico que circula a través de cualquier superficie cerrada no depende de la forma de dicha superficie.

Aplicaciones de la ley de Gauss

Aunque a la hora de calcular el campo eléctrico generado por ciertas superficies cargadas es posible hacer uso de la ley de Coulomb, en muchas ocasiones resulta más sencillo utilizar el teorema de Gauss sobre el flujo eléctrico. Para ello es común seguir los siguientes pasos:

1. Se escoge una superficie cerrada perpendicular al campo eléctrico y cuya área sea conocida para nosotros. Esta superficie recibe el nombre de **superficie gaussiana** y deberá envolver a la superficie que genera el campo.
2. Se aplica la expresión general del flujo eléctrico para cualquier tipo de superficie.

$\phi_E = \oint_S \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{S}$

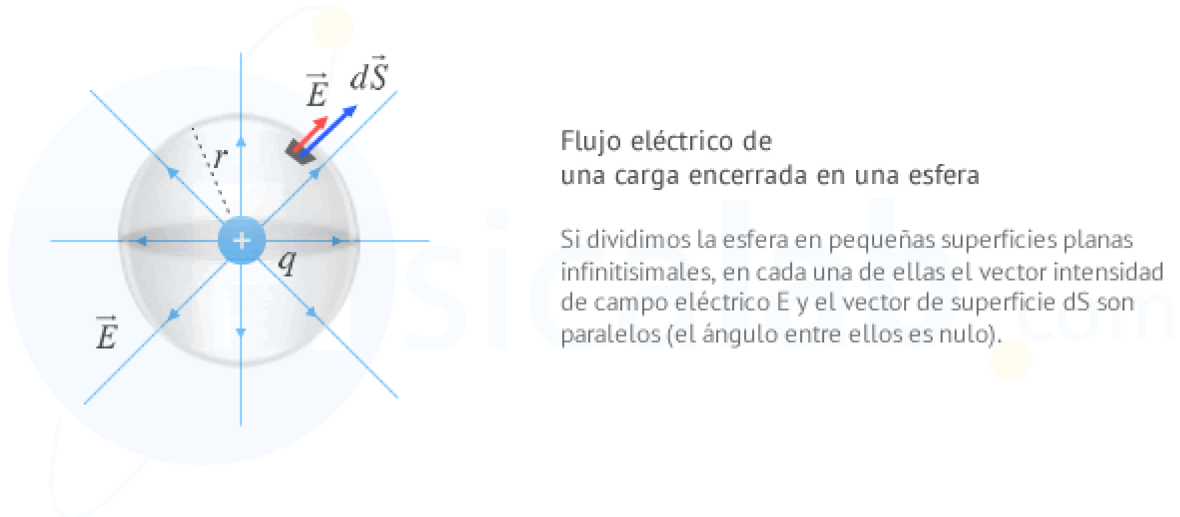
3. El valor obtenido en el punto anterior se iguala a la expresión del teorema de Gauss.

$\phi_E = Q / \varepsilon$

Comprobación de la ley de Gauss. Una esfera con una carga en su interior.

El caso más simple para calcular el flujo eléctrico es el del campo creado por una carga q contenida en una esfera de radio r. Tal y como estudiamos en el apartado de intensidad del campo eléctrico, la intensidad del campo eléctrico generado por una carga q se obtiene por medio de la siguiente expresión:

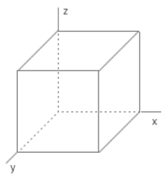
$E = K\, q / r^2 = (1/4\pi\varepsilon)\, q / r^2 = q / (4\pi\varepsilon r^2)$



En este caso, como en cada punto de la esfera se cumple que ***E*** y ***dS*** son paralelos, el flujo a través de la superficie esférica es:

$\phi_E = \phi_E = \oint_S \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{S} = \oint_S E.S.\cos\alpha = E \oint_S S = E.S$
Dado que la superficie de una esfera es $S = 4\pi r^2$, entonces:
$E = K\, q / r^2 = (1/4\pi\varepsilon)\, q / r^2 = q / (4\pi\varepsilon r^2)$
$S = 4\pi r^2$
$\phi_E = E.S = (q / (4\pi\varepsilon r^2))\, (4\pi r^2) = q / \varepsilon$
Probablemente ya te habrás dado cuenta que independientemente del radio r que posea la esfera el flujo eléctrico es el mismo, pero no solo eso. Si observas la siguiente figura puedes darte cuenta de que independientemente de la figura que empleemos, todas ellas poseen el mismo flujo eléctrico cuando contienen a q en su interior.

