LA INTERACCIÓN GRAVITATORIA 08

ENERGÍA

Estudiar el **campo gravitatorio** desde un punto de vista energético, aunque pueda resultar algo más abstracto al principio, nos permite simplificar enormemente algunos cálculos de gran relevancia, como por ejemplo saber qué velocidad debe tener un cuerpo para escapar de la influencia de la Tierra.

<u>El teorema de conservación de la energía mecánica aplicado a cuerpos que se mueven exclusivamente bajo la acción de la fuerza gravitatoria</u>
Llamamos Energía Mecánica de una partícula a la suma de su Energía Cinética más su Energía Potencial,

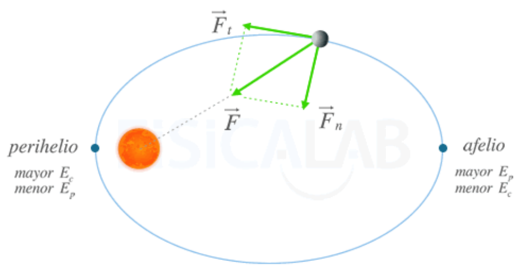
$$E_M = E_c + E_p$$

Así, en el caso de un cuerpo que se encuentre inmerso en un campo gravitatorio, su **energía mecánica** es la suma de su energía cinética, asociada a la velocidad del movimiento, y la energía potencial, asociada a su posición en el campo gravitatorio. El hecho de que las órbitas planetarias sean constantes nos permite intuir que la energía mecánica de los planetas y satélites se mantiene también constante.

Δ Em = 0 Δ Em = Δ Ec + Δ Ep = 0
Recuerda: Ec = ½ mv^2 Ep = - G Mm/r
(También son campos conservativos como el gravitatorio, el de las fuerzas elásticas o el campo eléctrico, en ellos la suma de su energía cinética y potencial permanece constante en el tiempo. Energía mecánica=constante).
Efectivamente, la **fuerza gravitatoria** es una **fuerza conservativa** y por tanto, **la variación de *energía mecánica* en un cuerpo sometido exclusivamente a la fuerza gravitatoria es cero**. La energía mecánica permanece constante, la energía cinética se transforma en energía potencial y viceversa.
Cuando hay **fuerzas no conservativas**, como las debidas al rozamiento, es preciso considerar el trabajo realizado por éstas. La energía mecánica ya no permanece constante. La variación de la energía mecánica es precisamente el trabajo realizado por las fuerzas no conservativas.
Δ E mecánica = W realizado por las fuerzas no conservativas
Aunque como estamos en el campo gravitatorio conservativo, no tenemos que fijarnos en esas fuerzas.

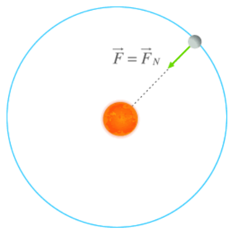
<u>En el campo gravitatorio se cumple:</u>
Em constante Δ Em = 0 Δ Em = Δ Ec + Δ Ep = 0
El trabajo realizado por la fuerza gravitatoria cuando el cuerpo sobre el que actúa se desplaza entre dos puntos viene dado, como fuerza conservativa que es, por la variación negativa de su energía potencial gravitatoria:
W_g = - Δ Ep
Por otra parte, el trabajo realizado por la fuerza total, que en este caso coincide con la gravitatoria, cuando el cuerpo se desplaza entre dos puntos coincide, según el <u>teorema de la energía cinética</u>, con la variación de energía cinética experimentada por el cuerpo (positiva):
W_g = Δ Ec
O sea:
W_g = - Δ Ep
W_g = Δ Ec - Δ Ep = Δ Ec Δ Ec + Δ Ep = 0 Δ Em = 0

En ***órbitas elípticas*** la energía potencial es menor en los puntos más cercanos al foco y por tanto la energía cinética (la velocidad del cuerpo) deberá ser mayor. La razón podemos encontrarla en la siguiente figura



La existencia de una componente tangencial en la fuerza gravitatoria de órbitas elípticas hace que la energía cinética y la potencial varíen a lo largo de la misma, aunque su suma, la energía mecánica, permanece constante.

