LA INTERACCIÓN GRAVITATORIA 01

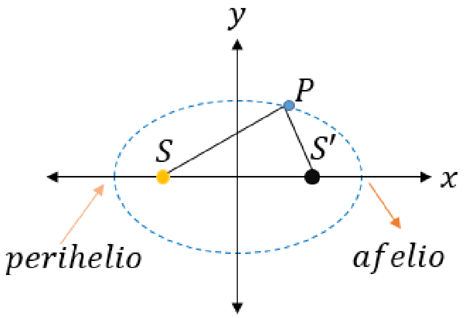
La interacción entre los grandes cuerpos celestes fue durante mucho tiempo una gran incógnita para el ser humano, pero los avances científicos permitieron realizar las medidas básicas que lograron establecer las leyes fundamentales que rigen el movimiento planetario. Dichas leyes fundamentales son las leyes de Kepler y la ley de gravitación universal.

LEYES DE KEPLER

Los estudios realizados por Kepler supusieron un gran avance en el conocimiento del movimiento de los planetas, más en concreto, de nuestro sistema solar y se aplican además a cualquier cuerpo que orbita debido a la gravedad.

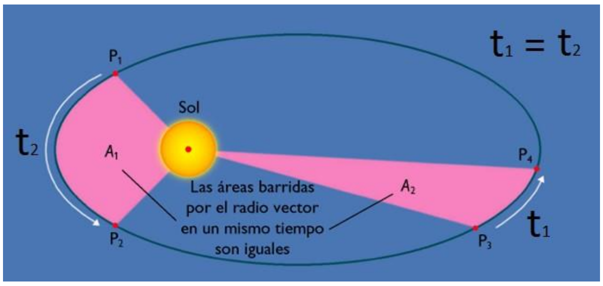
Dichos estudios pueden resumirse en las denominadas leyes de Kepler.

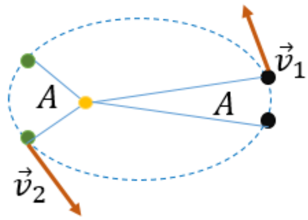
<u>Primera Ley de Kepler</u>
La primera ley de Kepler o también llamada como la ley de órbitas, señala lo siguiente: Los planetas se mueven en órbitas elípticas, con el Sol en uno de los puntos focales. Veamos la siguiente imagen que describe el primer enunciado.



El punto de la órbita más cercano al Sol se le conoce como perihelio y el punto más lejano se le llama afelio, las elipses poseen una forma ovalada o de círculo aplanado, el ancho de ese círculo achatado se le conoce como "excentricidad", la parte que está sobre el eje "x" se le llama eje mayor, y del eje "y" se le conoce como eje menor.

<u>Segunda Ley de Kepler</u>
La segunda ley de Kepler o también llamada como la ley de áreas dice que una línea del Sol a un planeta barre áreas iguales en lapsos de tiempo iguales. Veamos la imagen que lo describe mejor.





Esta ley nos indica que la rapidez orbital de un planeta varía en diferentes puntos de su órbita. Debido a que la órbita del planeta es elíptica, su rapidez orbital es mayor cuando está más cerca del Sol que cuando está más lejos.
El radio vector que une un planeta y el Sol barre áreas iguales en tiempos iguales
Curiosamente Newton más tarde demostró que esto era consecuencia de su ley de la gravitación universal.

Tercera Ley de Kepler

La tercera ley de Kepler o también conocida como la ley de los periodos, es una ley que establece que el cuadrado del periodo orbital de un planeta es directamente proporcional al cubo de la distancia promedio entre el planeta y el Sol; es decir que:

$$T^2 \propto r^3$$

Es fácil deducir la fórmula de la tercera ley de Kepler, a partir de la ley gravitacional de Newton (que veremos después), e igualando con la fuerza centrípeta que proviene de la fuerza de gravedad. Teniendo en cuenta esto, entonces decimos que:

Fuerza Centrípeta = Fuerza Gravitacional

Entonces:

$$\frac{m_p v^2}{r} = \frac{G m_p M_s}{r^2}$$

Dónde:

mp = Masa del Planeta

Ms = Masa del Sol

r = distancia

G = constante gravitacional

Despejando a la velocidad "v", tenemos que:

$$v = \sqrt{\frac{GM_s}{r}}$$

Pero como la velocidad es distancia sobre tiempo, y podemos interpretarla como la distancia del círculo (2πr) sobre el Periodo (tiempo que tarda en dar la vuelta).

$$\frac{2\pi r}{T} = \sqrt{\frac{GM_s}{r}}$$

Vamos a despejar al periodo "T"

$$T = \frac{2\pi r}{\sqrt{\frac{GM_s}{r}}}$$

Elevando al cuadrado ambos miembros, tenemos que:

Dejando fuera a r^3, tenemos que:

$$T^2 = \left(\frac{4\pi^2}{GM_s}\right) r^3$$

De aquí podemos tomar a lo siguiente como una constante, la constante de Kepler:

$$K = \frac{4\pi^2}{GM_s}$$

Podemos incluso, reescribir nuestra fórmula de la siguiente manera:

$$T^2 = Kr^3$$

La principal consecuencia en el siglo XVII de esta ley es que permitió dar dimensiones al sistema solar. En efecto, si consideramos como 1 la distancia entre la Tierra y el Sol (1 unidad astronómica, aproximadamente igual a 150 millones de kilómetros, valor no conocido en el siglo XVII), dado que se conoce el periodo de revolución de la Tierra, podemos conocer la distancia de cualquier planeta al Sol en unidades astronómicas sin más que conocer el periodo de revolución de dicho planeta, valor que se conoce de la observación astronómica del mismo.

¿Cuánto de elíptica?