Ejemplo

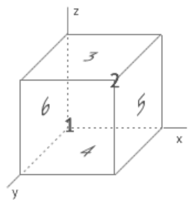


Un cubo de lado 0.3 m está colocado con un vértice en el origen de coordenadas como se muestra en la figura. Se encuentra en el seno de un campo eléctrico no uniforme, que viene dado por *E* = (- 5x *i* + 3z *k*) N/C

a) Halla el flujo eléctrico a través de sus seis caras.

b) Determina la carga eléctrica total en su interior.

Solución
Datos
l = 0.3 m
E = (- 5x ***i*** + 3z ***k***) N/C
Consideraciones previas
Para identificar el flujo que atraviesa cada una de las caras, las numeraremos de la siguiente forma:



De forma general todas las superficies vienen dadas por un vector ***S*** cuyo módulo es el área de dicha superficie y su dirección y sentido perpendicular al plano. De esta forma, teniendo en cuenta que el área de cada una de ellas es lado por lado (l^2), obtenemos que el vector ***S*** de cada una de ellas es:

$\boldsymbol{S_1} = l^2\, \boldsymbol{i}$ $\quad \boldsymbol{S_2} = -\, l^2\, \boldsymbol{i}$ $\quad \boldsymbol{S_3} = l^2\, \boldsymbol{k}$ $\quad \boldsymbol{S_4} = -\, l^2\, \boldsymbol{k}$ $\quad \boldsymbol{S_5} = l^2\, \boldsymbol{j}$ $\quad \boldsymbol{S_6} = -\, l^2\, \boldsymbol{j}$

Resolución
El flujo total (Φ) que atraviesa el cubo será la suma del flujo que atraviesa cada una de las caras (Φ_1,Φ_2, ...), o lo que es lo mismo: $\phi = \phi_1 + \phi_2 + \phi_3 + \phi_4 + \phi_5 + \phi_6$
Adicionalmente nos centraremos en la definición del flujo eléctrico de un campo uniforme sobre una superficie plana el cual establece que: $\phi_E = \boldsymbol{E.S}$ (producto escalar) = E.S.cosα, siendo α el ángulo que forman los vectores ***E*** y ***S***
Vamos a calcular el flujo para cada una de las caras:

Flujo S_1 (Φ_1)

$\phi_1 = \boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{S_1} = (- 5x\, \boldsymbol{i} + 3z\, \boldsymbol{k})\, (l^2\, \boldsymbol{i}) = - 5 \text{ x } l^2$ (recuerda que ***i.i*** = 1, y que ***i.k*** = 0)
Durante toda la superficie S_1, x vale exactamente el lado del cubo, es decir x = l, por tanto:
$\phi_1 = - 5 \text{ x } l^2 = - 5\, l^3 = - 5\, (0{,}3)^3 = - 13{,}5.10^{-2}$ Nm^2/C
Se procede igual para calcular los demás flujos, resultando:
$\phi_2 = 5 \text{ x } l^2$ Durante toda la superficie S_2, x vale exactamente 0, es decir x = 0, por tanto: $\phi_2 = 0$
$\phi_3 = 3 \text{ z } l^2$ Durante toda la superficie S_3, z vale exactamente l, es decir z = l, por tanto: $\phi_3 = 8{,}1.10^{-2}$ Nm^2/C
$\phi_4 = - 3 \text{ z } l^2$ Durante toda la superficie S_4, z vale exactamente 0, es decir z = 0, por tanto: $\phi_4 = 0$