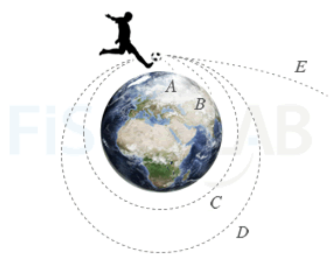
En ***órbitas circulares*** la energía potencial y la energía cinética permanecen constantes. La razón, de nuevo, podemos



encontrarla en la siguiente figura
En órbitas circulares la fuerza gravitatoria es siempre normal a la trayectoria por lo que la energía cinética y la potencial permanecen inalteradas.

Para hallar la energía mecánica total en una órbita, llamada energía de enlace, suma de la Ec y Ep se aplica:
$Em = Ec + Ep = \frac{1}{2} mv_{orbital}^2 - G\, Mm/r = \frac{1}{2} m \left(\sqrt{GM_T/r}\right)^2 - G\, Mm/r = \frac{1}{2} m\, (GM_T/r) - G\, Mm/r = -\frac{1}{2} G\, M_T.m / r$

VELOCIDAD DE ESCAPE (Se suele preguntar mucho)



¿Has pensado alguna vez qué velocidad tendrías que imprimir a un balón para que se alejase de la Tierra y no volviese jamás? Vamos a tratar de responder a esta pregunta desde la óptica de la Física.
Desde la cima de una montaña un super hombre de gran fuerza chuta balones con cada vez más velocidad. Los balones A y B caen en Tierra. El C y el D entran en órbita, circular y elíptica respectivamente. El E escapa a la acción del campo generado por la Tierra. ¿A qué velocidad salió disparado?
Sabemos que el campo gravitatorio generado por la Tierra deja de tener efectos a una distancia infinita de la misma. Así, un cuerpo como el balón de la figura, que se sitúa a una distancia infinita de la Tierra no experimentará la fuerza gravitatoria que ocasiona al ser esta inversamente proporcional al cuadrado de la distancia.
Podemos buscar cual es la velocidad inicial, es decir, la energía cinética, que sería necesario que tuviera el cuerpo, situado inicialmente en la superficie, para que escapase de la atracción de la Tierra. A dicha velocidad la llamaremos **velocidad de escape v_e** y para llegar a ella seguiremos un enfoque energético. Tendremos en cuenta:

- Que *situar un cuerpo en el infinito* significa conferirle una energía potencial $E_p = 0$ (la energía potencial gravitatoria, recordamos, es cero en el infinito y negativa a cualquier distancia genérica r)
- Que para conferirle dicha energía potencial es necesario dotar al cuerpo de cierta velocidad inicial (la ***velocidad de escape v_e***)
- Que dicha velocidad *en términos energéticos* se traduce en una energía cinética que se irá "consumiendo" a medida que el cuerpo se aleja, aumentando la energía potencial. En el infinito el cuerpo tendrá una energía potencial de cero julios y consideraremos que llega con velocidad cero (energía cinética también nula)
- Que *la energía mecánica se conserva* en todo el proceso
- Que la masa de la Tierra es M_T y su radio R_T y la masa del cuerpo que queremos situar en el infinito es m