Aunque estrictamente la órbita descrita por la Tierra en su movimiento alrededor del Sol es una elipse, realmente se aproxima mucho a un círculo.

La excentricidad de la elipse para la órbita terrestre tiene un valor e = 0,017. Una excentricidad cero corresponde a un círculo. Cuanto más se aleje de cero más aplanada será la elipse. El valor máximo, 1, se correspondería con una recta.

La distancia de la Tierra al Sol en el punto más próximo (perihelio) es de 147 100 000 km.

La distancia de la Tierra al Sol en el punto más alejado (afelio) es de 152 100 000 km.

Aunque la diferencia (5 000 000 km) puede parecer considerable, en realidad se corresponde con un escaso 3 % de diferencia entre ambos valores.

Ejemplo 1

La Tierra orbita alrededor del Sol con un periodo de 365,25 días. Calcular la distancia media entre la Tierra y el Sol.

DATOS: La constante de Kepler para el Sistema Solar vale: $k = 3.10^{-19}\ s^2/m^3$

Solución:

Partimos de la tercera ley de Kepler: $T^2 = k\ r^3$ y despejamos la incógnita (r):

$$r = \sqrt[3]{\frac{T^2}{k}} = \sqrt[3]{\frac{\left(3,16.10^7\right)^2 \cancel{s^2}}{3.10^{-19}\ \frac{\cancel{s^2}}{m^3}}} = 1,49.10^{11}\,m = 1,49.10^8\,km = 149.10^6\,km$$

NOTA: La distancia media entre el Sol y la Tierra es de unos 150 millones de km (149 597 870 km) y es usada en astronomía como unidad para medir distancias. Se le da el nombre de ***unidad astronómica (ua).***

Ejemplo 2

Marte se encuentra situado a una distancia media del Sol de 1,52 ua. ¿Cuál es el periodo orbital de Marte alrededor del Sol?

DATOS: 1 ua = 150 .10^6 km; $k = 3.10^{-19}\ s^2/m^3$

Solución:

$$1,52\ \cancel{ua}\ \frac{1,50\ 10^{11} m}{1\ \cancel{ua}} = 2,28\ 10^{11} m$$

Partimos de la tercera ley de Kepler: $T^2 = k\ r^3$ y despejamos la incógnita (T):

$$T = \sqrt{k\,r^3} = \sqrt{3.10^{-19}\ \frac{s^2}{\cancel{m^3}}\ \left(2,28.10^{11}\right)^3 \cancel{m^3}} = 5,96.10^7\,s = 690,2\ dias$$

NOTA: El periodo orbital para Marte ("año marciano") es de 686,98 días.

Las leyes de Kepler son fenomenológicas. Es decir, se limitan a describir de manera cinemática cómo se mueven los planetas en sus órbitas alrededor del Sol, ***pero nada dicen acerca de las causas que provocan ese movimiento.***

Aunque las leyes fueron enunciadas inicialmente para el Sistema Solar son aplicables a cualquier objeto celeste que orbite alrededor de otro astro central.

Antes de introducirnos en el campo gravitatorio, vamos a dar una idea de lo que se considera campo en general.

CONCEPTO DE CAMPO EN GENERAL

Aunque el concepto de campo lo introdujo Faraday (1791-1867) dos siglos después de que Newton enunciara la ley de gravitación universal para interpretar las leyes que rigen las acciones entre cargas, corrientes eléctricas, e imanes, y pronto se mostró como uno de los conceptos más fructíferos de la física, conviene verlo ahora para un mejor entendimiento. El concepto de campo rivalizó con la noción tradicional de fuerza y empezó a desplazarla.

Las fuerzas de la Naturaleza son las cuatro interacciones fundamentales, pero en nuestra vida cotidiana nos encontramos con fuerzas que son debidas a una combinación de las anteriores, fundamentalmente manifestaciones macroscópicas de las interacciones electromagnéticas que tienen lugar entre los átomos que constituyen la materia.

Las fuerzas se pueden clasificar atendiendo a diferentes criterios. Si nos centramos en si los cuerpos que interaccionan se tocan o no podemos clasificarlas en:

- <u>Fuerzas de contacto</u>. Son fuerzas que están aplicadas directamente sobre los cuerpos cuyo movimiento se estudia. Por ejemplo cuando empujamos una mesa. También son fuerzas de contacto la fuerza de rozamiento o la fuerza recuperadora de un muelle.
- <u>Fuerzas a distancia</u>. Generalmente son fuerzas a las que se ven sometidas las partículas por acción de otra partícula. No requieren que los cuerpos que interaccionan estén en contacto directo.

El concepto newtoniano de fuerza encuentra dificultad para interpretar las fuerzas ejercidas a distancia. Podemos expresar esta dificultad mediante las siguientes preguntas: ¿Cómo es posible que se ejerzan fuerzas dos objetos (por ejemplo, dos cuerpos celestes), sin haber nada entre ellos? ¿Cuál puede ser el mecanismo de la interacción?

En una carta a un amigo, Newton ya hacía constatar su preocupación. Él expresó su inquietud con estas palabras (se trata de una traducción): "Es inconcebible que la materia bruta inanimada pueda, sin la mediación de algo más que no sea material, operar y afectar a otra materia sin mutuo contacto,... Que un cuerpo pueda actuar sobre otro a distancia a través del vacío, sin mediación de algo más mediante lo cual sus acciones y fuerzas puedan entrar en contacto, me parece tan absurdo que no creo que nadie competente pueda creer en ello."
En definitiva, lo que se debe explicar es cómo es posible que las fuerzas gravitatorias actúen a distancia, sin contacto entre la masa que ejerce la fuerza y la masa sobre la que ésta actúa.

