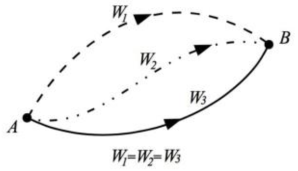
LA INTERACCIÓN GRAVITATORIA 03

ESTUDIO ENERGÉTICO DE LA INTERACCIÓN GRAVITATORIA

ENERGÍA POTENCIAL GRAVITATORIA
(Es una magnitud escalar, no vectorial)

La interacción gravitatoria también se puede describir en términos energéticos, teniendo en cuenta los conceptos de fuerza conservativa y de energía potencial. Una de las formas de transmitir la energía desde un cuerpo a otro cuerpo es mediante una fuerza de interacción. Esta fuerza de interacción provoca en el cuerpo sobre el que se ejerce un desplazamiento y, por tanto, produce un trabajo. Este trabajo es la energía transmitida.
En el caso de la interacción gravitatoria, como fuerza conservativa, no hay pérdidas de energía, así el trabajo realizado a través de una línea cerrada (trayectoria cerrada que empieza y termina en el mismo punto) es cero, lo que es lo mismo, el trabajo realizado por dicha fuerza entre dos puntos siempre es el mismo independientemente del camino seguido. Los campos gravitatorio y eléctrico son conservativos, en estas condiciones tiene sentido hablar de la Energía Potencial.



Dada una fuerza conservativa, el trabajo de esta fuerza entre dos puntos A y B, es independiente del camino seguido para ir de un punto A a otro punto B,
Así, la energía potencial es una magnitud característica de las fuerzas conservativas. Se representa por U o por E_p.
En estas condiciones, se define la Energía Potencial de modo que el trabajo es igual a la disminución de energía potencial del sistema:

$$W_A^B = E_p(A) - E_p(B) = -\Delta E_p$$

Así pues, la Energía Potencial en un punto será

$$E_p(A) = W_A^B + E_p(B)$$

De la definición, se deduce que la Energía Potencial en un punto A depende de su valor en otro punto B, que tomaremos como origen de Energía Potencial que después veremos.
Así mismo, si el camino a recorrer es cerrado, es decir, si A y B coinciden, entonces el Trabajo de la Fuerza Conservativa será cero, pues

$$W_A^B = -\Delta E_p = E_p(A) - E_p(A) = 0$$

$$E_{p_g}(A) = W_A^B + E_{p_g}(B) = -G\cdot\frac{M\cdot m}{r_A} - \left(-G\cdot\frac{M\cdot m}{r_B}\right) + E_{p_g}(B)$$

Fíjate que en estas expresiones el denominador es "r" y no "r^2" como en la fuerza, ya que W = F.r, y así F = - G (M.m) / r^2 W = F.r = - G (M.m) r / r^2 = - G (M.m) / r
La energía potencial no se puede conocer de forma absoluta. Sólo se puede conocer la diferencia de energía potencial, por ello debemos fijar un criterio que es tomar el origen de energías potenciales (energía potencial igual a cero) a distancia infinita (una separación infinita entre los dos cuerpos).
Con este criterio, el valor máximo posible de la energía potencial gravitatoria es cero.
Así, si escogemos el origen de energía potencial, $Epg_{(B)} = 0$, en el infinito, $r_B = \infty$, quedará

$$E_{p_g}(A) = \int_A^\infty \vec{F}\circ d\vec{r}, \qquad E_{p_g}(A) = -G\cdot\frac{M\cdot m}{r_A}$$

Así pues, la energía potencial gravitatoria (negativa) es el trabajo que han de hacer las fuerzas del campo para trasladar la masa m desde el punto A hasta infinito. Su valor equivale (con signo opuesto) al del trabajo mínimo que tendría que realizar una fuerza exterior para alejar completamente a las masas del sistema (hasta una separación infinita).

Cuando el trabajo que realiza una fuerza conservativa es negativo, para mover el cuerpo desde el punto a hasta el punto b hay que realizar un trabajo en contra del campo gravitatorio (el cuerpo no va a subir solo). Es un trabajo que debemos realizar nosotros, cuyo valor será igual al que realiza la fuerza conservativa pero cambiado de signo.
Cuando el trabajo que realiza una fuerza conservativa es positivo, para mover el cuerpo desde el punto b hasta el punto a, el trabajo lo realiza el campo gravitatorio.

El signo – también nos indica que si la masa testigo m se aleja de la masa fuente M, la energía potencial aumenta acercándose al valor 0 para una distancia infinita

Principio de superposición: si el campo es creado por dos o más masas puntuales, la energía potencial gravitatoria de una masa puntual m en un punto del campo, sería la suma escalar de las energías de interacción de la masa m con cada una de las masas fuente.
Es decir, para el caso general de un sistema formado por un conjunto de varios cuerpos (más de dos), la energía potencial es la sumade las energías potenciales de cada pareja. Igual que ocurre con el sistema más simple (dos cuerpos) su valor coincide con ladisminución de energía potencial si la fuerza gravitatoria trajera todos los cuerpos desde una distancia infinita hasta la posición que ocupan o (con signo opuesto) al del trabajo mínimo que tendría que realizar una fuerza exterior para alejar, unatras otra, a todas las masas del sistema (hasta una distancia infinita).

$$Ep = -\,G\ \frac{M_1 m_2}{r}$$

Cuando m_2 se encuentra a una altura h sobre la superficie terrestre, $r = R_T + h$
Este valor también es negativo, menos negativo que el caso anterior. Como hemos dicho, cambiado de signo representa el trabajo que debemos realizar en contra del campo gravitatorio terrestre para desplazar m_2 desde una altura h de la Tierra hasta el infinito.