A partir de lo anterior, podemos escribir:
Si la energía se conserva: Em(∞) = Em(superficie)
Ep(∞) + Ec(∞) = Ep(superficie) + Ec(superficie) Como Ep(∞) = 0 y Ec(∞) = 0
Ep(superficie) + Ec(superficie) = 0
Es decir cuando no tiene ninguna energía ha escapado del campo gravitatorio (se supone que en el infinito)
Aplicado a la Tierra:
Ep(superficie) + Ec(superficie) = 0 $- G\, M_T.m/R_T + \frac{1}{2} mv^2 = 0$ $\frac{1}{2} mv^2 = G\, M_T.m/R_T$ $\frac{1}{2} v_e^2 = G\, M_T/R_T$
Despejando $v_e = \sqrt{2GM_T/R_T}$ (raíz)
Las conclusiones a las que hemos llegado no son sólo válidas para el caso de la Tierra si no que pueden extenderse para el campo generado por cualquier otro planeta o cuerpo esférico de masa *M*.
Así, definimos la **velocidad de escape** de un cuerpo como la mínima que debe comunicársele para que salga del campo gravitatorio generado por otro. Su valor, suponiendo que el cuerpo se encuentra inicialmente a una distancia *R* del planeta o cuerpo generador de campo, puede ser determinada por la expresión: **$v_e = \sqrt{2GM/R}$ (raíz)**
Puedes comprobar que el valor de la velocidad de escape para un cuerpo en la superficie terrestre es de 11174,5 m/s = 11,17 km/s
Este sería el valor con el que el súper hombre de la figura anterior debería lanzar su balón si quisiera que abandonase la influencia del campo gravitatorio terrestre.
Observa las siguientes ***características***:
Dicho valor *es independiente de la dirección del lanzamiento*, siempre que no apuntemos al suelo, claro está.

No depende de la masa del cuerpo lanzado, es decir, la velocidad de escape de un cuerpo de 1 kg es la misma que la de un cuerpo de 1000 kg. ¿Contradice esto tu sentido común? Si lo piensas detenidamente *g* tampoco depende de la masa del cuerpo (todos los cuerpos caen con igual aceleración en el vacío, independientemente de su masa). Lo que si es cierto es que los cuerpos más pesados requieren de un trabajo mayor para alcanzar la velocidad de escape, es decir, cuesta más alcanzar 11,17 km/s con un cuerpo de 1000 kg que con uno de 1 kg

Dicha velocidad lleva asociada una energía cinética conocida como ***energía de amarre o ligadura*** ya que cualquier cuerpo cuya energía se encuentre por debajo de ella queda ligado o amarrado al campo. Su valor, para un cuerpo de 1 kg es:

$E_c = ½ mv^2 = 1/2 .1. 11174,5^2 = 6,24.10^7$ J

Finalmente, observa que en nuestro modelo hemos considerado que la Tierra es el único cuerpo que existe que crea un campo capaz de atraer al objeto lanzado. En el caso real de las sondas espaciales, por ejemplo, existen otros cuerpos celestes en el espacio: otros planetas y estrellas del Sistema Solar y fuera de él. El campo que crean se usa para impulsarlas aumentando su energía cinética en las proximidades de los mismos. A este proceso se le denomina **asistencia gravitacional.**

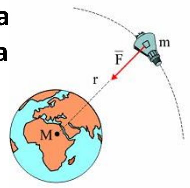
Ejemplo
Determina la velocidad de escape de un punto situado a 40000 km de altura respecto a la Tierra.
Datos: Radio de la Tierra: 6371 km; Masa terrestre: $5.97·10^{24}$ kg

Altura sobre la Tierra desde la que se quiere lanzar el cuerpo: $h = 40000$ km $= 4·10^7$ m
Radio de la Tierra: $R_T = 6371$ km $= 6371·10^3$ m
Masa de la Tierra: $M_T = 5.97·10^{24}$ kg
Resolución
En primer lugar, es importante saber a qué distancia de la Tierra se encuentra el cuerpo. $R=R_T+h$
$R = R_T + h = 6371 + 40000 = 46371$ km $= 46371.10^3$ m
Para determinar la velocidad de escape partimos del hecho de que la energía mecánica se conserva, ya que el cuerpo está únicamente sometido a la fuerza gravitatoria (fuerza conservativa). Además, consideraremos que el cuerpo escapa del campo en el infinito, a donde llega con energía cinética igual a cero, es decir, sin velocidad. Por tanto:
Ep(superficie) + Ec(superficie) = 0 $\quad - G M_T.m/R + ½ mv^2 = 0 \quad ½ mv^2 = G M_T.m/R \quad ½ v_e^2 = G M_T/R$
Despejando $\quad v_e = \sqrt{} 2GM_T/R$ (raíz) $= \sqrt{} 2GM_T/(R_T+h) = 4,14.10^3$ m/s