Aunque Newton descubrió la fuerza de la gravedad, no quiso hacer ninguna suposición sobre cómo se transmitía de un cuerpo a otro. Es famosa su frase *"et hipotheses non fingo",* que podría traducirse por *"yo no invento hipótesis"*. De ahí que, tras su muerte, quedara abierta una pregunta clave que ocuparía la mente de algunos de sus sucesores: *¿cómo podemos explicar la acción a distancia?* Para resolver esta cuestión, los físicos introducen el señalado concepto de campo de fuerzas, desarrollado en el siglo XIX por Faraday y Maxwell y perfeccionado posteriormente por Einstein en el siglo XX.
Intuitivamente podemos decir que un campo de fuerzas es una región del espacio cuyas propiedades se ven alteradas por la presencia de un cuerpo que puede originar interacciones a distancia. Aunque Faraday y Maxwell elaboraron sus ideas para explicar la interacción electromagnética, sugieren que sus conclusiones son extensibles al caso de los campos gravitatorios.

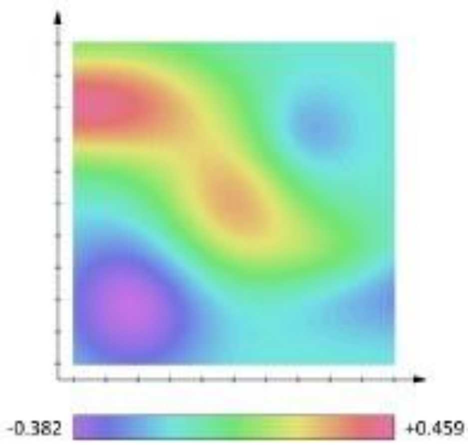
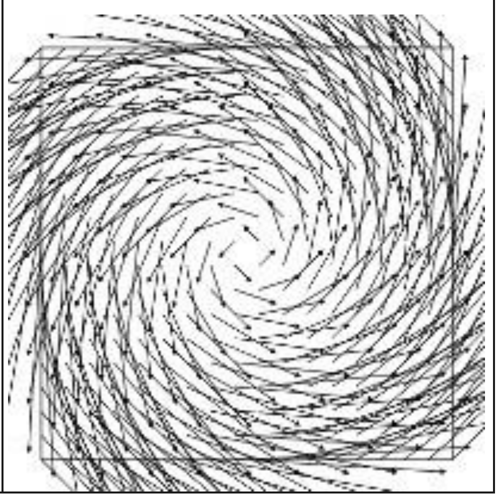
Supongamos que dos cuerpos interaccionan entre sí, es decir, cada uno ejerce una fuerza sobre el otro. Si ahora a uno de los dos cuerpos lo desplazamos a diferentes posiciones alrededor del primero, tenemos que en cada posición actuará una fuerza sobre él. Esto ocurre porque cada punto del espacio alrededor del primer cuerpo está dotado de una cierta propiedad que hace que una vez colocado allí un segundo cuerpo, actúe una fuerza sobre él. Dicha propiedad que nos permite esto la genera el primer cuerpo y es a lo que denominamos campo. Así pues, decimos que al colocar el segundo cuerpo en un punto, la fuerza que actúa sobre él se debe al campo que crea el primer cuerpo en ese punto. Es como una región o zona donde es posible medir cierta magnitud, y que el valor medido dependa exclusivamente del punto considerado.

A toda región de un espacio a la que se le puede asignar un valor único de una propiedad física se le denomina campo. Pero, ojo, para conocer la magnitud del campo, como veremos después, debemos colocar "un testigo".

Los campos pueden ser:

- Escalares: Si la propiedad medida es un número como la temperatura o la presión, se dice que en dicha región del espacio hay un campo escalar. Los campos escalares son regiones del espacio donde dichas propiedades sólo dependen de la posición del punto y del tiempo. Así, por ejemplo, un mapa de isobaras representa las regiones del campo donde la presión tiene el mismo valor.
- Vectoriales: Si, por el contrario, la propiedad en cuestión es vectorial, como fuerza o velocidad, se habla de campo vectorial. Es decir, tiene una dirección y un sentido. Son, por ejemplo, los campos gravitatorios, eléctricos o magnéticos. Una partícula en presencia de un campo gravitatorio se ve afectada por una fuerza gravitatoria, una carga eléctrica en presencia de un campo eléctrico se verá afectada por una fuerza eléctrica.

La magnitud física que define un campo vectorial es la **intensidad del campo** (gravitatorio, eléctrico, magnético,…).

Campo escalar	Campo vectorial
	

En el caso de que un campo vectorial sea debido a fuerzas, se denominan campos de fuerzas

Cuando se trata de representar un campo vectorial en un papel, se dibujan líneas de campo. Las líneas de campo son líneas imaginarias que se dibujan de tal forma que el vector que define el campo es

tangente a ellas en todos los puntos.
Estas líneas presentan una serie de propiedades:

- Su sentido de recorrido y el vector que representa el campo coinciden en cada punto. (Es decir, las puntas de las flechas indican la dirección del campo).
- Pueden existir líneas cerradas o abiertas.
- El espacio entre cada línea indica el valor del campo. En los puntos o zonas donde las líneas están más juntas o tienden a converger el campo es más intenso, mientras que donde están muy separadas el campo es muy pequeño.
- Las líneas de campo no se pueden cortar, porque si lo hicieran en un punto habría dos valores distintos de intensidad de campo. Si el campo es uniforme, las líneas de campo son rectas paralelas e igualmente espaciadas.
- Si las trayectorias de las líneas salen de un punto, al punto de donde proceden se le llama manantial o fuente. Si todas las líneas llegan a un punto, éste se conoce por sumidero.