Teorema de Conservación de la Energía Mecánica
Llamamos Energía Mecánica de una partícula a la suma de su Energía Cinética más su Energía Potencial,

$$E_M = E_c + E_p$$

La Energía Mecánica de una partícula permanece constante bajo fuerzas conservativas,
El Trabajo de las fuerzas no conservativas es igual a la variación de la energía mecánica de la partícula.
Partamos del teorema de las fuerzas vivas,

$$W^B_{A,\ res} = \Delta E_c = E_c(B) - E_c(A)$$

En este trabajo está incluido tanto el trabajo de las fuerzas conservativas como el de las no conservativas,

$$W^B_{A,\ res} = W^B_{A,\ cons} + W^B_{A,\ no\ cons} = \Delta E_c$$

A continuación, aplicamos la definición de energía potencial,

$$W^B_{A,\ cons} = E_p(A) - E_p(B) = -\,\Delta E_p$$

y, por tanto,

$$W^B_{A,\ no\ cons} = \Delta E_c + \Delta E_p = \Delta E_M$$

Si no hay fuerzas no conservativas,

$$W^B_{A,\ no\ cons} = 0 = \Delta E_M \rightarrow E_M \equiv constante$$

Recordemos que, en la práctica, las únicas fuerzas no conservativas que nos encontraremos serán o bien la fuerza de rozamiento, o bien la fuerza exterior que se hace sobre el objeto, por ejemplo, cuando se le empuja.

La Energía Potencial Gravitatoria cerca de la superficie de la Tierra
La expresión de energía potencial gravitatoria es válida para cualquier punto exterior a la Tierra, incluidos puntos de su superficie. Sin embargo, si la masa m se desplaza entre dos puntos muy próximos a la superficie terrestre, la variación de g es prácticamente inapreciable, pudiendo considerarse constante el campo gravitatorio en tales circunstancias. Sólo en estas condiciones será válida la expresión de la energía potencial gravitatoria terrestre m.g.h.
La primera expresión o expresión general tiene signo – y toma como origen de energía el ∞, la segunda expresión tiene signo + y toma como origen de energía la superficie terrestre.
Pero ambas expresiones tienen en cuenta que la energía potencial gravitatoria aumenta al alejarnos de la tierra. Esto hace que la variación de energía potencial gravitatoria entre dos puntos próximos a la superficie terrestre coincida.

$$\Delta E_p = E_{p_f} - E_{p_0} = \frac{-G \cdot M \cdot m}{R_T + h} - \left(-\frac{G M m}{R_T}\right) =$$

$$= -G M m \left(\frac{1}{R_T + h} - \frac{1}{R_T}\right) = -G \cdot M \cdot m \left(\frac{R_T - R_T - h}{(R_T + h) R_T}\right) =$$

$$= +G M m \frac{h}{(R_T + h) R_T} = \quad // \text{ Si } h \text{ es muy pequeño comparado con el radio de la Tierra, } R_T + h \simeq R_T$$

$$= G \frac{M \cdot m \quad h}{R_T^2} = \underbrace{\frac{G \cdot M}{R_T^2}}_{g} m \cdot h = \boxed{m \cdot g \cdot h}$$

Es como si hubiera dos modelos distintos del campo gravitatorio terrestre:

El primero es un modelo en el que se supone que el campo gravitatorio varía con el cuadrado de la distancia al centro de la tierra, es un modelo basado en la ley de la gravitación de Newton y tiene una aplicación digamos general siempre que no nos alejemos a distancias astronómicamente grandes de la Tierra.

El segundo es un modelo en el que se supone que el campo gravitatorio es constante. Solo tiene aplicación en la superficie de la Tierra y para cálculos de cierta precisión debemos ser cautos con él porque presenta muchas limitaciones si nos movemos en un rango de alturas suficientemente amplio. Este modelo no serviría por ejemplo para calcular las orbitas de los satélites o incluso para calcular el peso de la torre Eiffel.

Ambos modelos son incompatibles, o usamos uno o usamos el otro, pero no debemos mezclar las conclusiones que obtengamos para cada uno de ellos. Por ejemplo, para el primero el potencial nulo se encuentra en los puntos del infinito, pero para el segundo podemos elegir cualquier referencia arbitrariamente, ambos conducen a resultados suficientemente aproximados pero sólo en el entorno de su validez y mezclar los resultados obtenidos desde uno y desde otro puede conducirnos a resultados aparentemente paradógicos.

EL POTENCIAL GRAVITATORIO

El campo de fuerzas gravitatorio es creado por una masa M a su alrededor, siendo su intensidad función del valor numérico de la masa, y de la distancia, independientemente de que haya o no otras masas en su entorno. En términos energéticos, el Potencial juega un papel similar, caracteriza al campo, y nos permite predecir el movimiento espontáneo de una masa m puesta en un lugar concreto de ese campo.

Dado un campo de fuerzas conservativo, llamamos potencial en un punto de un campo de fuerzas conservativo a la energía potencial por unidad de magnitud activa situada en ese punto; en el caso del campo gravitatorio

$$V_g = \frac{E_{p_g}}{m}$$

y suponiendo que se trata de una masa puntual,

$$V_g = \frac{E_{p_g}}{m} = -G \cdot \frac{M}{r}$$

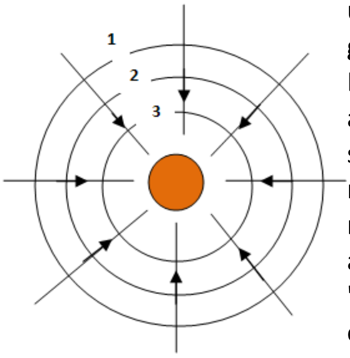
Su unidad en el SI es J/kg.

Podemos decir que el potencial gravitatorio en un punto es el trabajo externo que debemos realizar para trasladar la unidad de masa desde el infinito hasta dicho punto.

Por ello, el potencial en un punto siempre es negativo y el trabajo externo a realizar también es siempre negativo.

El potencial en un punto depende de la distancia desde dicho punto hasta el centro del campo. Todos los puntos que equidisten del centro del campo tendrán, pues, el mismo potencial y forman una superficie equipotencial, que es la superficie de la esfera de radio r que rodea al punto centro del campo. Cada punto de un campo gravitatorio está definido por un potencial, que es una magnitud escalar.