Cuerpos libres y ligados (No suele preguntarse, es un poco liado)
El valor de la energía mecánica de un cuerpo en un campo gravitatorio nos puede servir para determinar si puede escapar a los efectos del mismo, en cuyo caso decimos que el **cuerpo es libre**, o no, en cuyo caso decimos que **el cuerpo está ligado al campo**. Efectivamente, la *velocidad de escape*, v_e, es una *velocidad límite* que marca, por extensión, el valor mínimo de energía mecánica para el abandono del campo. Recuerda que la energía mecánica se conserva cuando el cuerpo está sometido exclusivamente a la fuerza gravitatoria, por lo que es fácilmente deducible de la propia definición de velocidad de escape que dicho valor límite corresponde a $E_m = 0$. O sea cuando ha escapado, en el infinito su Em = 0
Como se conserva: Em(∞) = Em(superficie) = 0
Ep(∞) + Ec(∞) = Ep(superficie) + Ec(superficie) = 0
Como Ep(∞) = 0 y Ec(∞) = 0
Ep(superficie) + Ec(superficie) = 0
$- G M.m/R + ½ mv_e^2 = 0 \quad ½ mv_e^2 - G M.m/R = 0$ Sustituyendo la $v_e = \sqrt{} 2GM/R$
$½ m(\sqrt{} 2GM/R)^2 - G M.m/R = 0 \quad ½ m(2GM/R) - G M.m/R = 0$ Simplificando, evidentemente 0 = 0
Por tanto:
Definimos un **cuerpo libre** de un campo gravitatorio como aquel que tiene su energía mecánica mayor que cero. En tal caso, el cuerpo no está ligado al campo. Observa que la energía potencial gravitatoria siempre es negativa y, por ello, Em ≥ 0 $\quad$ Ec ≥ |Ep|
Definimos un **cuerpo ligado** o **cuerpo amarrado** a un campo gravitatorio como aquel que tiene su energía mecánica menor que cero. En tal caso, el cuerpo no podrá escapar al campo. Dado que la energía potencial gravitatoria siempre es negativa se cumple que Em < 0 $\quad$ Ec < |Ep|

EJERCICIOS

34. (Continuación del problema 10) Un satélite natural, de $8\cdot10^{10}$ kg de masa, gira en una órbita circular a una altura de 800 km sobre la superficie de un cierto planeta P. DATOS: Masa del planeta P: $M_P = 5\cdot10^{25}$ kg, Radio del planeta P: $R_P = 2\cdot10^4$ km, G.



a) Hallar el periodo orbital del satélite. (Ya hecho en el problema 10)
b) Hallar la energía total del satélite.
c) Hallar el valor del campo gravitatorio en la superficie del planeta.

Sol.:

a) En el problema 10 hallamos la velocidad orbital: $v_{orbital} = \sqrt{(GM/r)} = 12662{,}5$ m/s
b) $Em = Ec + Ep = ½\, mv_{orbital}^2 - G\, Mm/r =$
$½\, 8.10^{10}\, (12662{,}5)^2 – 6{,}67.10^{-11} . 5.10^{25} . 8.10^{10} / (800 + 2.10^4)\, 10^3 = - 6{,}6.10^{19}$ J
c) $g_{0P} = G\, M/R^2 = 6{,}67.10^{-11} . 5.10^{25} / (2.10^4.10^3)^2 = 8{,}34\ m/s^2$

35. (Continuación del problema 11) Un pequeño satélite, de 1500 kg de masa, describe una órbita circular alrededor de Marte, a una altura de 5000 km sobre su superficie. DATOS: Masa de Marte: $M_M = 6{,}4.10^{23}$ kg Radio de Marte: $R_M = 3390$ km
a) Calcular el período del movimiento del satélite.
b) Calcular la energía cinética, la energía potencial gravitatoria y la energía total del satélite.
c) ¿Cuánto pesaría el satélite en la superficie de Marte? ¿Y en la superficie de la Tierra?