Puedes entender esto último mejor con el siguiente dibujo:

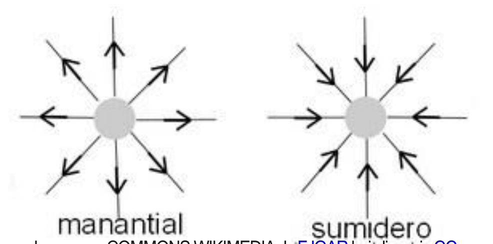


Imagen en COMMONS.WIKIMEDIA de FJGAR bajo licencia CC

Dos líneas de campo no pueden cortarse, ya que en el punto de corte tendríamos dos direcciones distintas para el campo gravitatorio en ese punto, lo que es imposible.

Los campos también pueden ser:

- Conservativos: Se deben a fuerzas conservativas que son aquellas en que se conserva la energía mecánica del sistema. Las fuerzas gravitatorias, elásticas y electrostáticas son fuerzas conservativas.
- No conservativos: Se deben a fuerzas no conservativas que son aquellas bajo cuya acción en el sistema se disipa o pierde energía mecánica. Las fuerzas de rozamiento son fuerzas no conservativas. Cuando hay fuerzas no conservativas la energía mecánica del sistema se reparte entre calor y energía mecánica final. La transferencia de energía de un punto A a un punto B no es absoluta, una parte importante de esa energía mecánica inicial se pierde en forma de calor. Ese calor es el trabajo realizado por las fuerzas no conservativas.

LEY DE NEWTON: LEY DE GRAVITACIÓN UNIVERSAL

Fue **Isaac Newton (1642 – 1727)** quien dio el siguiente gran paso en la explicación del movimiento planetario al enunciar su **Ley de Gravitación Universal** (formulada en 1666 y publicada en 1687)

Prescindiendo que la fuerza es un vector (que luego veremos), en módulo sería:

Ley de Gravitación Universal

"Los cuerpos se atraen con una fuerza directamente proporcional al producto de sus masas e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia que los separa."

Masas de los cuerpos en kg

$$F = G\,\frac{m\,M}{d^2}$$

Fuerza de atracción gravitatoria. Si se consideran cuerpos grandes, la fuerza apunta hacia el centro de los mismos.

Distancia entre los cuerpos en metros. Si son cuerpos grandes, la distancia se toma entre los centros.

Constante de Gravitación Universal. Tiene el mismo valor para todo el Universo.
Para el S.I: $G = 6{,}67\,10^{-11}\,\frac{N\,m^2}{kg^2}$

Debido a la pequeñez de la constante de gravitación la fuerza de gravedad sólo es apreciable entre cuerpos cuya masa sea muy grande (planetas, estrellas…)

De acuerdo con la expresión anterior dos masas de 100 y 1000 kg, situadas a 20 m de distancia se atraerán con un fuerza de:

$$F = G\,\frac{m\,M}{d^2} = 6{,}67\,10^{-11}\,\frac{N\,\cancel{m^2}}{\cancel{kg^2}}\,\frac{100\,\cancel{kg}\,1000\,\cancel{kg}}{20^2\,\cancel{m^2}} = 1{,}67\,10^{-8}\,N$$

Fuerza prácticamente inmedible debido a su pequeñez.

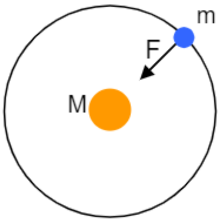
Sin embargo, la fuerza con que la Tierra ($6{,}0\,10^{24}$ kg) atrae a un cuerpo de 50 kg situado en su superficie (distancia al centro de la Tierra $6{,}4\,10^6$ m) valdrá:

$$F = G\,\frac{m\,M}{R^2} = 6{,}67\,10^{-11}\,\frac{N\,\cancel{m^2}}{\cancel{kg^2}}\,\frac{50\,\cancel{kg}\,6\,10^{24}\,\cancel{kg}}{(6{,}4\,10^6)^2\,\cancel{m^2}} = 488{,}5\,N$$

Que es una fuerza apreciable ya que la masa de la Tierra es muy grande.

Si suponemos una órbita circular (lo cual no está muy alejado de la realidad) podemos combinar la Ley de Gravitación Universal con la dinámica del movimiento circular para obtener datos de la órbita. Por ejemplo, la aceleración centrípeta de la Tierra debida a su movimiento de traslación alrededor del Sol.

Datos: Masa del Sol: $1{,}98\,10^{30}$ kg
Distancia (media) Tierra – Sol : $1{,}5\,10^{12}$ m



$$\left.\begin{array}{l} F_c = m\,a_N \\ F = G\,\dfrac{m\,M}{d^2} \end{array}\right\}\quad \cancel{m}\,a_N = G\,\frac{\cancel{m}\,M}{d^2};\quad a_N = G\,\frac{M}{d^2}$$

$$a_N = G\,\frac{M}{d^2} = 6{,}67\,10^{-11}\,\frac{m^3}{\cancel{kg}\,s^2}\,\frac{1{,}98\,10^{30}\,\cancel{kg}}{\left(1{,}5\,10^{12}\right)^2\,m^2} = 5{,}87\,10^{-5}\,\frac{m}{s^2}$$

La Ley de Gravitación Universal representa un mayor nivel de profundización en la comprensión del universo que las leyes de Kepler. Estas son puramente descriptivas, dicen ***cómo se mueven los astros***, sin embargo la fuerza gravitatoria propuesta por Newton aparece como ***la causa*** que determina el movimiento de los objetos celestes.