La expresión del potencial gravitatorio dice que, como la energía, el potencial es mayor cuanto más lejos se esté de la masa que lo produce. En consecuencia, el potencial decrece en la misma dirección en la que se incrementa el campo. Este concepto se observa en el dibujo adjunto, donde se representan las líneas del campo gravitatorio que produce



un cuerpo y tres superficies equipotenciales (en cada una de ellas el potencial gravitatorio vale lo mismo en todos sus puntos), 1, 2 y 3, de tal forma que V1 > V2 > V3. Las líneas del campo gravitatorio proceden del infinito y se dirigen hacia el cuerpo, atravesando a las superficies equipotenciales, en dirección perpendicular a ellas, y en el sentido en que el potencial decrece. Representaciones como ésta, del campo y su relación con las superficies equipotenciales, se pueden relacionar con el estudio de movimientos de cuerpos sometidos al campo gravitatorio. Por ejemplo, un cuerpo abandonado (con velocidad inicial cero) en algún lugar, sufre la fuerza gravitatoria y "cae" acelerando en el sentido que indica el campo, por tanto atraviesa superficies equipotenciales en orden decreciente. En cambio, un satélite en órbita alrededor de un planeta mantiene constante su energía (cinética y potencial), lo que significa que mantiene su velocidad e inserta su trayectoria en una superficie equipotencial.

Por otra parte, el trabajo necesario para desplazar una masa m de un punto A a otro B en el seno de un campo gravitatorio creado por una masa M sera: $W = -\Delta Ep = -(Ep_B - Ep_A) = -m \cdot (V_B - V_A) = -m \cdot \Delta V$ de donde se deduce que el trabajo necesario para desplazar una masa por una superficie equipotencial será nulo, pues en tal caso $\Delta V = 0$. **Además, el movimiento de las partículas será espontaneo en el sentido de potenciales decrecientes, es decir, siempre que VA > VB, pues en tal caso W > 0. En caso contrario, hay que realizar trabajo contra las fuerzas del campo (o contra el campo) para conseguir que la masa se mueva (W < 0) (MUY IMPORTANTE)**

La relación matemática entre el campo gravitatorio gy el potencial gravitatorio V_g es: $g = -\nabla V_g$

Si el campo es creado por una distribución de masas, la expresión del potencial final en un punto será la suma algebraica de las contribuciones de cada masa, como ocurre con la intensidad de campo. En cualquier caso, como sucede con la Intensidad, resulta una expresión función únicamente de las masas creadoras del campo.

De todo lo dicho también se puede establecer una relación entre el valor del campo gravitatorio en un punto y el potencial. Para una masa puntual:

$$\left.\begin{aligned} g &= G\frac{M}{r^2} \\ V &= -G\frac{M}{r} \end{aligned}\right\} \boxed{g = -\frac{V}{r}}$$

RECUERDA

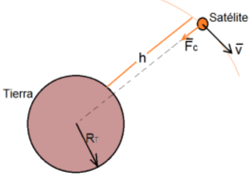
Energía potencial gravitatoria:

$$Ep = -G\,\frac{M_1 m_2}{r}$$

Potencial gravitatorio: $V_g = \frac{E_{p_g}}{m} = -G \cdot \frac{M}{r}$

APLICACIONES (MUY IMPORTANTE)

Periodo de revolución y velocidad orbital



En general un satélite es un cuerpo que orbita alrededor de otro mayor que se considera como el generador del campo gravitatorio.

Para simplificar consideraremos una órbita circular. Cuando un satélite describe una órbita experimenta una aceleración centrípeta debido a que se encuentra sometido a una fuerza central (Fc), que en el caso de la Tierra viene suministrada por la atracción gravitatoria que ejerce la Tierra sobre el satélite.

Por tanto, los módulos de la fuerza centrípeta y la fuerza gravitatoria son iguales, **Fc = Fg**

Recuerda que $F_c = m.\ v^2/r$

Para los parámetros fijados en la figura,

$$m\frac{v^2}{R_T+h} = G\frac{M_T m}{(R_T+h)^2} \qquad v = \sqrt{G\frac{M_T}{R_T+h}}$$

donde m es la masa del satélite que, al despejar la v, indica que la velocidad orbital es independiente de la masa del cuerpo que esté girando.

La expresión se puede modificar para introducir la intensidad del campo gravitatorio,

$$v = \sqrt{G\frac{M_T}{(R_T+h)^2}(R_T+h)} = \sqrt{g(R_T+h)}$$

$$v = \sqrt{g(R_T+h)}$$

Expresión que se también se conoce como primera velocidad cósmica.

Otros parámetros que se pueden conocer son la aceleración centrípeta del satélite,

$$a_c = \frac{v^2}{R_T+h}$$

y el periodo de revolución,

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \;\rightarrow\; T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\frac{v}{R_T+h}} = \frac{2\pi(R_T+h)}{v}$$

$$T = \frac{2\pi(R_T+h)}{\sqrt{G\frac{M_T}{R_T+h}}} \;\rightarrow\; T^2 = \frac{4\pi^2(R_T+h)^2}{G\frac{M_T}{R_T+h}} = \frac{4\pi^2(R_T+h)^3}{GM_T}$$

Se puede observar que

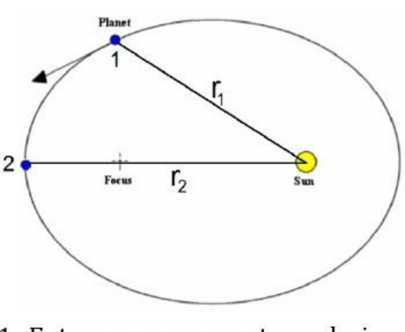
$$T^2 = \frac{4\pi^2}{GM_T}(R_T+h)^3 = K(R_T+h)^3$$

que es la expresión de la tercera ley de Kepler.

Todas las expresiones anteriores son válidas para cualquier planeta que gira en torno al Sol, para cualquier satélite que gire en torno a otro planeta o para cualquier cuerpo que gire en torno a otro por la fuerza de la gravedad. Simplemente hay que cambiar la masa de la Tierra, M_T, y el radio de la Tierra, R_T, por los valores correspondientes al cuerpo central. Para cuerpos muy alejados en comparación con su tamaño es más conveniente sustituir el término R_T+h por la distancia (r) entre sus centros de masa.