Sol.:

a) T = 6,5 h $v_{orb} = \sqrt{(GM/r)} = 2255{,}6$ m/s
b) $Ec = ½\, mv_{orbital}^2 = 3{,}82.10^9$ J
$Ep = - G\, Mm/r = - 7{,}63.10^9$ J
$Em = Ec + Ep = ½\, mv_{orbital}^2 - G\, Mm/r = - 3{,}82.10^9$ J
c) Calculamos la gravedad en la superficie de Marte:
$g_{0M} = G\, M_M/R_M^2 = 6{,}67.10^{-11} . 6{,}4.10^{23} / (3390.10^3)^2 = 3{,}7\ m/s^2$
El peso del satélite en la superficie de Marte es: $P_{0M} = m.g_0 = 1500.3{,}7 = 5550$ N
Calculamos la gravedad en la superficie de la Tierra:
$g_{0T} = G\, M_T/R_T^2 = 6{,}67.10^{-11} . 6.10^{24} / (6370.10^3)^2 = 9{,}86\ m/s^2$
De modo que el peso del satélite en la superficie de la Tierra es: $P_{0T} = m.g_0 = 1500.9{,}86 = 14790$ N

36. (Continuación del problema 12) Para un satélite artificial de masa 500 kg que rodea la Tierra en una órbita circular a $0{,}30.10^6$ m de la superficie del planeta. Determinar:
a) el valor de la velocidad, así como el tiempo que tarda en realizar una órbita y la aceleración en la órbita.
b) La aceleración en la órbita.
c) La energía mecánica del satélite en órbita y el trabajo que se requiere para poner el satélite en esa órbita.
Datos: $M_T = 5{,}97.10^{24}$ kg, $R_T = 6370$ km, G

Sol.:
Los apartados a) y b) ya se hicieron en el problema 12
$v_{orbital} = \sqrt{(GM_T/r)} = 7744$ m/s
$T = 2\pi \sqrt{(r^3/GM_T)} = 5411{,}8$ s = 1,5 h
$a_n = v^2/r = 9\ m/s^2$
<u>Apartado c)</u>
La energía mecánica del satélite, también conocida como energía de enlace, es la suma de las energías cinética y potencial que tiene el satélite en su órbita.
$Em = Ec + Ep = ½\, mv_{orbital}^2 - G\, Mm/r = ½\, m\, (\sqrt{(GM_T/r)})^2 - G\, Mm/r = ½\, m\, (GM_T/r) - G\, Mm/r = - ½\, G\, M_T.m / r$
$= - 1{,}5.10^{10}$ J
Antes del lanzamiento el satélite solo posee energía potencial gravitatoria, sin embargo, cuando se mueve en su órbita tiene tanto energía potencial como energía cinética, cuya suma recibe el nombre de energía mecánica orbital o energía de enlace. El trabajo necesario para poner el satélite en órbita es la diferencia entre la energía de enlace y la energía potencial en la superficie:

$W = E_{M(órbita)} – E_{M(superficie)}$
$E_{M(órbita)} = - 1,5.10^{10}$ J (de antes)
En la sólo hay Ep, ya que el satélite está quieto y no tiene Ec
$E_{M(superficie)} = Ep = - - G\ M_T.m / R_T = - 6,67.10^{-11} .5,97.10^{24} . 500 / 6370.10^3 = - 3,126.10^{10}$ J
$W = E_{M(órbita)} – E_{M(superficie)} = = - 1,5.10^{10} – (- 3,126.10^{10}) = 1,63.10^{10}$ J