- El propio Newton demostró (utilizando un procedimiento matemático inventado por él mismo, similar al cálculo diferencial y que denominó *método de fluxiones*) que si un cuerpo se mueve alrededor de otro por el que es atraído con una fuerza proporcional a sus masas e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia describiría una elipse, tal y como se postula en la primera ley de Kepler.
- La constancia de la velocidad areolar (segunda ley de Kepler) también es deducible (no se hace aquí, debido a los conceptos matemáticos implicados) a partir de la fuerza de atracción gravitatoria.
- La tercera ley de Kepler puede obtenerse teniendo en cuenta la expresión de la Ley de Gravitación Universal y considerando que los planetas describen su órbita con movimiento circular uniforme, sometidos a la fuerza de gravedad que apunta constantemente hacia el centro de la trayectoria (fuerza centrípeta)

$$\left.\begin{array}{l} F_c = m\, a_N = m\, \omega^2 d \\ F = G\,\dfrac{m\,M}{d^2} \end{array}\right\} G\,\frac{\cancel{m}\,M}{d^2} = \cancel{m}\,\omega^2\,d\ ;\ G\,M = \frac{(2\pi)^2}{T^2}\,d^3\ ;\ T^2 = \frac{4\,\pi^2\,d^3}{G\,M};\ T^2 = \left(\frac{4\,\pi^2}{G\,M}\right)d^3;\ \boxed{T^2 = k\,d^3}$$

Donde: $\boxed{k = \dfrac{4\,\pi^2}{G\,M}}$ Por tanto la constante de Kepler sólo depende del valor de la masa del astro central.

Para el Sistema Solar tendrá un valor (S.I): $k = \dfrac{4\,\pi^2}{G\,M} = \dfrac{4\,\pi^2}{6{,}67\,10^{-11}\,\dfrac{m^3}{\cancel{kg}\,s^2}\,1{,}98\,10^{30}\,\cancel{kg}} = 2{,}99\,10^{-19}\,\dfrac{s^2}{m^3}$

Ío es una de las sesenta y tres lunas de Júpiter (la más próxima al planeta) y tiene un periodo orbital de 1 día 18 h y 28 min. ¿Cuál es la distancia media entre Ío y Júpiter?

DATOS: Masa de Júpiter: $1{,}90.10^{27}$ kg

Solución:

Expresamos el periodo orbital en segundos:

1 día 18 h y 28 min = 152 880 s

Partimos de la tercera ley de Kepler: $T^2 = k\, r^3$ y despejamos la incógnita (r): $r = \sqrt[3]{\dfrac{T^2}{k}}$

Hay que tener en cuenta que el astro central alrededor del cual orbita Ío es Júpiter, no el Sol. Por ***tanto deberemos determinar el valor de k para este caso sustituyendo la masa de Júpiter*** en la expresión que nos da la constante de Kepler (ver apuntes)

$$k = \frac{4\pi^2}{GM} = \frac{4\pi^2}{6{,}67\,10^{-11}\,\dfrac{m^3}{\cancel{kg}\,s^2}\,1{,}90\,10^{27}\,\cancel{kg}} = 3{,}12\,10^{-16}\,\frac{s^2}{m^3}$$

$$r = \sqrt[3]{\frac{T^2}{k}} = \sqrt[3]{\frac{\left(1{,}53.10^5\right)^2\,\cancel{s^2}}{3{,}12.10^{-16}\,\dfrac{\cancel{s^2}}{m^3}}} = 4{,}22.10^8\,m = 4{,}22.10^5\,km = 422\,000\ km$$

NOTA: El radio orbital medio de Ío alrededor de Júpiter se estima en 421 600 km

En forma vectorial:

Masas de los cuerpos en kg

Vector unitario.
Dirección: la de la recta que une los cuerpos.
Sentido: saliendo del cuerpo que se considera que atrae.

$$\vec{F} = -G\,\frac{mM}{d^2}\,\vec{u}_r$$

Fuerza de atracción gravitatoria. Si se consideran cuerpos grandes la fuerza apunta hacia el centro de los mismos.

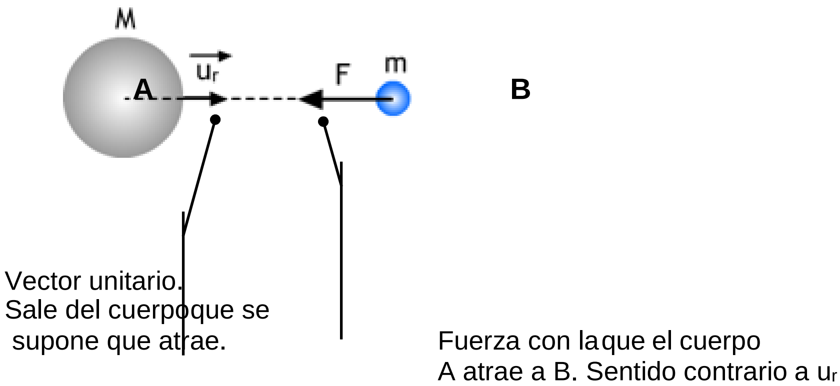
Distancia entre los cuerpos en metros. Si son cuerpos grandes, la distancia se toma entre los ce

El signo menos, tal y como se define el vector unitario, garantiza que ***la fuerza es siempre atractiva.***

Constante de Gravitación Universal. Tiene el mismo valor para todo el Universo.