Si la órbita es elíptica, la distancia entre los centros de los cuerpos (el central y el satélite) es variable. En esta situación la energía potencial del satélite (o planeta) también es variable

$$Ep = -G\frac{Mm}{r}$$



Ahora bien, como sólo actúa una fuerza conservativa, la energía permanece constante. Así, entre dos puntos diferentes de la órbita elíptica (puntos 1 y 2 en la figura adjunta) se cumple que

$$\Delta Em = 0 \;\rightarrow\; Em_2 = Em_1 \;\rightarrow\; Ec_2 + Ep_2 = Ec_1 + Ep_1$$

En el punto 2 la distancia es mayor y la energía potencial es menor menos negativa que en el punto 1. Entonces, para mantener la igualdad, la energía cinética en 2 es menor que en 1, es decir, la velocidad del cuerpo en órbita elíptica es menor cuando está más alejado del foco y viceversa.

Velocidad de escape de un proyectil

Para conseguir que un cuerpo lanzado desde la superficie terrestre salga del campo gravitatorio habrá que comunicarle una gran velocidad. Se denomina velocidad de escape a la velocidad que debe adquirir un cuerpo para que se escape de la atracción terrestre.

Supongamos un cuerpo que se lanza desde la superficie de la Tierra. Supondremos también que no hay resistencia del aire. En estas condiciones

$$\Delta Em = 0 \rightarrow Em_2 = Em_1 \rightarrow Ec_2 + Ep_2 = Ec_1 + Ep_1$$

Si el punto 2 es el infinito podremos considerar que el cuerpo ha escapado del campo gravitatorio terrestre. Si el cuerpo se para en dicho punto,

$$Ec_2 = 0$$

$$Ep_2 = 0$$

Por tanto,

$$Ec_1 + Ep_1 = 0$$

$$\frac{1}{2}mv_1^2 - G\frac{M_T m}{R_T} = 0$$

Despejando la velocidad, que denotaremos como v_e,

$$v_e = \sqrt{\frac{2GM_T}{R_T}} = \sqrt{2g_o R_T}$$

Exprexión que recibe el nombre de segunda velocidad cósmica.

Consideraciones:

La velocidad de escape es independiente de la masa del objeto que quiere escapar (un proyectil necesita la misma velocidad de escape que una molécula).

Según se ha visto en el desarrollo, $Ec_1 + Ep_1 = 0$ $\quad$ $Ec_2 = 0$ $\quad$ $Ep_2 = 0$

Es decir, un objeto al que se le ha comunicado la velocidad de escape tiene energía mecánica cero. A medida que el proyectil se aleja de la Tierra su energía potencial va aumentando (se va haciendo menos negativa) a costa de su energía cinética de manera que la energía mecánica se conserva.

Si sustituimos los valores terrestres obtenemos una velocidad de escape desde la superficie de la Tierra de 11,2 Km/s.

La expresión es válida para objetos lanzados desde cualquier planeta o satélite.

La velocidad de escape es aplicable tan solo a objetos que dependan únicamente de su impulso inicial (proyectiles) para vencer la atracción gravitatoria; obviamente, no es aplicable a los cohetes, lanzaderas espaciales u otros artefactos con propulsión propia.

Si el cuerpo se sube primero a una altura que se pueda considerar no despreciable y desde este lugar se lanza, la velocidad de escape es, evidentemente, menor:

$$v_e = \sqrt{\frac{2GM_T}{R_T + h}} = \sqrt{2g(R_T + h)}$$

Siendo g la intensidad del campo gravitatorio terrestre a la altura h.

Lanzamiento de satélites. Energía y órbitas.

Generalmente el lanzamiento de un satélite artificial se realiza en dos fases:

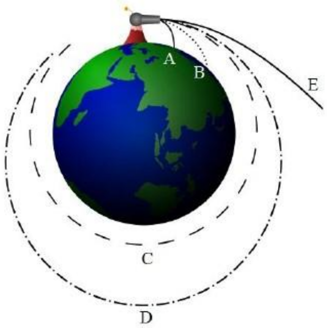
Fase 1: Se lleva el satélite a una altura h

Fase 2: Desde esa altura se lanza el satélite con una velocidad horizontal. El tipo de trayectoria que adquiera dependerá de la velocidad con que se lance desde dicha altura.

Supongamos que el cuerpo ya se encuentra a una altura h sobre la superficie terrestre, en ese momento el cuerpo se orienta y se lanza horizontalmente con una velocidad v_o. La energía mecánica del cuerpo será en ese instante:

Em = Ec + Ep

$$\frac{1}{2}mv_o^2 - G\frac{M_T m}{R_T + h} = Em$$



Dependiento del valor de v_o se pueden dar los siguientes casos (véase figura):

·) Casos A y B. Son lanzamientos que comportan caídas, es decir, son aquellos en los que la velocidad del lanzamiento es inferior a la velocidad orbital correspondiente a la altura de lanzamiento (h). La trayectoria hasta la superficie es una rama de parábola (tiro horizontal).

·) Casos C y D. Son lanzamientos que ponen el objeto en órbita. En estos casos la velocidad del lanzamiento es igual o superior a la velocidad orbital correspondiente a la altura h. Las órbitas pueden ser circulares (C) o elípticas (D).

En los dos casos, tanto para órbitas circulares como para órbitas elípticas, la energía mecánica del cuerpo es negativa, es decir,

$$\frac{1}{2}mv_o^2 - G\frac{M_T m}{R_T + h} < 0 \quad \rightarrow \quad \frac{1}{2}mv_o^2 < G\frac{M_T m}{R_T + h}$$

El caso C (órbita circular) se consigue si el lanzamiento tiene una velocidad igual a la velocidad orbital (primera velocidad cósmica), deducida en págs. 6-7.

$$v_o = velocidad\ orbital = \sqrt{G\frac{M_T}{R_T + h}} = \sqrt{g(R_T + h)}$$

Si v_o supera este valor entonces la órbita se hace elíptica, tanto más excentrica cuanto más se aleje v_o de la velocidad orbital. Pero hay un límite: el caso siguiente.

·) Caso E. Corresponde a un lanzamiento con una velocidad igual a la velocidad de escape del cuerpo situado a la altura h.

$$v_o = v_e = \sqrt{\frac{2GM_T}{R_T + h}} = \sqrt{2g(R_T + h)}$$

La trayectoria que sigue el cuerpo es parabólica y sería como si la órbita elíptica del caso D se abriera cada vez más, de forma que su eje mayor se hace infinito y el satélite sale del campo gravitatorio siguiendo una parábola. Tal como se ha dicho en el apartado 3.2., en este caso la energía mecánica del cuerpo es cero.