37. (Continuación del problema 13). Determinar para un satélite artificial de masa 200 kg que rodea la Tierra en una órbita circular de periodo $8,40.10^3$ s.
a) El radio de la órbita, así como el valor de la velocidad orbital.
b) Las energías, mecánica, cinética y potencial del satélite en esa órbita.
c) El trabajo que se requiere para poner el satélite en esa órbita.
Datos: $M_T = 5,97.10^{24}$ kg, $R_T = 6370$ km, G

Sol.:
El apartado a) ya se hizo en el problema 13
b) $Ec = 4,47.10^9$ J $\quad$ $Ep = - 8,95.10^9$ J $\quad$ $Em = -4,47.10^9$ J
c) $W = 8,1.10^9$ J

38. a) ¿Cuál es la velocidad mínima que es preciso comunicar a un objeto de 1000 kg situado a 1000 km de altura la superficie terrestre para que escape del campo gravitatorio? ¿En qué sentido?
b) Obtén la energía total del cuerpo, cuando se encuentra en esa órbita y las diferentes contribuciones a ésta.
Datos: Los de la Tierra y G

a)
La velocidad de escape es la velocidad mínima que debemos suministrar a un cuerpo situado dentro de un campo gravitatorio para escapar de la influencia de éste.
La fuerza gravitatoria es una fuerza conservativa, de modo que la energía mecánica se conserva.
Para que un cuerpo lanzado desde un punto dentro de un campo gravitatorio pueda abandonar éste, el cuerpo debe llegar a un punto suficientemente alejado con energía potencial gravitatoria nula (ya que hemos tomado como referencia potencial 0 un punto suficientemente alejado, el infinito, donde la influencia gravitatoria puede considerarse nula) y con energía cinética nula. Cuando el cuerpo alcanza esta situación su energía mecánica es 0, de modo que aplicando el principio de conservación de la energía mecánica:
$Em = 0 \quad Ep + Ec = 0 \quad - G\ M_T.m/R + ½\ mv^2 = 0 \quad ½\ mv^2 = G\ M_T.m/R \quad ½\ v_e^2 = G\ M_T/R$
$v_e = \surd\ 2GM_T/R$ (raíz) $= \surd\ 2GM_T/(R_T+h) = 10418.5$ m/s
La velocidad de escape no depende de la dirección del lanzamiento (salvo aquellas que harían que el objeto se estrellase sobre la superficie terrestre) ni de la masa del objeto, como hemos podido demostrar antes.
b)
Un cuerpo en órbita tiene energía potencial gravitatoria (que es función de la distancia al centro del objeto de masas del objeto alrededor del cual orbita) y energía cinética (que es función de la velocidad con la que el cuerpo está orbitando). La energía total de este cuerpo es la suma de estas dos energías y reciben el nombre de energía mecánica orbital o energía de enlace.
$R = R_T + h \quad Ep = - G\ M_T.m/R = - 5,4.10^{10}$ J
La fuerza gravitatoria de la Tierra actúa como fuerza centrípeta del movimiento del satélite: $G\ M_Tm/R^2 = m\ v_0^2 / R$
$v_0 = \surd\ (GM_T/R)$
$Ec = ½\ mv_{orbital}^2 = ½\ m\ (\surd\ (GM_T/r)^2 = ½\ m\ (GM_T/r) = GM_T\ m / 2r = 2,7.10^{10}$ J
$Em = Ec + Ep = 2,7.10^{10} - 5,4.10^{10} = - 2,7.10^{10}$ J

39. El planeta Mercurio tiene una gravedad en su superficie de 0,376 veces la terrestre y su radio es 0,38 veces el radio terrestre.
a) Obtén la masa de Mercurio.
b) Determina la velocidad de escape desde la superficie de Mercurio.
Datos: Los de la Tierra y G

Sol.:
a)