Para el S.I:

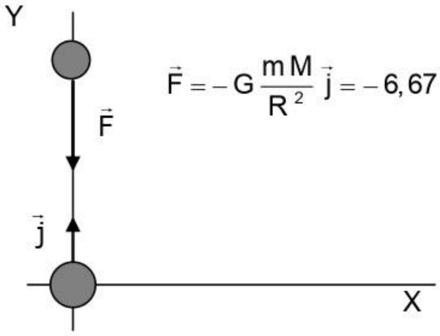
$$G = 6{,}67\,10^{-11}\,\frac{N\,m^2}{kg^2} = 6{,}67\,10^{-11}\,\frac{m^3}{kg\,s^2}$$



Ejemplos

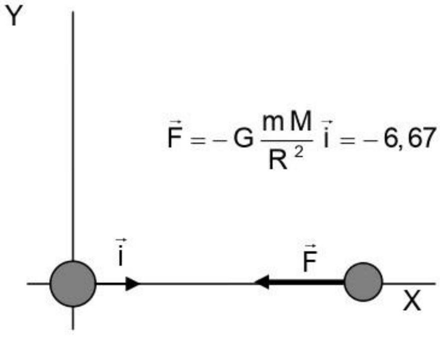
Una masa de 5,2 10^{13} kg se supone que está situada en el origen de coordenadas.
Calcular la fuerza de atracción ejercida sobre otra de 3,5 10^{6} kg situada a 10 km de distancia en eleje y.
Repetir el cálculo suponiendo que ahora la masa se sitúa sobre el eje x

Solución



$$\vec F = -G\frac{m\,M}{R^2}\,\vec j = -6,67\,10^{-11}\,\frac{N\,\cancel{m^2}}{\cancel{kg^2}}\;\frac{5,2\;10^{13}\,\cancel{kg}\;3,5\,10^{6}\;\cancel{kg}}{(10^4)^2\;\cancel{m^2}}\,\vec j = -121,4\,\vec j\;(N)$$

La fuerza tiene un módulo de 121,4 N y apunta en sentido contario al vector unitario j. Esto es hacia abajo (atracción)



$$\vec F = -G\frac{m\,M}{R^2}\,\vec i = -6,67\,10^{-11}\,\frac{N\,\cancel{m^2}}{\cancel{kg^2}}\;\frac{5,2\;10^{13}\,\cancel{kg}\;3,5\,10^{6}\;\cancel{kg}}{(10^4)^2\;\cancel{m^2}}\,\vec i = -121,4\;\vec i\;(N)$$

La fuerza tiene el mismo módulo, pero ahora apunta en sentido contario al vector unitario i. Esto es hacia la izquierda (atracción)

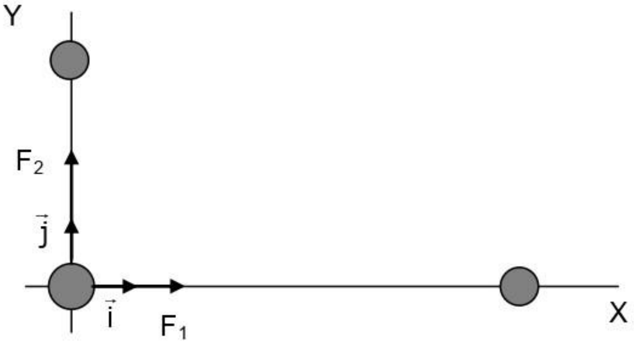
La fuerza que una masa ejerce sobre otra no se ve afectada por la presencia de una tercera masa. Cada una de ellas atrae a la masa considerada superponiéndose ambas fuerzas. ***La fuerza resultante sobre la masa es la suma vectorial de las fuerzas ejercidas*** **(Principio de Superposición).**

Ejemplo 3

Una masa de 3,2 10^{13} kg está en el origen de coordenadas, otra de 5,4 10^{6} kg se sitúa a 5 km de distancia en el eje y una tercera de 4,6 10^{7} kg sobre el eje X a una distancia de 10 km.

Calcular la fuerza resultante actuante sobre la masa situada en el origen de coordenadas.

Solución



La fuerza ejercida por la masa situada sobre el eje X, vale:

$$\vec{F}_1 = G\,\frac{m_2\,M}{d_1^2}\,\vec{i} = -\,6,67\,10^{-11}\,\frac{N\,\cancel{m^2}}{\cancel{kg^2}}\;\frac{3,2\;\,10^{13}\,\cancel{kg}\;4,6\,10^{7}\;\cancel{kg}}{(10^4)^2\;\cancel{m^2}}\;\vec{j} = 981,8\;\vec{i}\;(N)$$

La fuerza ejercida por la masa situada sobre el eje Y, vale:

$$\vec{F}_2 = G\,\frac{m_2\,M}{d_2^2}\,\vec{j} = -\,6,67\,10^{-11}\,\frac{N\,\cancel{m^2}}{\cancel{kg^2}}\;\frac{3,2\;\,10^{13}\,\cancel{kg}\;5,4\,10^{6}\;\cancel{kg}}{(5\,10^3)^2\;\cancel{m^2}}\;\vec{j} = 461,0\,\vec{j}\;(N)$$

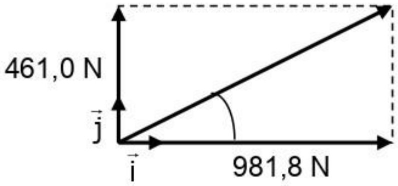
La fuerza resultante será:

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = 981,8\;\vec{i} + 461,0\;\vec{j}$$

Módulo:

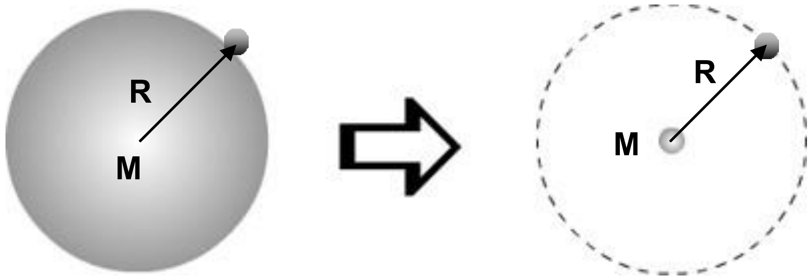
$$\vec{F} = 981,8\;\vec{i} + 461,0\;\vec{j}$$
$$F = \sqrt{981,8^2 + 461,0^2}\;N = 1\,084,6\;N$$