·) Si la velocidad de lanzamiento es superior a la velocidad de escape a la altura h, la curva trazada es una hipérbola. En este caso la energía mecánica del cuerpo (en el instante en que es lanzado) es positiva,

$$\frac{1}{2}mv_o^2 - G\frac{M_T m}{R_T + h} > 0 \quad \rightarrow \quad \frac{1}{2}mv_o^2 > G\frac{M_T m}{R_T + h}$$

El que la energía mecánica sea mayor que cero significa que el cuerpo llega al infinito con una velocidad mayor que cero.

Puesta en órbita de un satélite

En todas las consideraciones anteriores el cuerpo que se pone en órbita ya se encuentra a la altura deseada. Ante la cuestión de determinar la energía necesaria para poner un satélite en una determinada órbita desde la superficie de la Tierra debemos tener en cuenta que al estar en un campo conservativo, se debe cumplir que la energía que le comunicamos al satélite sea igual a la suma del incremento de su energía cinética y de su energía potencial,

$$W_{F_{exterior}} = E_{comunicada} = \Delta Ec + \Delta Ep$$

Al lanzar un satélite se suele hacer desde una latitud ecuatorial y hacia el este para aprovechar al máximo el impulso que le proporciona la Tierra pues el satélite lleva la velocidad del punto de lanzamiento. Así, si $\Delta Em = 0$

$$Ep_{superficie} + Ec_{ayuda\,Tierra} + E_{comunicada} = Ep_{órbita} + Ec_{órbita}$$

Veamos miembro a miembro y término a término. Para ello tendremos en cuenta que,

- M_T es la masa de la Tierra
- R_T es el radio de la Tierra
- h la altura sobre la superficie terrestre a la que se encuentra el satélite
- m es la masa del satélite
- v_T es la velocidad de rotación de la Tierra
- v_o es la velocidad orbital del satélite a la altura h

$$Ep_{superficie} = -G\ \frac{M_T\, m}{R_T}$$

$$Ep_{órbita} = -G\ \frac{M_T m}{R_T + h}$$

$$Ec_{órbita} = \frac{1}{2}\, m\, v_o^2 = \frac{1}{2}\, m\ \frac{GM_T}{R_T + h}$$

Este valor se hace cero si sólo se desea conocer la energía necesaria para que un cuerpo alcance una altura h.

$$Ec_{ayuda\,Tierra} = \frac{1}{2}\, m\, v_T^2$$

El cuerpo se lanza desde el ecuador pues en donde la velocidad de la Tierra (rotación) es máxima (radio máximo).

$$v_T = \frac{2\pi R_T}{T} = \frac{2\pi \cdot 6{,}38 \cdot 10^6}{24 \cdot 3600} = 465\ m/s$$

La energía cinética que corresponde a este valor de velocidad es, por ejemplo, para un satélite de 65 kg de masa que hay que situar a una altura de dos radios terrestres desde la superficie, del 0,2 % de toda la energía necesaria. Es un valor pequeño y en algunos problemas ni se tiene en cuenta (por ejemplo, en el análisis de la velocidad de escape no se ha tenido en cuenta).

Con todas estas expresiones se puede determinar la energía comunicada al satélite,

$$E_{comunicada} = -G\ \frac{M_T m}{R_T + h} + \frac{1}{2}\, m\ \frac{GM_T}{R_T + h} + G\ \frac{M_T\, m}{R_T} - \frac{1}{2}\, m\, v_T^2$$

$$E_{comunicada} = G\ \frac{M_T\, m}{R_T} - \frac{1}{2} G\ \frac{M_T m}{R_T + h} - \frac{1}{2}\, m\, v_T^2$$

A partir de esta energía comunicada se puede determinar la velocidad con que debe ser lanzado un satélite para alcanzar una determinada altura, asumiendo que toda esta energía es energía cinética (y se considera que $Ec_{órbita} = 0$, como se ha mencionado antes).

Energía mecánica de un satélite en órbita cerrada.

La energía mecánica que debe tener un satélite para mantenerse en una órbita estacionaria a una altura sobre la superficie terrestre suele llamarse también energía de enlace.

Si el satélite describe una órbita circular

$$Em = Ec + Ep$$

$$Em = \frac{1}{2}mv^2 - G\frac{M_T m}{R_T + h}$$

Como v es la velocidad orbital,

$$Em = \frac{1}{2}m\,G\frac{M_T}{R_T + h} - G\frac{M_T m}{R_T + h}$$

$$Em = \frac{1}{2}m\,G\frac{M_T}{R_T + h} - G\frac{M_T m}{R_T + h}$$

$$Em = -\frac{1}{2}\,G\frac{M_T m}{R_T + h} = -G\frac{M_T m}{2R_o}$$

Siendo Ro la distancia desde el satélite al centro de la Tierra. Se puede observar que mientras que el satélite se mantenga en órbita la energía mecánica del mismo permanece constante.
Si la órbita fuese elíptica la expresión de la energía mecánica sería, donde "a" es el semieje mayor de la órbita elíptica.

$$Em == -G\frac{M_T m}{2a}$$

Un objeto libre, que no esté ligado a la atracción terrestre no tiene energía potencial, su energía mecánica (positiva) será la correspondiente a su energía cinética. Por tanto, un satélite tiene menos energía que si estuviera libre.

Cambio de órbita de un satélite.
Para hacer que un satélite cambie de una órbita situada a una distancia r_i del centro de la Tierra a otra órbita cuya distancia es r_f, podemos conocer el trabajo que se debe realizar pues equivale a la diferencia entre las energías de enlace correspondientes.
$W(i,f) = Em_f - Em_i$
Al utilizar esta expresión tenemos en cuenta no solo la energía potencial del satélite a la altura a la que se encuentre sino también su velocidad orbital correspondiente.
Importante: esta expresión no es el trabajo que realiza el campo gravitatorio sino que se trata del trabajo externo que se debe realizar para conseguir el cambio de órbita.

$$W_i^f = -G\frac{M_T m}{2r_f} + G\frac{M_T m}{2r_i}$$

$$W_i^f = \frac{GM_T m}{2}\left(\frac{1}{r_i} - \frac{1}{r_f}\right)$$

Si se trata de acercar el satélite a la Tierra,

$$r_i > r_f \rightarrow \frac{1}{r_i} < \frac{1}{r_f} \rightarrow \frac{1}{r_i} - \frac{1}{r_f} < 0 \rightarrow W_i^f < 0$$

es decir, se trata de un trabajo negativo. El proceso no requierirá del consumo de energía ya que en realidad se trata de una caída.