$R_M = 0,38\ R_T$
$g_{0M} = 0,376\ g_{0T}$ $G\ M_M / R_M^2 = 0,376\ G\ M_T / R_T^2$ Despejamos $M_M = 0,376\ M_T\ R_M^2 / R_T^2 =$
$M_M = 0,376\ M_T\ (0,38\ R_T)^2 / R_T^2 = 0,376\ M_T\ 0,38^2 = 3,24.10^{23}$ kg

b) La velocidad de escape desde la superficie de Mercurio
$M_M = 3,24.10^{23}$ kg
$R_M = 0,38\ R_T = 0,38\ .\ 6370.10^3$
$v_e = \sqrt{}\ 2GM_M/R_M$ (raíz) $= \sqrt{}\ 2GM_M/R_M = 4235$ m/s

40. Un satélite de 500 kg se sitúa a una altura de 1200 km sobre la superficie de la Tierra. Determinar:
a) ¿Cuánto ha aumentado la energía potencial gravitatoria del satélite desde la superficie de la Tierra? ¿Cuál sería la energía mecánica en esa órbita?
b) Una vez en órbita, ¿Cuál es la energía mínima que hay que suministrar al satélite para que escape de la acción del campo?
Datos: Los de la Tierra y G

Sol.:
a)
$r = R_T + h = (6370 + 1200).10^3 = 7570.\ 10^3$ m
$\Delta\ Ep = Ep(h) – Ep(superficie) = -\ G\ M_T\ m / r - G\ M_T\ m / R_T = G\ M_T\ m\ (1/R_T – 1/r) = 4,98.10^9$ J
La energía mecánica del satélite en su órbita, también conocida como energía de enlace, es la suma de las energías cinética y potencial que tiene el satélite en su órbita.
$Em = Ec + Ep = ½\ mv_{orbital}^2 - G\ M_Tm/r = ½\ m\ (\sqrt{}\ (GM_T/r)^2 - G\ Mm/r = ½\ m\ (GM_T/r) - G\ Mm/r = -\ ½\ G\ M_T.m / r$
$= -\ 1,32.10^{10}$ J
b)
Cuando un objeto escapa de la atracción gravitatoria terrestre su energía mecánica o energía de enlace es cero o positiva.
De modo que la mínima energía necesaria para llevar el satélite desde su órbita hasta un punto donde dejaría de estar bajo la influencia gravitatoria de la Tierra, sería igual a la energía de enlace del satélite cambiada de signo.
$W = -\ E(enlace\ o\ E_m) = 1,32.10^{10}$ J

41. Se desea poner un satélite de comunicaciones de 1000 kg de masa en una órbita circular a 300 km sobre la superficie de la Tierra.
a) ¿Qué velocidad, periodo y aceleración debe tener en esa órbita?
b) ¿Cuánto trabajo se requiere para poner el satélite en órbita?
c) ¿Cuánto trabajo adicional se necesitaría para que el satélite escapara de la influencia de la Tierra?
Datos: Los de la Tierra y G

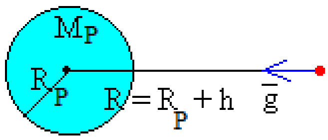
Sol.:
a) $v_o = 7743,9$ m/s T = 5411,8 m/s $a_n = v_O^2 / r = 9$ m/s^2
b) Antes del lanzamiento el satélite solo posee energía potencial gravitatoria, sin embargo, cuando se mueve en su órbita tiene tanto energía potencial como energía cinética, cuya suma recibe el nombre de energía mecánica orbital o energía de enlace. El trabajo necesario para poner el satélite en órbita es la diferencia entre la energía de enlace y la energía potencial en la superficie.
   $W = E_{M(órbita\ o\ enlace)} – E_{M(superficie)} = -\ ½\ G\ M_T.m / r – (\ -\ G\ M_T\ m / R_T) = 3,28.10^{10}$ J
c) Recordemos que cuando un objeto escapa de la atracción gravitatoria terrestre su energía mecánica es cero o positiva. De modo que la mínima energía necesaria para llevar el satélite desde su órbita hasta un punto donde dejaría de estar bajo la influencia gravitatoria de la Tierra, sería igual a la energía de enlace del satélite cambiada de signo.
   $W = 3.10^{10}$ J

