LA INTERACCIÓN GRAVITATORIA 04

ANTES DE PASAR A LOS PROBLEMAS DE TU PROFESOR VAMOS A VER ALGUNOS PROBLEMAS RESUELTOS.

A) LEYES DE KEPLER

1. **La Luna posee una masa de 7, 35 10^{22} kg y un radio de 1, 74 10^{6} m. Un satélite de 5000 kg de masa gira a su alrededor a lo largo de una circunferencia con radio iguala cinco veces el radio de la Luna. (Dato: G = 6, 67 10^{-11} en unidades S.I). Calcular el periodo de giro del satélite.**

A partir de la 3ª ley de Kepler o bien de igualar la fuerza de atracción Fg con la fuerza centrípeta Fc, se llega a la expresión

$T^2 = 4\pi^2 r^3 / G M$, donde r es el del satélite y M la masa de la Luna, despejando T y sustituyendo por los datos,

T = 72820, 25s

Así es como se resuelven casi todos los problemas en que piden el periodo T de un pequeño cuerpo o satélite que gira alrededor de otro más grande o planeta, Tierra alrededor del Sol, Luna alrededor de Tierra, satélite alrededor de planeta, etc., donde la Masa nunca es la del pequeño, sino la del Sol, Tierra, Luna, planeta,…

2. **Suponga que la órbita de la Tierra alrededor del Sol es circular, con un radio de 1, 59 10^{11} m. (Dato: G = 6, 67 10^{-11}). Calcule la masa del Sol.**

A partir de la 3ª ley de Kepler o bien de igualar la fuerza de atracción Fg con la fuerza centrípeta Fc, se llega a la expresión

$T^2 = 4\pi^2 r^3 / G M$, donde r es el de la Tierra y M la masa del Sol, despejando M y sustituyendo por los datos,

$M = 2{,}39.10^{30}$ kg

3. **El radio de Venus es 0,983 veces el de la Tierra. Calcule la duración de un año en Venus.**

Se comparan dos planetas de una misma estrella (el Sol), luego procede la 3ª ley de Kepler, en su enunciado inicial:

$T^2 = Kr^3$ K es la constante de Kepler para el Sistema Solar, cuyo valor no nos interesa, sólo saber que es constante: $K = T^2/R^3$ $(T^2_V / R^3_V) = (T^2_T / R^3_T)$ $R_V = 0{,}983\, R_T$ $T_T = 1$ año

$R_V = 0{,}983\, R_T$ $T_T = 1$ año $T^2_V = R^3_V\, T^2_T / R^3_T$ $T^2_V = (0{,}983\, R_T)^3\, T^2_T / R^3_T = 0{,}983^3$

$T_V = \sqrt{(0{,}983^3)} = 0{,}974$ años

4. **Los cuatro satélites de Júpiter descubiertos por Galileo son: Ío (radio = 1822 km, masa = 8, 9·1022 kg, radio orbital medio = 421600 km), Europa, Ganímedes y Calisto (radio = 2411 km, masa = 10, 8 · 1022 kg). Obtenga los radios medios de las órbitas de Europa y Ganímedes, sabiendo que el período orbital de Europa es el doble que el de Ío y que el período de Ganímedes es el doble que el de Europa.**

Nuevamente se comparan satélites de un mismo sistema, 3ª ley de Kepler, y habrá que hacerlo dos veces, para Europa e Ío y para Ganímedes y Europa.

$$\frac{T_E^2}{T_I^2} = 2^2 = \frac{4\pi^2 r_E^3/GM_J}{4\pi^2 r_I^3/GM_J} = \left(\frac{r_E}{r_I}\right)^3 \Rightarrow r_E = 2^{2/3}\cdot r_I = 4,216\cdot 10^8\cdot 2^{2/3} = 6,69\cdot 10^8 \text{ m}$$

$$\frac{T_G^2}{T_E^2} = 2^2 = \frac{4\pi^2 r_G^3/GM_J}{4\pi^2 r_G^3/GM_J} = \left(\frac{r_G}{r_E}\right)^3 \Rightarrow r_E = 2^{2/3}\cdot r_I = 6,69\cdot 10^8\cdot 2^{2/3} = 1,062\cdot 10^9 \text{ m}$$

5. **El satélite Hispasat se encuentra en una órbita situada a 36000 km de la superficie terrestre. La masa de la Tierra es de $5.97\cdot 10^{24}$ kg y su radio de 6380 km. Demuestre que la órbita es geoestacionaria.**

Para que la órbita sea geoestacionaria, el periodo debe ser igual al periodo de rotación terrestre, es decir, T = 1 día = 86400 s. Aplicando la tercera ley de Kepler:

$T = \sqrt{(4\pi^2 r^3 / GM)} = 86870$ s La órbita es aproximadamente geoestacionaria.