Si se trata de alejar el satélite de la Tierra,

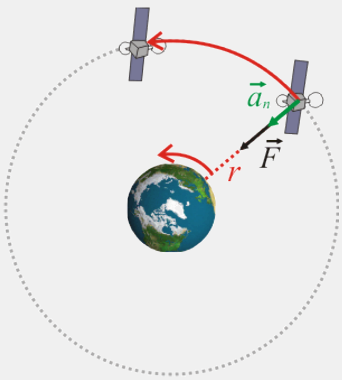
$$r_i < r_f \rightarrow \frac{1}{r_i} > \frac{1}{r_f} \rightarrow \frac{1}{r_i} - \frac{1}{r_f} > 0 \rightarrow W_i^f > 0$$

es decir, se trata de un trabajo positivo. El proceso requiere del consumo de energía ya que en realidad se trata de un "lanzamiento hacia arriba".

Órbita geoestacionaria

Una **órbita geosíncrona** es la órbita que describe un satélite alrededor de la Tierra con el mismo período de rotación que la Tierra (es decir, con la misma velocidad angular ω). Si además la órbita está sobre el Ecuador, y es una circunferencia, se denomina **órbita geoestacionaria**.

Para calcular la **altura de una órbita geoestacionaria**, se utiliza la Segunda Ley de Newton y la Ley de Gravitación Universal.



$$F = G\frac{m_s M_T}{(r+R_T)^2}$$

$$a_n = \omega^2 (r+R_T)$$

La fuerza que la Tierra ejerce sobre el satélite es la fuerza gravitatoria, donde M_T es la masa de la Tierra, m_s es la masa del satélite, R_T es el radio de la Tierra y *G* la constante de gravitación universal.

Como la velocidad angular es constante, la única aceleración que tiene el satélite es **aceleración normal**, paralela a la fuerza gravitatoria.

Aplicando la Segunda Ley de Newton,

$$F = m_s a_n$$

$$G\frac{\cancel{m_s} M_T}{(r+R_T)^2} = \cancel{m_s}\,\omega^2 (r+R_T)$$

Despejando *r*,

$$r = \sqrt[3]{\frac{G M_T}{\omega^2}} - R_T$$

Ahora no queda más que sustituir los valores numéricos en la ecuación anterior.

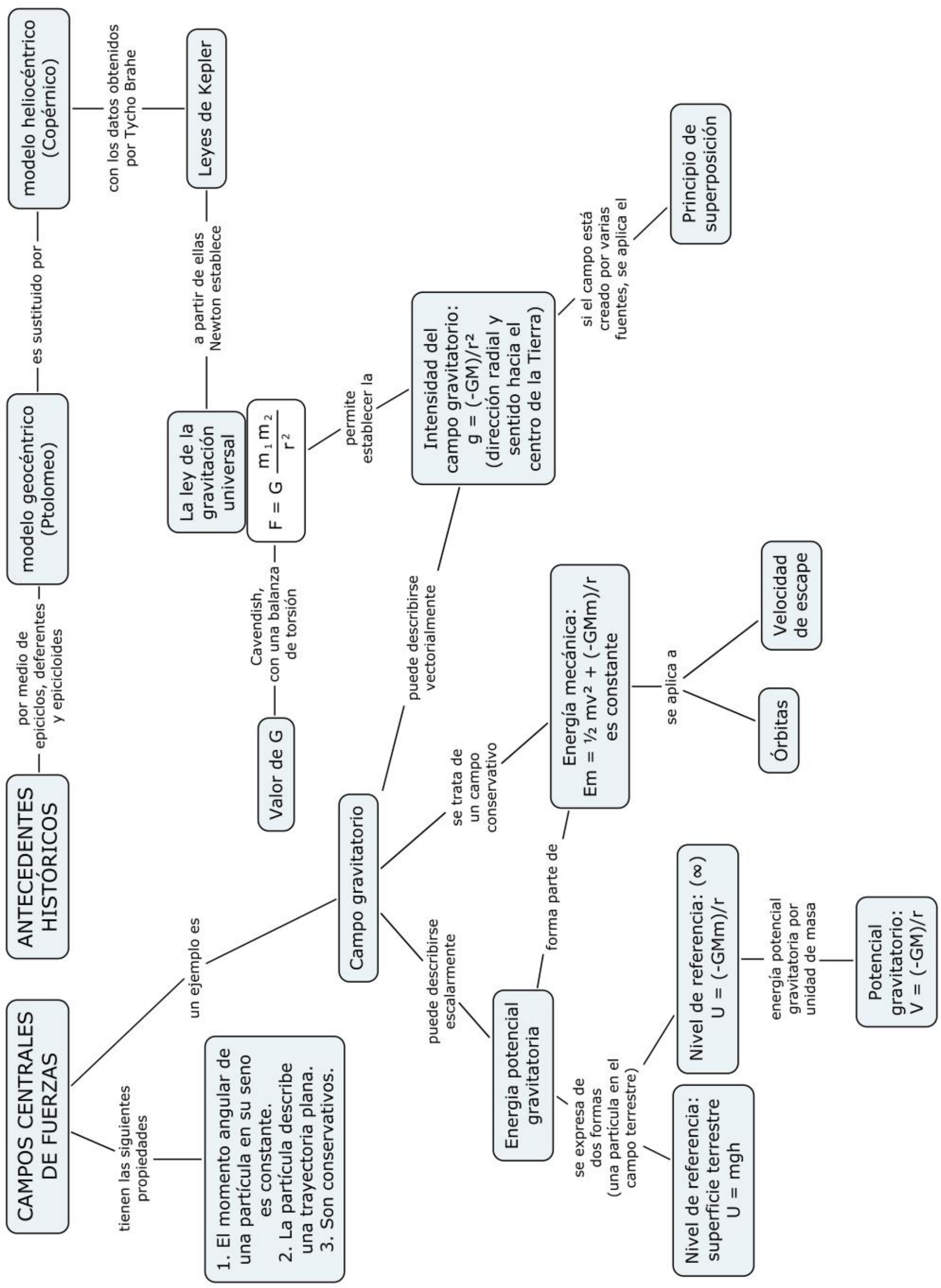
G	$6{,}67\ 10^{-11}$ N m^2 kg^{-2}
R_T	$6{,}378\ 10^{6}$ m
M_T	$5{,}973610\ 10^{24}$ kg
ω	$7{,}29\ 10^{-5}$ rad s^{-1}