42. Un satélite de masa 25.000 kg describe una órbita circular alrededor de un cierto planeta P, con un período orbital de 326 horas.
DATO: Masa de planeta P, M_P = 6,0.1027 kg
a) Halla la distancia al centro del planeta a la que se encuentra el satélite.

b) **Hallar la energía total del satélite.**

Sol.:
a)
T = 326 h = $1,1736.10^6$ s
La fuerza gravitatoria del planeta actúa como fuerza centrípeta del movimiento del satélite.
$G M_P.m / R^2 = m v_0^2 / R = m \omega^2 R = m (2\pi/T)^2 R$ de donde R = raíz cúbica ($G M_P T^2 / 4 \pi^2$)
R = $2,41.10^9$ m
b)
Em = Ec + Ep = $-2,08.10^{12}$ J

43. La aceleración de la gravedad en la superficie de un planeta P es 5,44 m/s² y su masa es 1100 veces la masa de la Tierra. Pueden utilizarse los datos de la Tierra y de la gravedad en la superficie terrestre.
DATOS: Masa de la Tierra, MT = $5,98.10^{24}$ kg Radio de la Tierra, RT = 6370 km
Gravedad en la superficie terrestre, g_0 = 9,80 m/s²
a) Hallar el radio del planeta P.
b) Hallar la velocidad de escape desde la superficie del planeta P.



Sol.:
a)Teniendo en cuenta la definición de intensidad de campo gravitatorio cuyo módulo es $g = F/m = G M / r^2$
De esa expresión se puede deducir la M $M = g r^2 / G$
Si llamamos g_0 a la intensidad de campo gravitatorio en la superficie terrestre y g_P a la del planeta:
$g_P = G M_P / r_P^2 = G 1100 M_T / r_P^2$
y sabiendo, a partir de $g_0 = G M_T / R_T^2$, que la masa de la tierra se puede expresar en función de su g: $M_T = g_0 R_T^2 /G$
$g_P = G M_P / r_P^2 = G 1100 M_T / r_P^2 = G 1100 (g_0 R_T^2 /G) / r_P^2 = 1100 g_0 R_T^2 / r_P^2$ de donde
$R_P = R_T \sqrt{(1100 g_0 / g_p)} = 6370 \sqrt{(1100 9,8 / 5,44)} = 2,84.10^5$ km
b) $v_e = \sqrt{2GM_P/R_P}$ (raíz) = $5,56.10^4$ m/s

44. Una lanzadera espacial giraba en una órbita circular a 300 km de altura sobre la superficie de la Tierra. Para reparar un satélite artificial, la lanzadera se desplazó hasta una nueva órbita circular situada a 620 km de altura sobre la superficie terrestre. Sabiendo que la masa de la lanzadera era de 65000 kg, calcular:
DATOS: Masa de la Tierra: MT = $5.98\ 10^{24}$ kg; Radio de la Tierra: RT = 6370 km.
a) El período y la velocidad de la lanzadera en su órbita inicial
b) La energía necesaria para situarla en la órbita en la que se encontraba el satélite.

Sol.:
a) Recuerda $F_g = F_C$ $v_0 = 7733$ m/s T = 5419 s
b) La energía necesaria para trasladar un satélite de una órbita a otra es igual a la diferencia de energía mecánica que el satélite tiene en ambas órbitas.
W = Em (órbita final) – Em (órbita inicial) = $(Ec + Ep)_f - (Ec + Ep)_i$
$Em(f) = ½ m v_f^2 - G M_T m /r_f = ½ m (\sqrt{(G M_T/r_f)})^2 - G M_T m /r_f = ½ m G M_T/r_f - G M_T m /r_f = - ½ G M_T / r_f$
$Em(i) = = - ½ G M_T / r_i$
$W = Em (f) - Em (i) = (- ½ G M_T / r_f) - (- ½ G M_T / r_i) = ½ G M_T / r_i) - ½ G M_T / r_f) = ½ GM_T m (1/r_i - 1/r_f) =$
$8,9.10^{10}$ J