$\phi_5 = 0$ $\phi_6 = 0$

a) Flujo TOTAL $\phi = \phi_1 + \phi_2 + \phi_3 + \phi_4 + \phi_5 + \phi_6 =$ **$- 5{,}4.10^{-2}$ Nm²/C**

b)

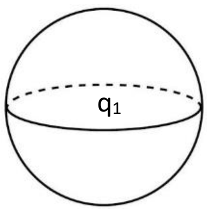
Para determinar la carga eléctrica en su interior utilizaremos el teorema de Gauss

Se supone que está en el vacío: $\varepsilon = \varepsilon_0 = 8{,}854.10^{-12}$ C^2 / (N·m²) (dato que nos deben dar)

$\phi = q / \varepsilon_0$ $q = \phi\ \varepsilon_0 =$ (**-** $5{,}4.10^{-2}$ Nm^2/C) ($8{,}854.10^{-12}$ C^2 / (N·m²) = -4,78.10-13 C

Valencia-2021-Junio-C2

Enuncia el teorema de Gauss para el campo eléctrico. Determina el flujo eléctrico a través de la superficie cerrada de la figura. Las cargas son q_1=8,85 pC y $q_2=-2q_1$ y se encuentran en el vacío. Dato: constante dieléctrica del vacío, $\varepsilon_0=8{,}85\cdot10^{-12}$ $C^2/N\cdot m^2$



El teorema de Gauss dice que el flujo del campo eléctrico ϕ que atraviesa una superficie cerrada es igual a la carga Q contenida dentro de dicha superficie dividida por la permitividad dieléctrica del medio ε.

O sea: $\phi_E = \oint_S \boldsymbol{E}.\ d\boldsymbol{S} = Q / \varepsilon$ En el vacío: $\phi_E = Q / \varepsilon_0$ donde $\varepsilon_0 = 8{,}85.10^{-12}$ $C^2/(Nm^2)$ (no hay porqué saberlo)

En este caso, sólo afecta la q_1 que es la que está en el interior de la superficie, ni caso a q_2

$q_1 = 8{,}85$ pC = $8{,}85.10^{-12}$ C

$\phi_E = q_1 / \varepsilon_0 = 8{,}85.10^{-12} / 8{,}85.10^{-12} = 1$ Nm^2 / C

Valencia-2020-Septiembre-C3

Dos cargas q_1=8,9 μC y q_2=17,8 μC se encuentran en el vacío y situadas, respectivamente, en los puntos (0,0,0) cm y P(1,0,0) cm. Enuncia el teorema de Gauss para el campo eléctrico. Calcula, justificadamente, el flujo del campo eléctrico a través de una superficie esférica de radio 0,5 cm centrada en el punto *O*. ¿Cambia el flujo si en lugar de una esfera se trata de un cubo de lado 0,5 cm?

Dato: permitividad del vacío $\varepsilon_0=8{,}9\cdot10^{-12}$ $C^2N^{-1}m^{-2}$

El teorema de Gauss dice que el flujo del campo eléctrico ϕ que atraviesa una superficie cerrada es igual a la carga Q contenida dentro de dicha superficie dividida por la permitividad dieléctrica del medio ε.

O sea: $\phi_E = \oint_S \boldsymbol{E}.\ d\boldsymbol{S} = Q / \varepsilon$ En el vacío: $\phi_E = Q / \varepsilon_0$ donde $\varepsilon_0 = 8{,}85.10^{-12}$ $C^2/(Nm^2)$ (no hay porqué saberlo)

Como se ve el flujo sólo depende de la carga Q que haya en el interior de la superficie gaussiana que se considere y no de la forma que tenga.

Si dibujamos la esfera con los ejes x, y, k centrada en el origen (0,0,0) con radio 0,5 cm vemos que la carga q_2 que está en el punto (1,0,0) está fuera de la esfera, luego no la tenemos en cuenta.

La única carga que está dentro de la esfera es q_1

$\phi = q_1 / \varepsilon_0 = 8{,}9.10^{-6} / 8{,}85.10^{-12} = 10^6$ Nm^2 / C