El valor de *r* para la órbita geoestacionaria es entonces:

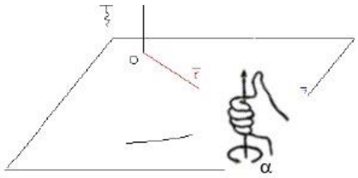
$$r = 35{,}780\,10^6\,m = 35780\,km$$

AUNQUE PAREZCA COMPLICADO, CUANDO SE APLICA NO LO ES TANTO, SÓLO HAY QUE SABERSE UNAS POCAS EXPRESIONES.

Resumen



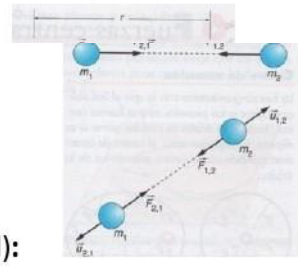
EXPRESIONES



- *Momento de una fuerza:* $\overrightarrow{\mathbf{M}} = \vec{\mathbf{r}} \times \overrightarrow{\mathbf{F}}$; U.S.I.: N·m
- *Momento angular:* $\vec{\boldsymbol{L}} = \vec{\boldsymbol{r}} \times \vec{\boldsymbol{p}} = \vec{\boldsymbol{r}} \times \boldsymbol{m} \cdot \vec{\boldsymbol{v}}$; U.S.I.: kg·m²/s
- $3^{a}\ ley\ de\ Kepler$: $T^2 \propto r^3$; $\frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{r_1^3}{r_2^3}$
- *Fuerzas centrales y conservación del momento angular:*

$$r_1 \cdot v_1 \cdot sen\ \alpha_1 = r_2 \cdot v_2 \cdot sen\ \alpha_2$$

En el afelio y perihelio: $\boldsymbol{r_1 \cdot v_1 = r_2 \cdot v_2}$

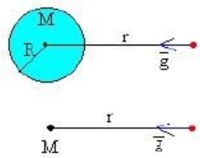


- Ley de gravitación universal: $\boldsymbol{F_{21} = F_{12} = G\frac{m_1 \cdot m_2}{r^2}}$

$$\vec{F}_{21} = -G\frac{m_1 \cdot m_2}{r^2}\ \vec{u}_{21}$$

- Intensidad de campo gravitatorio (aceleración de la gravedad):

$$\vec{\boldsymbol{g}} = \frac{\vec{\boldsymbol{F}}}{\boldsymbol{m'}} = -\boldsymbol{G}\frac{\boldsymbol{m}}{\boldsymbol{r^2}}\ \vec{\boldsymbol{u}}_{\boldsymbol{r}}\ \text{U.S.I.: N/kg=m/s}^2$$



Módulo: $\boldsymbol{g = \frac{F}{m'} = G\frac{m}{r^2}}$; sentido: hacia la masa

Principio de superposición: Si hay varias masas: $\vec{g} = \vec{g}_1 + \vec{g}_2 + \cdots$

- La fuerza de gravedad es conservativa: $\boldsymbol{W_{campo} = -\Delta E_p = -m \cdot \Delta V}$; $\boldsymbol{W_{ext} = \Delta E_p}$;

Si solo actúa la fuerza gravitatoria se conserva la energía mecánica:

$$\Delta E_c + \Delta E_p = 0\ \ ;\ \boldsymbol{E_{c0} + E_{p0} = E_c + E_p}$$

- Energía potencial gravitatoria: $\boldsymbol{E_p = -G\frac{m_1 \cdot m_2}{r}}$; U.S.I.: J
- Potencial gravitatorio: $\boldsymbol{V = \frac{E_p}{m'} = -G\frac{m}{r}}$; U.S.I.: J/kg ; $\boldsymbol{E_p = m' \cdot V}$

Principio de superposición: Si hay varias masas: $V=V_1+V_2+V_3+\ldots$..

- **Recuerda: La fuerza gravitatoria y la energía potencial se calculan para una masa mientras que la intensidad de campo y el potencial se calculan en un punto del campo.**
- **Recuerda: la fuerza y la intensidad de campo son magnitudes vectoriales mientras que la energía potencial y el potencial son magnitudes escalares siempre negativas.**

ENERGÍA DE UN SATÉLITE EN UNA ÓRBITA. La energía mecánica de un satélite en una órbita es igual a la suma de su energía cinética más su energí a potencial:

$$E = E_c + E_p = \frac{1}{2}mv^2 - G\frac{Mm}{r}$$

La velocidad orbital de un satélite en una determinada órbita viene dada por:

$$G\frac{Mm}{r^2} = m\frac{v^2}{r} \Rightarrow \boxed{v = \sqrt{G\frac{M}{r}}}$$

Sustituyendo la velocidad en la expresión de la energía, tenemos que la energía total vendrá dada por:

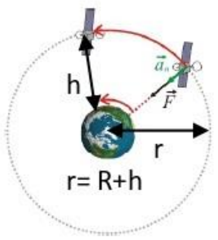
$$E = E_c + E_p = \frac{1}{2}mv^2 - G\frac{Mm}{r} \Rightarrow E = \frac{1}{2}m\left(\sqrt{G\frac{M}{r}}\right)^2 - G\frac{Mm}{r}$$

$$\boxed{E = G\frac{Mm}{2r} - G\frac{Mm}{r} = -G\frac{Mm}{2r}}$$

De tal manera que se demuestra que la energía total de un satélite en una órbita es igual a la mitad de la energía potencial en la misma.