Ángulo formado con el eje X

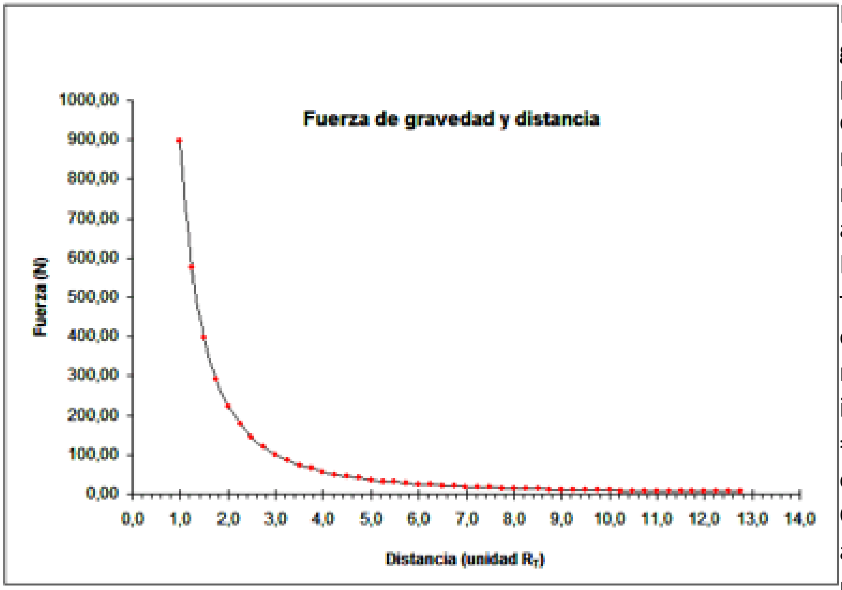


$$tg\,\alpha = \frac{461,0}{981,8} = 0,4695\;;\;\alpha = 25,2^0$$

Cuando se consideran masa extensas, éstas se comportan como si la totalidad de la masa se concentrara en su centro. Esto es, podemos considerar toda la masa concentrada en un punto (de radio nulo) situado ensu centro (masa puntual). **Por esta razón las distancias hay que tomarlas siempre desde el centro de las masas**:

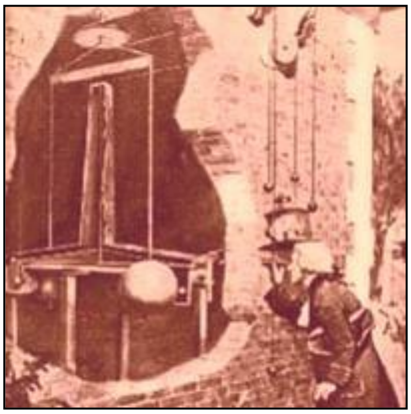


Si nos situamos en el interior de la esfera a una distancia r del centro (siendo r<R), la única masa que ejerce atracción es la situada en la esferade radio r. Por tanto, la fuerza con que un objeto es atraído disminuye a medida que descendemos hacia el interior, anulándose en el centro (r =0).
Si por el contrario vamos desde el centro hacia el exterior la gravedad aumenta hasta adquirir su valor máximo en la superficie y, a partir de ahí, comienza a disminuir.



Debido a que la fuerza de gravedad es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia, su valor decae muy rápidamente al alejarse de la masa responsable de la atracción.
La gráfica muestra el valor de la fuerza de gravedad creada por el planeta Tierra sobre una masa de 100 kg situada inicialmente en su superficie (d = R_T) y cómo varía cuando el objeto se va alejando.
Como se puede ver si nos alejamos a una distancia de unos 10 radios terrestres la fuerza de gravedad se hace prácticamente nula. Realmente no se anula nunca, ya que tiende asintóticamente a cero al aumentarla distancia.

La constante de gravitación universal, G, no fue determinada por Newton y su valor permaneció desconocido durante mucho tiempo.



Henry Cavendish (1731-1810) realizó un experimento (cuyos resultados hizo públicos en 1798) con el fin de determinar la densidad de la Tierra utilizando para ello una balanza de torsión (ideada por su amigo el reverendo John Michell y que se puede observar en el grabado de la izquierda). Entonces no se concedía a G el carácter de constante universal que se le da hoy día, ni la importancia que hoy le concedemos yaque a efectos prácticos su valor se consideraba incluido en el de la masa de la Tierra.
El valor obtenido por Cavendish para la densidad de la Tierra fue de 5,45 g/cm^3 y sirvió a mediados del s. XIX para determinar el valor de G.
Una de las primeras referencias conocidas de la constante de gravitación es de 1873.

Ampliación

Ejemplo
Obtener el valor de la constante de gravitación, G, a partir de los datos siguientes:g = 9,81 m/s^2; R_{Tierra}= 6,37 10^3 km ; d_{Tierra}= 5,45 g/cm^3

Teniendo en cuenta que llamamos peso a la fuerza con que la Tierra trae a los cuerpo, y suponiendo que el objeto esté situado en la superficie de la Tierra (a una distancia R_T de su centro), podremos igualar las expresiones siguientes:

$$P = m\,g\,;\;\; F = G\,\frac{M_T\,m}{R_T^2}$$

$$\cancel{m}\,g = G\,\frac{M_T\,\cancel{m}}{R_T^2}\;;\; g = G\,\frac{M_T}{R_T^2}\;;\; G = \frac{gR_T^2}{M_T}\quad (1)$$

$$\text{Como}: d_T = \frac{M_T}{V_T}\;\; y\;\; V_T = \frac{4}{3}\pi R_T^3$$

$$M_T = d_T V_T = d_T\,\frac{4}{3}\pi R_T^3\quad \text{Sustituyendo en (1)}$$

$$G = \frac{gR_T^2}{M_T} = \frac{gR_T^2}{d_T\,\frac{4}{3}\pi R_T^3} = \frac{3g}{4\pi R_T d_T}$$

$$G = \frac{3g}{4\pi R_T d_T} = \frac{3.\,9,81\frac{m}{s^2}}{4\pi\; 6,37\;10^6 m\; 5,45\;10^3\,\frac{kg}{m^3}} = 6,75\;10^{-11}\,\frac{m^3}{kg\;s^2}$$