6. **Plutón tiene una masa de $1{,}29\cdot 10^{22}$ kg, un radio de 1151 km y el radio medio de su órbita alrededor del Sol es de 5, 9 10^{9} km. Calcule cuántos años tarda Plutón en completar una vuelta alrededor del Sol. Datos:**

masa del Sol = 1, 98 10^{30} kg, G = 6, 67 10^{-11} SI

Aplicando la tercera ley de Kepler:

T = √ ($4\pi^2 r^3$ / GM) = √ ($4\pi^2$ $(5{,}9.10^{12})^3$ / 6, 67 10^{-11} $1{,}98.10^{30}$) = 7, 835.10^9s que equivale a 248, 45 años

Como ves los datos de M son las del astro principal sol y r es la órbita a su alrededor del planeta Plutón.

7. **Un planeta hipotético describe una órbita circular alrededor del Sol con un radio tres veces mayor que el de la órbita terrestre (supuesta también circular). ¿En cuántos años terrestres recorrería el planeta su órbita?**

Nos piden calcular el periodo del planeta sabiendo que su radio orbital es 3 veces mayor que el terrestre;la 3ª ley de Kepler relaciona el periodo de un planeta con el radio de su órbita (supuesta ésta circular):

$T^2 = k \cdot r^3$

Tenemos la Tierra y un planeta del mismo sistema solar.

$T^2 = k \cdot r^3$

$K = T^2/r^3$ $\quad$ $(T^2_p / r^3_p) = (T^2_T / r^3_T)$ $\quad$ T_T = 1 año $\quad$ r_T = radio orbital de la Tierra $\quad$ $r_p = 3\ r_T$

Despejamos T_p, sustituimos y simplificamos T_p = 5,2 años

8. **La velocidad orbital de Mercurio alrededor del Sol vale 47´87 km·s^{-1}, mientras que la velocidad orbital de la Tierra es de 29´78 km·s^{-1}. Determinar cómo están relacionados sus radios orbitales (o distancias de ambos planetas al Sol).**

El periodo de un planeta y su radio orbital están relacionados mediante la 3ª ley de Kepler:

$T^2 = k \cdot r^3 \longrightarrow (2\pi r/v)^2 = k\ r^3$ $\quad$ Despejamos r $\quad$ $r = 4\pi^2 / kv^2$

Ahora relacionamos los radios orbitales y simplificamos $\quad$ $r_T / r_M = v_M^2 / v_T^2 = 47870^2 / 29780^2 = 2{,}58$

Así pues, el radio orbital de la Tierra es 2´58 veces mayor que el radio orbital de Mercurio.

9. **Mientras un planeta recorre su órbita elíptica alrededor del Sol, ¿se desplaza siempre a la misma velocidad? ¿Qué trabajo realiza la fuerza de atracción gravitatoria a lo largo de una órbita completa? Razone las respuestas.**

No. De acuerdo con la 2a ley de Kepler, el vector posición del planeta barre áreas iguales en intervalos de tiempo iguales (la velocidad areolar permanece constante). Ello significa que la velocidad del planeta será mayor en el perihelio (punto más cercano al Sol) que en el afelio (punto más lejano).

Por otra parte, al ser la fuerza gravitatoria una fuerza conservativa, el trabajo que ésta realiza cuando un planeta describe una trayectoria completa será nulo, pues en tal caso coinciden las posiciones inicial y final del planeta (recordemos que una fuerza es conservativa cuando el trabajo que realiza al desplazar un objeto no depende de la trayectoria del mismo, sino de las posiciones inicial y final).

Como has visto la 3ª ley de Kepler se usa para relacionar el periodo y la órbita de cualquier planeta, pero dado que $T^2 = Kr^3$, K es constante $K = T^2/R^3$, también podemos relacionar dos planetas de un mismo sistema o un planeta y el astro central.