- **Satélites en órbita circular.**

La fuerza centrípeta es la fuerza gravitatoria: $F_c=F_g$



$$\begin{cases} m\frac{v^2}{r} = G\frac{m \cdot M}{r^2}\ ;\ v^2 = G\frac{M}{r} \\ velocidad\ orbital: v = \frac{2\pi \cdot r}{T} \end{cases} \qquad \frac{4\pi^2 \cdot r^2}{T^2} = G\frac{M}{r} \Longrightarrow T^2 = \frac{4\pi^2}{G \cdot M}r^3$$

3ª ley de Kepler ↑

Recuerda: satélite geoestacionario: T=24h

VELOCIDAD ORBITAL DE UN SATÉLITE.- la velocidad orbital de un cuerpo orbitando alrededor de otro, igualando el módulo de la fuerza gravitatoria al módulo de la fuerza centrípeta:

$$G\frac{Mm}{r^2} = m\frac{v^2}{r} \Rightarrow \boxed{v = \sqrt{G\frac{M}{r}}}$$

Que representaría la velocidad orbital.

Donde M representa la masa del cuerpo central y r la distancia entre los centros de dicho cuerpo central y el cuerpo que orbita alrededor de él.

VELOCIDAD DE ESCAPE.- velocidad que le hay que comunicar a un cuerpo para que este pueda escapar de la atracción terrestre, aplicando el principio de conservación de la energía, podemos escribir:

$$-G\frac{Mm}{R} + \frac{1}{2}mv^2 = 0 \Rightarrow \boxed{v = \sqrt{\frac{2Gm}{R}}}$$

ENERGÍA DE CAMBIO DE ÓRBITA.- la energía que sería necesario comunicar a un satélite para cambiarlo de órbita, aplicando el principio de conservación de la energía obtenemos:

$$\boxed{E = \frac{GMm}{2}\left[\frac{1}{R} - \frac{1}{R'}\right]}$$

CAMPO GRAVITATORIO		
Ley de Newton (gravitación Universal)	$\mathbf{F} = -G \cdot \frac{M_1 \cdot M_2}{r^2} \cdot \mathbf{u_r}$	G : cte gravitación Universal $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ N \cdot m^2/Kg^2$ $\mathbf{u_r} = \mathbf{r} / \lvert\mathbf{r}\rvert$ vector unitario radial
Fuerzas que un sistema de masas puntuales (M_i) ejerce sobre otra masa puntual (M)	$\mathbf{F} = \Sigma \mathbf{F_i} = -G \cdot M \cdot \Sigma \frac{M_i}{r_i^2} \cdot \mathbf{u_{r(i)}}$	$\mathbf{r_i}$ = vector de mi a m ≠ **0** $\mathbf{u_{r(i)}}$ = vector unitario de mi a m
Fuerza ejercida por una distribución continua de masa	$\mathbf{F} = -G \cdot M \cdot \int_v \frac{\rho \cdot dV}{r^2} \cdot \mathbf{u_r}$	ρ = densidad de materia V: volumen
Campo gravitatorio terrestre en su superficie	$\mathbf{g_o} = -G \cdot \frac{M_T}{R_T^2} \cdot \mathbf{u_r}$	g_o : gravedad en R_T = 9,81 N/Kg $G \cdot M_T = g_o \cdot R_T^2$
	INTENSIDAD CAMPO GRAVITATORIO	**POTENCIAL GRAVITATORIO**
Masa aislada (M_1)	$\mathbf{E} = -G \cdot \frac{M_1}{r^2} \cdot \mathbf{u_r} = \frac{\mathbf{F}}{M_2}$	$V = -G \cdot \frac{M_1}{r}$
Sistema de masas puntuales	$\mathbf{E} = \Sigma \mathbf{E_i} = -G \cdot \Sigma \frac{M_i}{r_i^2} \cdot \mathbf{u_{r(i)}}$	$V = \Sigma V_i = -G \cdot \Sigma \frac{M_i}{r_i}$
Distribución continua de masas	$\mathbf{E} = -G \cdot \int_v \frac{dM}{r^2} \cdot \mathbf{u_r}$	$V = -G \cdot \int_v \frac{dM}{r}$
Capa esférica de radio R		
En el interior (r<R)	$E = 0$	$V = -G \cdot \frac{M}{R}$
En la superficie (r=R)	$E = -G \cdot \frac{M}{R^2}$	$V = -G \cdot \frac{M}{R}$
En el exterior (r>R)	$E = -G \cdot \frac{M}{r^2}$	$V = -G \cdot \frac{M}{r}$
Esfera uniforme de radio R		
En el interior (r<R)	$E = -G \cdot \frac{M}{R^3} \cdot r$	$V = \frac{-G \cdot M}{2 \cdot R^3} \cdot (3 \cdot R^2 - r^2)$
En la superficie (r=R)	$E = -G\ \frac{M}{R^2}$	$V = -G \cdot \frac{M}{R}$
En el exterior (r>R)	$E = -G \cdot \frac{M}{r^2}$	$V = -G \cdot \frac{M}{r}$
LEYES DE KEPLER		
Primera ley	Los planetas describen órbitas elípticas alrededor del Sol, encontrándose éste en uno de sus focos.	
Segunda ley	Los radios vectores que describen la posición del planeta desde el Sol, barren áreas iguales en tiempos iguales. Su velocidad aerolar es cte. (Principio de conservación del momento cinético. **L**)	
Tercera ley	$\frac{T^2}{R^3} = cte$; $T^2 \cdot G \cdot M = 4 \cdot \pi^2 \cdot R^3$	T : periodo R : Semieje mayor de la elipse
COHETES Y SATÉLITES		
Velocidad orbital	$v_o^2 = \frac{G \cdot M}{R}$	R: Radio de la órbita
Velocidad escape	$v_e^2 = \frac{2 \cdot G \cdot M}{R}$	$v_e^2 = 2 \cdot v_o^2$
Relación entre el campo y el potencial	$\mathbf{E} = -\ \mathbf{grad\ V}$ $E = -\ dV/dr$	$V = -\int \mathbf{E} \cdot \mathbf{dr}$