La masa es una propiedad general de la materia. Según la segunda ley de Newton es una medida de la inercia del cuerpo o de la resistencia que éste opone a variar su velocidad, por eso la masa que aparece en las ecuaciones de la dinámica recibe el nombre de ***"masa inercial".***
De la expresión de la Ley de Gravitación Universal se desprende que debido a su masa los cuerpos se atraen. Por eso la masa que aparece en la expresión recibe el nombre de ***"masa gravitacional"***.
¿Son iguales la masa inercial y la gravitacional? Todos los experimentos realizados con el fin de determinar alguna diferencia han resultado negativos, por lo que se considera que ambas masas son idénticas. Precisamente la igualdad de ambas masas dio a A. Einstein la pista definitiva para elaborar la Teoría General de la Relatividad.

Se dice que existe un campo gravitatorio en una región del espacio si una masa colocada en un punto de esa región experimenta una fuerza gravitatoria.
Toda partícula con masa genera un campo gravitatorio a su alrededor, es la zona de influencia de la fuerza gravitatoria que puede generar sobre otra partícula.
Si cada masa genera su propio campo gravitatorio ¿qué partícula está inmersa en el campo de cuál? En general, la partícula que genera el campo es la de mayor masa, por eso decimos que los cuerpos sobre la Tierra se encuentran inmersos en el campo gravitatorio terrestre, o que la Luna gira alrededor de la Tierra porque aquella se encuentra en el mismo campo. Así, también decimos que la Tierra se encuentra en el campo gravitatorio solar, que afecta a todos los planetas que giran a su alrededor. Este campo gravitatorio solar también afecta de algún modo a los satélites de los planetas, pero al ser su intensidad inferior al campo gravitatorio planetario, se dice que cada satélite está afectado por el campo gravitatorio de su planeta.

Si se dispone en cierta región del espacio una masa M, el espacio alrededor de M adquiere ciertas características que no disponía cuando no estaba M. Por el simple hecho de estar ahí, la masa M distorsiona el espacio que lo rodea dotándolo de una propiedad que antes no poseía y que sólo afectará a la materia que posea la misma propiedad. Este hecho se puede comprobar acercando otra masa m (que se conoce con el nombre de masa testigo) y constatando que se produce la interacción. A la situación física que produce la masa M se la denomina campo gravitatorio. Este campo gravitatorio viene dado por un campo vectorial de fuerzas.
Realmente, es el campo gravitatorio creado por la fuente M el que realmente interacciona con la masa testigo.
El campo gravitatorio actúa así como una especie de portador de fuerza. Buscando una analogía cinematográfica, aunque incorrecta, sería como la fuerza de los Jedis en Star Wars, dado que es el que permite que la masa fuente interactúe con la masa testigo a través de él.

El campo gravitatorio es un campo vectorial, lo que significa que tiene una dirección y una magnitud y es, además, un campo conservativo.

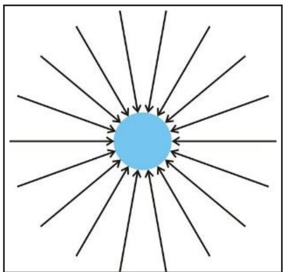


Imagen de Wikimedia Commons bajo licencia CC BY-SA 3.0.

Existen varios aspectos que determinan un campo gravitatorio, los cuales son los siguientes:

- Masa: La masa es el principal factor que determina la fuerza gravitatoria. Cuanto mayor sea la masa de un objeto, mayor será la fuerza de gravedad que ejerce.
- Distancia: La distancia entre los objetos también es un factor importante en el campo gravitatorio. La fuerza de gravedad disminuye a medida que la distancia entre los objetos aumenta. Esto se debe a que la gravedad se propaga en forma de ondas, por lo que cuanto más lejos esté un objeto de otro, más débiles serán las ondas gravitatorias que lleguen a él.
- Forma y tamaño: La forma y el tamaño de los objetos también influyen en el campo gravitatorio. Por ejemplo, un objeto más alargado tendrá un campo gravitatorio más débil que uno de la misma masa pero más compacto.

- Coordenadas espaciales: El campo gravitatorio también puede variar dependiendo de las coordenadas espaciales en las que se encuentren los objetos. Por ejemplo, la gravedad es mayor cerca de la superficie de la Tierra que en el espacio exterior.

Qué aspectos determinan un campo gravitatorio

- Intensidad del campo gravitatorio. La intensidad del campo gravitatorio se mide en unidades de fuerza por unidad de masa, lo que se conoce como aceleración gravitatoria. Esta intensidad depende de la masa del objeto que produce el campo y de la distancia al objeto.
- Potencial del campo gravitatorio. La energía potencial gravitatoria es negativa y es proporcional a la masa de los objetos involucrados e inversamente proporcionales a la distancia que los separa.
- Energía del campo gravitatorio. La energía mecánica en un campo gravitatorio se compone de la energía potencial gravitatoria y la energía cinética. La energía cinética es la energía asociada con el movimiento de los objetos en el campo gravitatorio, mientras que la energía potencial es la energía asociada con la posición de los objetos en el campo gravitatorio.